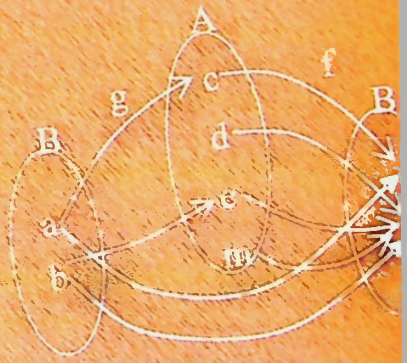
Marcelo Rufino de Oliveira
Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

COLEÇÃO ELEMENTOS DA MATEMÁTICA



$(\text{ROTAÇÃO}) \circ (\text{REFLEXÃO}) \circ (\text{TRANSLAÇÃO})$

$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$

$a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

1

CONJUNTOS
FUNÇÕES
ARITMÉTICA

Marcelo Rufino de Oliveira
Com formação pelo Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA)
Coordenador das Turmas Militares do Colégio Ideal
Professor de Matemática das Turmas Militares do Colégio Ideal
Coordenador Regional da Olimpíada Brasileira de Matemática

Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro
Com formação pela Universidade Federal do Pará (UFPa)
Professor de Matemática das Turmas Militares do Colégio Ideal

CONJUNTOS
FUNÇÕES
ARITMÉTICA

2ª edição (2009)

Copyright © 2009 by marcelo rufino de oliveira

Todos os direitos desta edição estão reservados
à Marcelo Rufino de Oliveira
Belém – Pará – Brasil
E-mail: marcelorufino@hotmail.com

LOUDES PACHECO
Ficha Catalográfica

GTR Grafica e Editora
Impressão

F48.....Oliveira, Marcelo Rufino de

Coleção elementos da matemática, 1 : conjuntos, funções, aritmética / Marcelo Rufino de Oliveira, Márcio Rodrigues da Rocha Pinheiro. – 2 ed. - Belém: GTR, 2009.
p.

ISBN: 978-85-89171-22-9

1. Matemática (Ensino Médio) 2. Matemática (Ensino Médio) – conjuntos 3. Matemática (Ensino Médio) – funções 3 Matemática (Ensino Médio) - aritmética I - Pinheiro, Márcio Rodrigues da Rocha. II. Título. III: Título: Conjuntos. IV. Título: Funções.V. Título: Aritmética.

CDD: 510.7

APRESENTAÇÃO À 2ª EDIÇÃO

Este é o primeiro volume da **Coleção Elementos da Matemática**, programada para apresentar toda a matemática elementar em seis volumes:

Volume 0 – Álgebra, Proporção e Frações
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 1 – Conjuntos, Funções, Exponencial, Logaritmo e Aritmética
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 2 – Geometria Plana
Autores: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

Volume 3 – Seqüências, Combinatória, Probabilidade, Matrizes e Trigonometria
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Manoel Leite Carneiro

Volume 4 – Números Complexos, Polinômios e Geometria Analítica
Autores: Marcelo Rufino de Oliveira

Volume 5 – Geometria Espacial e Cálculo
Autor: Marcelo Rufino de Oliveira e Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro

A linguagem de conjuntos é essencialmente a base de toda a linguagem matemática. Algo similar às regras gramaticais, aprendidas em vários níveis de profundidade, durante toda a vida escolar. Não é possível expressar-se corretamente em certa linguagem sem antes conhecer o básico da estrutura lingüística. Analogamente, não é conveniente buscar um conhecimento mais detalhado de matemática elementar abrindo mão das noções fundamentais de conjuntos.

Como uma verdadeira alfabetização matemática, a linguagem dos conjuntos e das funções deve tornar-se muito clara ao aluno, ainda que não haja total dela domínio, para que a compreensão dos fatos cotidianos torne-se mais eficientes. As idéias de agrupamento de entes que têm em comum alguma propriedade importante, dos tipos e importância dos números, de correspondência entre elementos de conjuntos, distintos ou não, são fundamentais para a formação do cidadão consciente e analista do mundo que o rodeia. A associação entre a linguagem gramatical e a linguagem matemática dá-se no âmbito da linguagem dos conjuntos e das funções. Praticamente toda a Matemática pode ser (e de fato é) desenvolvida a partir destes conceitos.

A aritmética trata do estudo particular de um conjunto numérico importante: o dos números inteiros. Sua importância reside em vários aspectos, tais quais estruturar os sistemas de bases numéricas (alicerces de todas as áreas da matemática), servir de base para a informática, aplicações na cinemática, quantização da carga elétrica em condutores, suporte na formulação de calendários (ciclo anual de 365 dias, ciclo lunar de 28 dias, etc), além de aplicação direta em outras áreas da matemática: números complexos (1ª e 2ª Leis de Moivre), divisão de polinômios, geometria (polígonos estrelados), etc.

Finalmente, deseja-se deixar claro o caráter experimental desta obra. Por meio dela, busca-se reunir o melhor que há no que diz respeito à preparação de alunos aos concursos vestibulares mais difíceis do Brasil. No entanto, embora se busque a perfeição, é natural que haja erros ou imprecisões. Deseja-se manter um relacionamento atencioso com alunos e outros professores, a fim de aprimorar este trabalho.

Os autores

Índice

Capítulo 1. Conjuntos
1. Introdução – Noções Primitivas 1
2. Representações de Conjuntos 2
3. Conjuntos Notáveis 2
4. Relação de Inclusão – Subconjuntos 3
5. Igualdade entre Conjuntos 5
6. Operações entre Conjuntos 6
7. Cardinalidade da União de Conjuntos – Princípio da Inclusão-Exclusão 13
8. Par Ordenado 15
9. Produto Cartesiano 15
10. Principais Conjuntos Numéricos 17
Exercícios 36

Capítulo 2. Funções
1. Definições Iniciais 53
2. Igualdade de Funções 57
3. Funções Implícitas 59
4. Gráfico de uma Função 60
5. Imagem Direta e Imagem Inversa 64
6. Tipologia 67
7. Composição de Funções 75
8. Inversão de Funções 80
9. Álgebra de Funções 84
10. Monotonicidade 85
11. Paridade 91
12. Funções Periódicas 94
13. Algumas Transformações Geométricas Básicas 98
14. Função Afim 107
15. Funções Quadráticas 116
Exercícios 127

Capítulo 3. Representação Decimal
1. Introdução 167
Exercícios 171

Capítulo 4. Critérios de Divisibilidade
1. Introdução 177
Exercícios 181

Capítulo 5. Propriedades da Divisibilidade
1. Propriedades 184
2. Algoritmo da Divisão Euclidiana 188
Exercícios 191

Capítulo 6. Números Primos
1. Definição 199
2. Propriedades 199
3. Teorema Fundamental da Aritmética 202
4. Dois Teoremas Clássicos Sobre Números Primos 204
5. A Infinitude dos Números Primos 205
6. Divisores Primos de um Inteiro Composto 205
7. Crivo de Eratóstenes 206
8. Primos Gêmeos 206

9. Seqüências de Inteiros Consecutivos Compostos 207
10. Postulado de Bertrand 207
Exercícios 208

Capítulo 7. MDC e MMC
MDC
1. Definição 212
2. Existência e Unicidade do MDC 212
3. Inteiros Primos Entre Si 212
4. Propriedades 212
5. Cálculo do MDC a partir das fatorações canônicas 213
6. Algoritmo de Euclides 216

MMC
7. Definição 217
8. Cálculo do MMC a partir das fatorações canônicas 217
9. Relação Entre MDC e MMC 219
Exercícios 220

Capítulo 8. Divisores
1. Definição 228
2. Número de Divisores Positivos 228
3. Soma dos Divisores Positivos 231
4. Produto dos Divisores 233
5. Números Perfeitos 234
6. Números Amigos 236
7. Números Deficientes e Abundantes 236
Exercícios 237

Capítulo 9. Congruências
1. Propriedades 241
2. Sistemas Completos de Restos 246
Exercícios 247

Capítulo 10. Função Máximo Inteiro
1. Propriedades 250
2. Expoente de um Primo na Fatoração de n! 253
3. Número de Dígitos de um Inteiro Positivo 255
Exercícios 256

Capítulo 11. Equações Diofantinas Lineares
1. Definição 258
2. Condição de Existência de Solução 258
3. Soluções da Equação ax + by = c 258
Exercícios 260

Apêndices
1. Bases de Numeração 262
2. Triângulos Pitagóricos 265
3. Teoremas de Euler e Fermat 269
4. Teorema de Wilson 275
5. Equações Diofantinas não lineares 278
6. Representações de números naturais como somo de potências inteiras 287

Gabaritos 291

1. CONJUNTOS

1.1. INTRODUÇÃO – NOÇÕES PRIMITIVAS

São aquelas aceitas sem definição matemática formal, de modo que a experiência cotidiana e exemplos ilustrativos sejam suficientes para repassar suas principais características. A rigor, utilizam-se também espécies de barreiras ou limitações lógicas das propriedades relativas a tais noções, papel realizado pelos postulados ou axiomas, o que, no entanto, não cabe num curso deste nível.

Neste estudo da *linguagem de conjuntos*, aceitar-se-ão três noções primitivas:

a) A própria idéia de CONJUNTO. Intuitivamente, consiste nas idéias usuais de *coleção* ou *agrupamento de objetos quaisquer bem definidos*, que, entretanto, não convêm como definições, uma vez que fogem ao senso comum as noções de coleção de apenas uma coisa (conjunto unitário) ou, mais acentuadamente, agrupamento de nada (conjunto vazio). Qual seria, por exemplo, a coleção de Ferraris do professor Márcio (formada, pelo menos por enquanto, por zero elementos)?

Usualmente, representa-se um conjunto por uma letra maiúscula do nosso alfabeto. Assim, fala-se usualmente nos conjuntos A, B, M, X, Y_1, Y_2, etc.

b) ELEMENTO. Quando alguém deseja iniciar uma coleção, de um modo geral não lhe é limitado o *gênero* (tipo) de coisas que pode colecionar. Pode-se, teoricamente, colecionar qualquer coisa. Analogamente, a natureza dos membros (entes) formadores de um conjunto é "totalmente" arbitrária. Tais coisas ("objetos") que constituem um conjunto (não vazio) é que são denominadas elementos do conjunto.

É imprescindível notar que até mesmo um conjunto pode ser (funcionar como) membro de outro conjunto. Assim, por exemplo, o conjunto das seleções de uma copa do mundo de futebol é formado por várias equipes, as quais, por sua vez, podem ser consideradas como conjuntos de vários jogadores, que podem ser encarados como conjuntos de células, e assim por diante. Pode-se pensar no conjunto O dos órgãos de um determinado ser humano. O coração pertence a O. Por sua vez, o coração pode ser visto também como um conjunto, C, formado por células específicas. Daí, tem-se C funcionando como elemento de O. Com igual propriedade, note-se que cada um dos alunos do 3º Militar pode ser encarado como elemento do conjunto M, que representa tal turma, a qual, por sua vez, pode também ser vista como elemento do conjunto I das turmas do Ideal Militar, o qual, a seu tempo, também pode ser visto como elemento do conjunto E das escolas de Belém, e assim por diante.

Comumente, representa-se um membro *genérico* de um conjunto por uma letra minúscula.

c) A noção de PERTINÊNCIA DE UM ELEMENTO A UM CONJUNTO. Corresponde à resposta a perguntas do tipo: tal ente (coisa) é ou não elemento daquele conjunto? Admitir-se-á intrínseca a capacidade de responder, de forma única, positiva ou negativamente a esta questão. Igualmente, todo conjunto deve possuir tacitamente a "capacidade" de ter seus elementos bem determinados (caracterizados). Assim, a gula, por exemplo, pertence ao conjunto dos pecados capitais, ao passo que o professor Márcio não pertence nem ao conjunto dos alunos do Ideal Militar, nem ao dos homens que já pisaram em Marte (pelo menos de acordo como o que se sabe, atualmente).

A pertinência ou não de um elemento a um determinado conjunto é indicada pelos símbolos $\in$ (pertence) ou $\notin$ (não pertence), respectivamente.

Obs.: Como regra fundamental, a ser aceita sem demonstração (*axioma*) tem-se que um conjunto (ou qualquer objeto, de um modo mais geral) não pode ser elemento dele mesmo, ou seja, qualquer que seja o conjunto A, impõe-se $A \notin A$. Entretanto, há outros axiomas (que não serão trabalhados aqui), cujo principal objetivo consiste em evitar os denominados **paradoxos**: idéias aparentemente perfeitas, mas que levam a conclusões contraditórias. Por exemplo, o mais famoso deles "brinca" com o axioma acima: o ***paradoxo de Russel***, que considera o conjunto X formado pelos conjuntos que não são elementos deles mesmos ($X = \{A \mid A \notin A\}$, conforme notação a ser vista em seguida). A pergunta é: $X \in X$? Em caso afirmativo, X, por pertencer a X, não pode pertencer a X, o que é uma contradição. Então X não pode pertencer a X. Mas, por definição X pertenceria a X (!?). Uma forma bem popular de apresentar este paradoxo é a seguinte: numa certa cidadezinha, existe um barbeiro que só faz a barba dos homens que não barbeiam a si próprios (e de todos eles). Tente responder à pergunta: quem faz a barba do barbeiro? Tais paradoxos, entretanto, bem como uma apresentação mais rigorosa da Teoria dos Conjuntos

(desenvolvida formalmente a partir do final do século XIX, notadamente pelo matemático "russo-germânico" Georg Cantor), não cabem num curso deste nível, muito embora as noções elementares aqui desenvolvidas serem de grande utilidade para uma linguagem matemática mais padronizada, utilizada em praticamente todos os ramos da Matemática (e, conseqüentemente, em muitas áreas do conhecimento).

1.2. REPRESENTAÇÕES DE CONJUNTOS

De um modo geral, representa-se um conjunto por meio de chaves ou de uma linha fechada, qualquer um dos quais deixando os elementos do conjunto, e somente eles, em seu interior, de maneira explícita ou não.

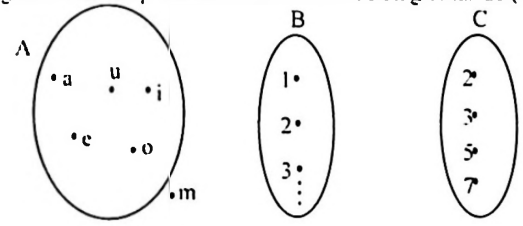
a) Utilizando chaves:

a.1) Forma *analítica* ou *tabular* ou por *enumeração*: explicita elementos do conjunto, podendo ser todos ou alguns, nesse último caso sendo possível notar diretamente quais são os elementos subentendidos. Exemplos:
$A = \{a, e, i, o, u\}$; $B = \{1, 2, 3, ...\}$; $C = \{2, 3, 5, 7\}$.

a.2) Forma *sintética* (caracterização por meio de propriedade): expressa uma propriedade comum a todos os elementos do conjunto e somente a eles. Exemplos.:
$A = \{a \mid a \text{ é vogal}\}$; $B = \{b \mid b \text{ é um número natural positivo}\}$; $C = \{c \mid c \text{ é primo menor que } 10\}$.

b) Utilizando diagramas:

Consiste no uso de uma linha simples e fechada qualquer (em geral, uma circunferência) contornando os elementos do conjunto. Comumente, os elementos são indicados por pontos do interior da linha. Tais diagramas são freqüentemente chamados de diagramas de (Euler –) Venn. Exemplos:



1.3. CONJUNTOS NOTÁVEIS

a) Conjunto unitário: possui um único elemento. Exemplos:
$P = \{x \in Z \mid x \text{ é primo e par}\} = \{2\}$.
$L = \{x \mid x \text{ é atual presidente eleito do Brasil}\} = \{\text{Lula}\}$.
$S = \{x \in Z \mid x + 1 = 0\} = \{-1\}$.
$D = \{a \in R \mid a = e^{\pi i} + 1\} = \{0\}$.

b) Conjunto Vazio: não possui elemento algum. Como é possível? De um modo geral, o conjunto vazio é definido por meio de uma propriedade contraditória, isto é, uma afirmação que é sempre falsa, não podendo ser satisfeita por objeto algum. Exemplos:
$X = \{x \in R \mid x^2 < 0\} = \{\ \}$ (não existe número real cujo quadrado seja negativo).
$Y = \{y \mid y \neq y\} = \phi$ (tudo é igual a si próprio).

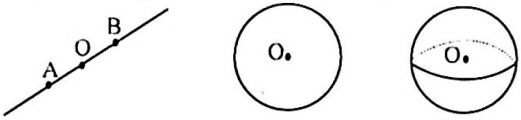
$S = \{x \in R \mid x^2 + x + 1 = 0\} = \phi$.

O interesse em adotar esses dois casos especiais de conjuntos (vazio e unitário) é a *generalização*. Assim, por exemplo, quando se fala no conjunto das raízes de uma equação polinomial do 2° grau, não é necessário afirmar que equações como $x^2 + x + 1 = 0$ não possui tal conjunto em R. Diz-se, simplesmente, que tal conjunto existe e é vazio.

Obs.: o conjunto $\{\phi\}$ é **unitário**.

c) Conjunto Solução (S): também denominado conjunto verdade (de uma sentença aberta), é o conjunto das respostas a uma pergunta. Mais rigorosamente (como será visto em Lógica Matemática), é o conjunto dos valores que podem ser atribuídos a variáveis, de modo a transformar uma sentença aberta em uma proposição verdadeira. Também é chamado conjunto verdade. Exemplos:
O conjunto solução da equação $x^2 - 5x + 6 = 0$ é $S = \{2,3\}$, uma vez que os elementos desse conjunto (e somente eles) tornam a igualdade verdadeira.
O conjunto verdade da inequação $x^2 < x$ é $V = \{x \in R \mid x^2 < x\} = \{x \in R \mid 0 < x < 1\}$.

d) Conjunto Universo (U): é o "maior" conjunto do qual podem ser retiradas as respostas a um certo problema. Noutras palavras, é um *conjunto fundamental* a partir do qual saem as soluções de uma certa classe de questionamentos (mais precisamente, é o conjunto do qual todos os conjuntos em estudo são subconjuntos). Note-se que não é permitido aqui que $U \in U$, ou seja, não existe um conjunto formado por todos os conjuntos. O que o universo faz é, apenas, limitar uma discussão. Exemplo:
Suponha-se que é dado um certo ponto O. Qual a resposta à pergunta: quais são os pontos que estão a 1cm de O? A resposta é: depende! Se os pontos tiverem que estar sobre uma determinada reta que passe por O, então há exatamente dois pontos convenientes, que deixam O como ponto médio do segmento de extremidade neles. Se os pontos puderem situar-se sobre um plano que contém O, então a solução é a circunferência de centro em O e raio 1cm. Se o ponto puder estar em qualquer lugar (espaço), então a resposta é a superfície de uma esfera de centro em O e raio 1cm.



OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: Quando não se explicita o conjunto universo de uma questão, deve-se considerar o "maior" possível. Assim, a resposta à pergunta acima deveria ser, como é de praxe, a superfície esférica descrita.

e) Conjuntos Finitos e Infinitos: Intuitivamente, um conjunto é *finito* quando o processo de contagem (enumeração) dos seus elementos chega a um *fim*, e é infinito em caso contrário. Apesar de ser suficiente para certas situações, tal concepção não pode ser tomada como uma definição matemática, uma vez que se utilizou a idéia de finitude para definir fim (trechos em itálico), ou seja, em verdade não se definiu nada. Foi exatamente esse tipo de impasse que fez com que o Cantor embasasse um estudo revolucionário de alto nível, a *Teoria dos Conjuntos*, que elucidou dúvidas clássicas pré e pós-cristãs, como os famosos paradoxos de Zenão e outras brincadeiras no antes sombrio reino do infinito.

1.4. RELAÇÃO DE INCLUSÃO – SUBCONJUNTOS

Diz-se que um conjunto A está contido em um conjunto B quando todo elemento de A for, também, elemento de B. Com o mesmo significado, diz-se ainda que A é um *subconjunto* (ou uma *parte*) de B ou, ainda, que B contém A. Simbolicamente:

$$\boxed{A \subset B \text{ (ou } B \supset A) \Leftrightarrow (\forall\, a \in A \Rightarrow a \in B)}$$

Exemplos:

a) Sejam U = {u ∈ Z | u é divisor de 120} e V = {v ∈ Z | v é divisor de 24}. Percebe-se que V ⊂ U, uma vez que todo número que divide 24 também é capaz de dividir 120.

b) Sejam P = {2, 3, 5, 7} e Q = {q ∈ Z | 1 < q < 9 e q é ímpar}. Note-se que, apesar de que 3 ∈ P e 3 ∈ Q, 5 ∈ P e 5 ∈ Q, bem como 7 ∈ P e 7 ∈ Q, tem-se 2 ∈ P, mas 2 ∉ Q. Dessa forma, P não pode ser subconjunto de Q, por não cumprir a definição para tal. Escreve-se, então, que P ⊄ Q.

c) Quando se diz que *todo paraense é brasileiro*, deve-se entender que um fato (ser paraense) **implica, acarreta, ocasiona** outro (ser brasileiro). Diz-se, ainda, que ser paraense é **condição suficiente** para ser brasileiro, ou que ser brasileiro é **condição necessária** para ser paraense. Tudo isso se generaliza para qualquer sentença do tipo HIPÓTESE ⇒ TESE. Simplesmente, o que se faz na linguagem de conjuntos é ler a proposição inicial como *o conjunto dos paraenses está contido no conjunto dos brasileiros*, isto é, qualquer que seja o paraense, ele também é brasileiro.

É de fundamental importância observar no penúltimo exemplo que não importa quantos elementos de um conjunto X pertençam a Y: **se pelo menos um elemento do primeiro não estiver no segundo, ocorre X ⊄ Y.** Noutros termos, para verificar que um conjunto X não é um subconjunto de Y, **deve-se (e basta) exibir** (pelo menos) **um elemento de X que não seja elemento de Y.**

Além disso, tem-se que ou X ⊂ Y ou X ⊄ Y, não havendo uma terceira opção nem podendo ocorrer as duas situações simultaneamente (isto é, os dois casos *excluem-se mutuamente*).

Estas duas últimas observações servem para demonstrar um fato considerado esquisito para muitos alunos, que muitas vezes o aceitam sem saber o porquê: o de que **o vazio é subconjunto de qualquer conjunto.** Com efeito, se existisse algum conjunto A do qual o conjunto vazio não fosse subconjunto, então dever-se-ia ser capaz de exibir pelo menos um elemento do vazio que não pertencesse a A. Mas isso é impossível, e esta contradição nasce do fato de supor que ϕ ⊄ A. Portanto, a única possibilidade é **ϕ ⊂ A, qualquer que seja o conjunto A.** Além desta, há outras propriedades importantes da relação de inclusão, a saber:

I. Para qualquer conjunto A, **A ⊂ A** (REFLEXIVIDADE).

DEMONSTRAÇÃO:

De fato, a implicação x ∈ A⇒ x ∈ A é trivialmente verdadeira (é óbvio que todo elemento de A está em A).

II. Se A ⊂ B e B ⊂ C, então A ⊂ C (TRANSITIVIDADE).

DEMONSTRAÇÃO:

Sabe-se que todo elemento de A está em B e que todo elemento de B está em C. Logo, qualquer elemento de A, por ser também elemento de C, deve estar em C.

III. Se A é um conjunto finito com **n** elementos, então A tem, exatamente, **2^n subconjuntos.** Exemplo:

Suponha-se que X = {a, b, c}. Formando os subconjuntos de X, tem-se que:

Subconjuntos com exatamente 0 elemento: ϕ

Subconjuntos com exatamente 1 elemento: {a}, {b} e {c}

Subconjuntos com exatamente 2 elementos: {a, b}, {a, c} e {b, c}

Subconjuntos com exatamente 3 elementos: {a, b, c} = X.

Como é possível perceber, há $8 = 2^3$ subconjuntos de A.

Por que não foram contados conjuntos como {b, a} e {c, a, b}? Porque, como será visto no próximo item, tais conjuntos são respectivamente iguais a {a, b} e a {a, b, c} e, assim, já foram computados.

Essa última propriedade admite muitas demonstrações interessantes e distintas, utilizando alguns argumentos combinatórios. Duas das mais simples são as seguintes:

1ª DEMONSTRAÇÃO de III: Se A é vazio, isto é, se n = 0, o único subconjunto possível é o próprio vazio. A fórmula é válida uma vez que $2^0 = 1$. Se n > 0, formar um subconjunto X qualquer de A consiste em tomar n decisões consecutivamente:

Decisão 1: pôr ou não o "primeiro" elemento de A no subconjunto X.

Decisão 2: pôr ou não o "segundo" elemento de A no subconjunto X.

...

Decisão n: pôr ou não o "enésimo" (e "último") elemento de A no subconjunto X.

Portanto, de acordo com o teorema fundamental da contagem, já que cada decisão pode ser feita de 2 modos ("pôr ou não pôr"), há um total de $2.2...2 = 2^n$ subconjuntos distintos possíveis de A.

2ª DEMONSTRAÇÃO de III: Pode-se proceder como no exemplo acima, só que modo mais geral. Dado o conjunto $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$, formam-se

Subconjuntos com exatamente 0 elemento, em número de $C_{n,0}$: ϕ.

Subconjuntos com exatamente 1 elemento, em número de $C_{n,1}$: $\{a_1\}, \{a_2\}, ... \{a_n\}$.

Subconjuntos com exatamente 2 elementos, em número de $C_{n,2}$: $\{a_1, a_2\}, ..., \{a_1, a_n\}, ..., \{a_{n-1}, a_n\}$.

...

Subconjuntos com exatamente n elementos, em número de $C_{n,n}$: o próprio A.

Portanto, há um total de $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + ... + C_{n,n}$ subconjuntos de A. Finalmente, pelo teorema do desenvolvimento binomial:

$(1 + 1)^n = C_{n,0}.1^n.1^0 + C_{n,1}.1^{n-1}.1^1 + C_{n,2}.1^{n-2}.1^2 + ... + C_{n,n}.1^{n-n}.1^n$. Portanto, a quantidade exata de subconjuntos de A é $C_{n,0} + C_{n,1} + C_{n,2} + ... + C_{n,n} = (1 + 1)^n = 2^n$.

Denomina-se **subconjunto próprio** de A qualquer subconjunto X de A, tal que:

$$X \neq \phi \text{ e } X \neq A$$

Quando um subconjunto não é próprio é dito **impróprio** ou **trivial** (são os subconjuntos óbvios, de qualquer conjunto A: ϕ e A).

Obs.: Alguns autores definem subconjunto próprio de A como qualquer subconjunto de A, que não o mesmo (ou seja, admitem a possibilidade de o conjunto vazio ser próprio). Outros insistem numa diferenciação entre os conceitos de subconjuntos impróprios e o de **subconjuntos triviais**. Isto não será feito aqui, mas deve sempre ser deixado claro por quem o utiliza.

Denomina-se **conjunto das partes** de um conjunto A o conjunto de todos os subconjuntos (ou partes) de A. É representado por $\wp(A)$. Assim, se $A = \{a, b, c\}$, tem-se $\wp(A) = \{\phi, \{a\}, \{b\}, \{c\}, \{a,b\}, \{a,c\}, \{b,c\}, A\}$. Note-se que nunca $\wp(A)$ é vazio, já que sempre possui, pelo menos, ϕ como elemento.

1.5. IGUALDADE ENTRE CONJUNTOS

Por definição, dois conjuntos são iguais quando possuírem os mesmos elementos. Assim, equivalentemente, ocorre igualdade entre dois conjuntos quando todo elemento do primeiro for também elemento do segundo e, reciprocamente, qualquer elemento do segundo pertencer da mesma forma ao primeiro.

Noutras palavras, pode-se garantir que dois conjuntos são iguais quando:

- O primeiro estiver contido no segundo ("todo elemento do primeiro for também elemento do segundo") e
- O segundo estiver contido no primeiro ("qualquer elemento do segundo pertencer da mesma forma ao primeiro").

Em símbolos:

$$A = B \Leftrightarrow A \subset B \text{ e } B \subset A$$

(Propriedade Anti-Simétrica da Inclusão de Conjuntos)

É exatamente devido a essa definição que nem a **ordem** e nem a **repetição** dos elementos diferencia conjuntos. Exs.:

a) Sejam os conjuntos X o conjunto das letras da palavra AMOR, Y o conjunto das letras da palavra ROMA, Z o conjunto das letras da palavra AMORAS e W o conjunto das letras da palavra MARASMO. Desse modo são válidas, dentre outras, as seguintes relações:

$X \subset Y$; $Y \subset X$; $X = Y$ (a *ordem* das letras não distingue os conjuntos X e Y).

$X \subset Z$; $Z \not\subset X$ (pois $S \in Z$, mas $S \notin X$). Logo, $X \neq Z$.

$Z \subset W$; $W \subset Z$; $Z = W$ (nem *ordem* nem *repetição* dos elementos interessa diretamente em linguagem de conjuntos).

b) Suponha-se a pergunta: quantos elementos tem o conjunto A em que os cinco primeiros números inteiros positivos são escritos uma quantidade de vezes igual ao seu valor absoluto?

De acordo com a definição de A, pode-se afirmar que:

$A = \{1, 2, 2, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4, 5, 5, 5, 5, 5\}$.

Entretanto, pela definição de igualdade de conjuntos, é fácil ver que:

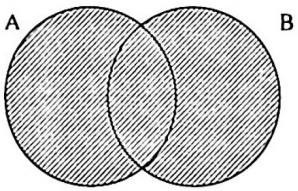
$A = \{1, 2, 3\}$ e, portanto, tem 3 elementos.

1.6. OPERAÇÕES ENTRE CONJUNTOS

1.6.1. UNIÃO (ou REUNIÃO)

Dados dois conjuntos quaisquer A e B, chama-se de união de A com B ao conjunto representado por $A \cup B$ que consiste em todos os elementos que pertencem a A ou a B, podendo pertencer a ambos. Formalmente:

$$A \cup B = \{x \mid x \in A \text{ ou } x \in B\}$$



Convém ressaltar que a simbologia **$x \in A$ ou $x \in B$** exige que **pelo menos** uma das duas afirmações, a saber, $x \in A$, $x \in B$, seja verdadeira, podendo ser, eventualmente, as duas. Embora na linguagem cotidiana seja freqüente a interpretação do conectivo **ou** apenas no sentido *exclusivo*, o seu significado matemático correto é *inclusivo*. Assim, para exemplificar, estão corretas afirmações como: **$2 \leq 5$ ("dois é menor que ou igual a cinco)**; **$7 \geq 7$ ("sete é maior que ou igual a sete")**, apesar de $2 = 5$ e $7 > 7$ serem ambas afirmações falsas. Naturalmente a afirmação $2 \geq 4$ é *falsa*, uma vez que nem $2 > 4$, nem $2 = 4$. Da mesma forma, a sentença **Este ano não é bissexto ou é 2005** é verdadeira, ainda que ambas as afirmações sejam verdadeiras (inclusão). Exs.:

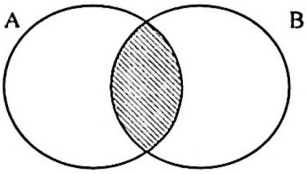
a) Sejam $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$. Então $A \cup B = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

b) Sendo $P = \{p \in N \mid p \text{ é par}\}$ e $I = \{i \in N \mid i = 2k + 1, k \in N\}$, tem-se que $P \cup I = N$.

1.6.2. INTERSEÇÃO (ou INTERSECÇÃO)

A interseção entre A e B ($A \cap B$) é o conjunto dos elementos que pertencem a A e a B (simultaneamente). Matematicamente:

$$A \cap B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \in B\}$$



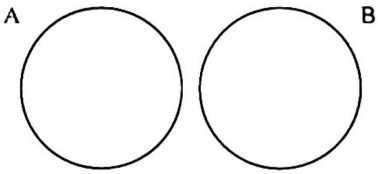
Exemplos:

a) Se $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$, conclui-se que $A \cap B = \{3\}$.

b) Sendo $X = \{x \in N \mid x \text{ é múltiplo de } 12\}$ e $Y = \{y \in N \mid y \text{ é múltiplo de } 10\}$, tem-se que $X \cap Y = \{x \in N \mid x \text{ é múltiplo de } 60\}$.

c) Supondo P o conjunto dos números primos e C o conjunto dos números compostos, tem-se que $P \cap C = \phi$, pois não há inteiros que sejam primos e compostos, *ao mesmo tempo*.

Quando dois conjuntos têm interseção vazia são chamados de **disjuntos**.



ALGUMAS PROPRIEDADES DA UNIÃO E DA INTERSEÇÃO

Quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C são válidos os seguintes resultados.

I. IDEMPOTÊNCIA

$$A \cup A = A; \; A \cap A = A.$$

II. COMUTATIVIDADE

$$A \cup B = B \cup A; \; A \cap B = B \cap A.$$

III. ASSOCIATIVIDADE

$$(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C);$$
$$(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C).$$

IV. DISTRIBUTIVIDADE

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C);$$
$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C).$$

V. EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO

$$A \cup \phi = A;\ A \cap U = A.$$

VI. EXISTÊNCIA DO ELEMENTO ABSORVENTE

$$A \cup U = U;\ A \cap \phi = \phi.$$

VII. $A \subset A \cup B$ e $A \cap B \subset B$.

VIII. Se $A \subset B$, então $A \cup B = B$ e $A \cap B = A$.

As demonstrações das sete primeiras propriedades acima (ou as idéias nelas envolvidas) serão melhor esclarecidas num momento posterior (em Lógica), embora seja possível aplicar os conceitos explanados até o momento. De um modo geral, uma ferramenta muito útil para provar que dois conjuntos são iguais consiste em usar a propriedade anti-simétrica da inclusão de conjuntos.

Por exemplo, para provar, em IV, que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$, pode-se proceder do seguinte modo: Seja x um elemento qualquer de $A \cup (B \cap C)$. Então, por definição de união, $x \in A$ ou $x \in B \cap C$. Pela definição de interseção, pode-se escrever então que $x \in A$ ou $x \in B$ e $x \in C$. Dessa maneira, é possível afirmar que, ao mesmo tempo, $x \in A$ ou $x \in B$ e $x \in A$ ou $x \in C$, isto é, que $x \in (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Logo, qualquer elemento de $A \cup (B \cap C)$ é também um elemento de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$, ou seja, $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$. Paralelamente, seja y um elemento qualquer de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$. Tem-se, por definição de interseção, que $y \in A \cup B$ e que $y \in A \cup C$. Pela definição de união, pode-se escrever que $y \in A$ ou $y \in B$, ao mesmo tempo em que $y \in A$ ou $y \in C$. Em particular para evitar "redundâncias"), basta dizer que $y \in A$ ou $y \in B$ e $y \in C$. Daí, pode-se garantir que y é um elemento de $A \cup (B \cap C)$. Conseqüentemente, qualquer elemento de $(A \cup B) \cap (A \cup C)$ também deve estar em $A \cup (B \cap C)$. Noutros termos, $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$. Finalmente, já que $A \cup (B \cap C) \subset (A \cup B) \cap (A \cup C)$ e $(A \cup B) \cap (A \cup C) \subset A \cup (B \cap C)$, conclui-se que $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$.

Como se pode verificar na demonstração acima, as técnicas envolvidas são simplesmente manipulações convenientes das palavras e das orações. Às vezes, por exemplo, escrever coisas redundantes ou óbvias é útil. Noutras, procura-se eliminar tais excessos. Por exemplo, na demonstração precedente, afirma-se que a sentença "$y \in A$ ou $y \in B$, ao mesmo tempo em que $y \in A$ ou $y \in C$" pode ser substituída por "$y \in A$ ou $y \in B$ e $y \in C$". Outro exemplo é poder escrever, equivalentemente, que "$x \in A$ e $x \in B$" ou que "$x \in B$ e $x \in A$". Ou ainda, dizer que "$x \in A$" é a mesma coisa que dizer (de modo "prolixo", mas eventualmente útil) "$x \in A$ ou $x \in A$", ou ainda "$x \in A$ e $x \in A$". Depende da conveniência (e, obviamente, de muita prática para perceber). As regras matemáticas formais de manipulação como as acima serão vistas em Lógica Matemática, a qual pode ser entendida como um modo de "pensar, escrever e falar matematicamente".

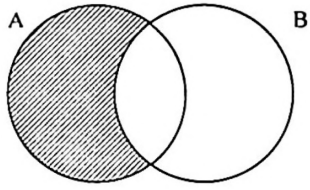
O raciocínio empregado na demonstração de última propriedade é análogo. Suponha-se que A seja uma parte de B. Para provar que $A \cup B = B$, a técnica será, novamente, a anti-simetria. Se $x \in A \cup B$, por definição tem-se que $x \in A$ ou $x \in B$. Como, por hipótese, $A \subset B$, conclui-se que $x \in B$ ou $x \in B$, ou, mais simplesmente, que $x \in B$. Daí, todo elemento de $A \cup B$ (na hipótese de $A \subset B$) também deve ser um elemento de B, isto é, $A \cup B \subset B$. Seja, agora, um elemento b qualquer de B. Então a afirmação $b \in A$ ou $b \in B$ é verdadeira, mesmo que b não esteja em A (uma vez que a definição de reunião de dois conjuntos não exige que um elemento da união esteja em ambos os conjuntos – basta pertencer a um deles). Portanto, $b \in A \cup B$. Ou seja, todo elemento de B também é elemento de $A \cup B$: $B \subset A \cup B$. Logo, caso $A \subset B$, deve-se ter $A \cup B = B$. Note-se que, mesmo que A não seja um subconjunto de B, continua valendo $B \subset A \cup B$, pois esse resultado independe da hipótese adotada.

A demonstração de que, na mesma hipótese, $A \cap B = A$ é análoga e fica como exercício.

1.6.3. DIFERENÇA

Dados os conjuntos quaisquer A e B, a diferença entre A e B consiste no conjunto dos elementos de A que não são elementos de B, ou seja, aqueles elementos que estão, apenas, em A. Em símbolos:

$$A - B = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin B\}$$



Exemplos:

a) Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{3, 4, 5, 6\}$, conclui-se que $A - B = \{1, 2\}$ e que $B - A = \{4, 5, 6\}$. Note-se que $A - B \neq B - A$, e, portanto, **a diferença não é comutativa**, de um modo geral.

b) Tomando $X = \{x \in N \mid x \text{ é divisor de } 12\}$ e $Y = \{y \in N \mid y \text{ é divisor de } 20\}$, conclui-se que $X - Y = \{3, 6, 12\}$ e $Y - X = \{5, 10, 15, 20\}$.

c) Sendo M_n o conjunto dos múltiplos do inteiro n, pode-se garantir que $M_5 - M_{10}$ é o conjunto dos inteiros terminados em 5. Já $M_{10} - M_5 = \phi$, uma vez que *é impossível* encontrar um múltiplo de 10 que não seja múltiplo de 5.

d) Supondo P o conjunto dos números pares e I o conjunto dos números ímpares, tem-se que $P - I = P$, pois todos os números pares não são ímpares. Analogamente, $I - P = I$.

ALGUMAS PROPRIEDADES DA DIFERENÇA

Para quaisquer que sejam os conjuntos A e B são válidas as seguintes propriedades.

I. $A - A = \phi$.

II. $A - \phi = A$ **(ELEMENTO NEUTRO).**

III. $A - (A \cap B) = A - B$.

IV. **Se $A - B = \phi$, então $A \subset B$, e vice-versa, isto é, se $A \subset B$, então $A - B = \phi$.** Formalmente: $A - B = \phi$ se, e somente se, $A \subset B$, ou ainda, $A - B = \phi \Leftrightarrow A \subset B$.

DEMONSTRAÇÕES:

I. Basta notar que a afirmação $x \in A$ e $x \notin A$ é *sempre falsa*, o que define o conjunto vazio. Ou seja: $A - A = \{x \mid x \in A \text{ e } x \notin A\} = \phi$. Note-se que não é interessante utilizar a anti-simetria (pelo menos por enquanto – sem Lógica), visto que o conjunto vazio não tem elemento.

II. Suponha-se que $x \in A - \phi$. Então, por definição, $x \in A$ e $x \notin \phi$. Particularmente, $x \in A$. Logo, $A - \phi \subset A$ (de uma forma bem mais geral, é fácil ver que $A - B \subset A$, *qualquer que seja o conjunto B*). Inversamente, suponha-se que $x \in A$. A idéia é que a afirmação "$x \notin \phi$" é auto-evidente (óbvia), podendo ser considerado uma espécie de redundância. Isto significa que a sentença "$x \in A$" (sem dúvida, mais simples) pode ser re-escrita "$x \in A$ e $x \notin \phi$" (mais "prolixa", no entanto, particularmente útil). De fato, qualquer que seja o elemento x, pode-se **sempre** afirmar que $x \notin \phi$. Portanto, $A \subset A - \phi$. Assim, $A - \phi = A$.

III. Suponha-se que $x \in A - (A \cap B)$. Então, $x \in A$ e $x \notin A \cap B$. Como x deve ser um elemento de A, mas não de $A \cap B$, tem-se que $x \notin B$. Assim, $x \in A$ e $x \notin B$, ou seja, $x \in A - B$, do que $A - (A \cap B) \subset A - B$. Agora, suponha-se que $x \in A - B$. Então, $x \in A$ e $x \notin B$. Se x não é elemento de B,

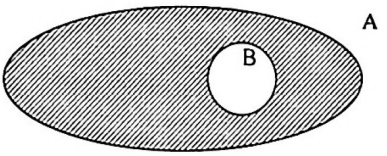
tampouco pode ser elemento de $A \cap B$, embora seja elemento de A. Portanto, $x \in A$ e $x \notin A \cap B$, ou equivalentemente $x \in A - (A \cap B)$. Daí, $A - B \subset A - (A \cap B)$, e, finalmente, $A - (A \cap B) = A - B$.

IV. Supondo que $A \subset B$, é trivial que $A - B = \phi$, visto que não há elemento de A que não esteja em B (se A é subconjunto de B, todo elemento de a é também elemento de B, por definição). Assim: $A \subset B \Rightarrow A - B = \phi$.
Suponha-se, agora, que $A - B = \phi$. Sendo $a \in A$, caso $a \notin B$, ocorreria $a \in A - B$, ou seja, $a \in \phi$, o que é um absurdo. Portanto, a deve pertencer a B, de que $A \subset B$. Ou seja, $A - B = \phi \Rightarrow A \subset B$.
Logo, $A - B = \phi \Leftrightarrow A \subset B$.

1.6.4. COMPLEMENTAÇÃO

Sejam A e B dois conjuntos quaisquer **satisfazendo a relação $B \subset A$**. Denomina-se complementar de B em (relação a) A o conjunto dos elementos "que se devem acrescentar a B para que ele se transforme em A". Em termos mais precisos, o complementar de B em A, representado pelos símbolos C_A^B ou $C_A(B)$, está definido **somente** quando $B \subset A$, e, nesse caso, será igual a

$$\boxed{C_A^B = A - B}$$



Exemplos:

a) Sendo $A = \{1, 2, 3, ..., 9\}$ e $B = \{2, 3, 4\}$, é fácil ver que $B \subset A$ e, assim, tem-se que $C_A^B = A - B = \{1, 5, 6, 7, 8, 9\}$.

b) Sejam $X = \{5, 7, 9\}$ e $Y = \{y \in N \mid y \text{ é ímpar menor que } 10\}$. Como $X \subset Y$, faz sentido falar em C_Y^X, sendo este conjunto igual a $Y - X = \{1, 3\}$. **Não está definido**, entretanto, o conjunto $C_X(Y)$, uma vez que $Y \not\subset X$.

c) Considerando os conjuntos P dos números primos e Y do exemplo anterior, nota-se que **não existe** o conjunto complementar de Y em P, uma vez que 1 e 9 são elementos de Y mas não de P e, deste modo, $Y \not\subset P$.

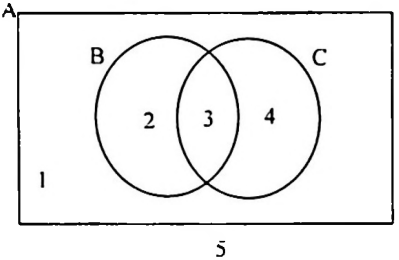
ALGUMAS PROPRIEDADES DA COMPLEMENTAÇÃO

Supondo que os conjuntos A, B, C satisfaçam as condições $B \subset A$ e $C \subset A$ são válidas as seguintes propriedades.

I. $C_A(A) = A - A = \phi$.
II. $C_A(\phi) = A - \phi = A$.
III. $C_A(C_A(B)) = B$.
IV. $B \subset C \Leftrightarrow C_A(C) \subset C_A(B)$.
V. $B \cup C_A(B) = A$; $B \cap C_A(B) = \phi$.
VI. $C_A(B \cup C) = C_A(B) \cap C_A(C)$.
VII. $C_A(B \cap C) = C_A(B) \cup C_A(C)$.
VIII. $B - C = B \cap C_A(C)$.

As duas últimas propriedades são muito importantes e recebem o nome de **relações (ou leis) de De Morgan**, em homenagem ao matemático Augustus De Morgan.

Para ilustrá-las (mas ainda não *demonstrá*-las), considere-se o seguinte esquema, em que os conjuntos dividem o plano do papel em 5 regiões (conjuntos), numeradas de 1 a 5: 1 = A – (B ∪ C); 2 = B – C; 3 = B ∩ C; 4 = C – B; 5 = U – A.



Dessa maneira, é fácil notar que:
$B = 2 \cup 3$; $C_A(B) = 1 \cup 4$; $C = 3 \cup 4$; $C_A(C) = 1 \cup 2$.
$B \cup C = 2 \cup 3 \cup 4$; $C_A(B \cup C) = 1$; $C_A(B \cap C) = 1 \cup 2 \cup 4$;
Daí: $C_A(B \cup C) = C_A(B) \cap C_A(C)$ e $C_A(B \cap C) = C_A(B) \cup C_A(C)$.
Agora, as justificativas formais.

DEMONSTRAÇÕES: (I e II já foram provadas acima)

III. $x \in C_A(C_A(B)) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \notin C_A(B) \Leftrightarrow x \in A$ e $x \in B \Leftrightarrow x \in A \cap B \Leftrightarrow x \in B$ (lembrando que $B \subset A$).

IV. Inicialmente, suponha-se que $B \subset C$. Seja $x \in C_A(C)$. Por definição, tem-se $x \in A$ e $x \notin C$. Já que $x \notin C$, não é possível que x seja membro de B (pois $B \subset C$). Logo, $x \in A$ e $x \notin B$, isto é, $x \in C_A(B)$. Daí: $B \subset C \Rightarrow C_A(C) \subset C_A(B)$. Seja, agora, $C_A(C) \subset C_A(B)$. De acordo com o resultado que acabou de ser provado (a ida): $C_A(C_A(B)) \subset C_A(C_A(C))$. Finalmente, utilizando o item anterior, conclui-se que $B \subset C$, o que encerra a demonstração.

V. Como $B \subset A$ e $C_A(B) = A - B \subset A$, tem-se, trivialmente, que $B \cup C_A(B) \subset A$. Seja agora x um elemento qualquer de A. Exatamente uma das duas afirmações deve ser verdadeira: $x \in B$ ou $x \notin B$. Pode-se garantir então que: $x \in A \Rightarrow x \in B$ ou $x \notin B \Leftrightarrow x \in B$ ou $x \in C_A(B) \Leftrightarrow x \in B \cup C_A(B)$. Logo, $A \subset B \cup C_A(B)$, o que conclui o argumento. E já que é impossível a existência de algum elemento x, para o qual $x \in B$ e $x \notin B \Leftrightarrow x \in B \cap C_A(B)$, deve-se ter $B \cap C_A(B) = \phi$.

VI. A princípio, como se sabe, $B \subset B \cup C$. Pela propriedade precedente, $C_A(B \cup C) \subset C_A(B)$. Analogamente, já que $C \subset B \cup C$, tem-se $C_A(B \cup C) \subset C_A(C)$. Desse modo, $C_A(B \cup C) \subset C_A(B) \cap C_A(C)$. Para simplificar, seja $X = C_A(B) \cap C_A(C)$. Então, $X \subset C_A(B)$ (bem como $X \subset C_A(C)$). De fato, para quaisquer conjuntos M e N, sabe-se que $M \cap N \subset M$. Portanto, aplicando a propriedade IV à relação $X \subset C_A(B)$, tem-se $C_A(C_A(B)) \subset C_A(X)$. Pela propriedade III, conclui-se $B \subset C_A(X)$. De modo inteiramente análogo, conclui-se que $C \subset C_A(X)$. Assim, $B \cup C \subset C_A(X)$. Novamente aplicando a propriedade IV a essa última relação, chega-se a $C_A(B \cup C) \subset C_A(C_A(X))$, do que: $C_A(B \cup C) \subset X = C_A(B) \cap C_A(C)$. Das relações em negrito, tem-se que $C_A(B \cup C) = C_A(B) \cap C_A(C)$.

VII. A demonstração é análoga à anterior e fica como um bom exercício.

VIII. $B - C = \{x \in A : x \in B$ e $x \notin C\} = \{x : x \in A$ e $x \in B$ e $x \notin C\} = \{x : x \in B$ e $(x \in A$ e $x \notin C)\} = \{x : x \in B$ e $x \in C_A(C)\} = B \cap C_A(C)$.

Finalmente, convém ressaltar que, quando o conjunto A for o *universo*, o complementar de B em relação a A sempre estará definido (pois qualquer conjunto é parte do universo), por isso, é freqüente dar-lhe uma notação especial: em geral, B^c, B' ou $\overline{B}$. Nesse caso, há uma definição especial, notando que $x \in U$ é sempre verdade, o que torna essa afirmação "redundante". Assim:

$$\boxed{C_U^B = \overline{B} = \{x | x \in U \text{ e } x \notin B\} = \{x | x \notin B\}}$$

Esta definição é importante, uma vez que torna possível substituir *o conjunto dos elementos que não pertencem* a um determinado conjunto X por $\overline{X}$. Além disso, as propriedades ficam mais fáceis de visualizar. As relações de de Morgan, por exemplo, ficam

$$\boxed{\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B} \quad \text{e} \quad \overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}} \ ,$$

explicitando que a complementação transforma união em interseção e vice-versa. Outro resultado importante é a propriedade VIII anterior, que agora fica:

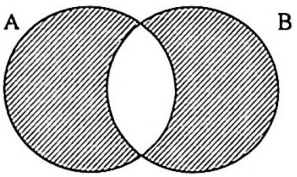
$$\boxed{A - B = A \cap \overline{B}}$$

Portanto, a diferença entre conjuntos quaisquer pode ser encarada como uma interseção, o que permite utilizar suas propriedades.

1.6.5. DIFERENÇA SIMÉTRICA

Dados os conjuntos A e B *quaisquer*, denomina-se diferença simétrica entre eles o conjunto $A \Delta B$, definido por:

$$\boxed{A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)}$$



Exemplos:

a) Sendo $A = \{1, 2, 3\}$ e $B = \{2, 3, 4, 5\}$, tem-se $A \Delta B = \{1, 4, 5\}$.

b) Considerando X como o conjunto dos alunos do Convênio Militar que desejam prestar o concurso para o ITA e Y como o conjunto dos alunos do Convênio Militar que desejam prestar o concurso para o IME, tem-se $X \Delta Y$ sendo o conjunto dos alunos do Convênio Militar que desejam prestar o ITA, mas não o IME, bem como dos alunos da mesma turma que querem concorrer a uma vaga para o IME, mas não para o ITA. Intuitivamente, nota-se que $X \Delta Y$ pode também ser visto como o conjunto dos alunos que querem fazer o vestibular do ITA ou do IME, *mas não para os dois simultaneamente*.

Conforme discutido anteriormente (ver item 6.1), o conectivo **ou** em Matemática possui um sentido **inclusivo**, permitindo que as proposições ligadas por ele sejam simultaneamente verdadeiras. É por isso, por exemplo, que sempre $A \cap B \subset A \cup B$. Na linguagem comum, porém, o mesmo conectivo é quase sempre entendido como de sentido **exclusivo**. Assim, quando se diz que "Márcio é professor ou estudante", comumente exclui-se a possibilidade (matematicamente aceitável) de o referido indivíduo ser tanto professor quanto estudante.

Para utilizar o sentido exclusivo do "ou", aplica-se a duplicidade em Matemática, isto é, usa-se "**ou ... ou**". Desse modo, quando se deseja excluir a simultaneidade, diz-se, por exemplo, que "**ou**

Márcio é professor **ou** é estudante", significando que não se leva em consideração que Márcio seja estudante e professor.

A diferença simétrica nada mais é do que uma formalização dos fatos citados. Dizer que um elemento x pertence à diferença simétrica entre os conjuntos A e B significa que *ou* $x \in A$ *ou* $x \in B$. Ou seja: $x \in A \Delta B \Leftrightarrow$ **ou** $x \in A$ **ou** $x \in B$.

ALGUMAS PROPRIEDADES DA DIFERENÇA SIMÉTRICA

Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Valem então as seguintes propriedades.

I. $A \Delta B = B \Delta A$ (COMUTATIVIDADE).
II. $A \Delta A = \phi$.
III. $A \Delta \phi = A$ (ELEMENTO NEUTRO).
IV. $A \Delta B = (A \cup B) - (A \cap B)$.

As demonstrações dessas propriedades (com exceção da última) são conseqüências diretas da definição e das propriedades das operações já vistas até o momento. De fato:
$A \Delta A = (A - A) \cup (A - A) = \phi \cup \phi = \phi$; $A \Delta \phi = (A - \phi) \cup (A - \phi) = A \cup A = A$; $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (B - A) \cup (A - B) = B \Delta A$.

Já para demonstrar a última, um caminho é aplicar uma quantidade maior de propriedades anteriores: $A - B = A \cap \overline{B}$; distributividade da união em relação à interseção, e vice-versa; neutralidade do universo na união; $B \cup \overline{B} = U$; $B \cap \overline{B} = \phi$, bem como uma das relações de De Morgan. Trata-se de um bom treino do que foi visto até o momento.

$$A \Delta B = (A - B) \cup (B - A) = (A \cap \overline{B}) \cup (B \cap \overline{A}) = [(A \cap \overline{B}) \cup B] \cap [(A \cap \overline{B}) \cup \overline{A}] =$$
$$[(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup B)] \cap [(A \cup \overline{A}) \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] = [(A \cup B) \cap U] \cap [U \cap (\overline{B} \cup \overline{A})] =$$
$$(A \cup B) \cap (\overline{B} \cup \overline{A}) = (A \cup B) \cap \overline{(A \cap B)} = (A \cup B) - (A \cap B).$$

Naturalmente, é possível também demonstrar essa propriedade aplicando a anti-simetria da inclusão, juntamente com as leis do pensamento regradas pelas propriedades já conhecidas (como "eliminação de redundâncias", uso correto de "ou" e de "e", etc.).

1.7. CARDINALIDADE DA UNIÃO DE CONJUNTOS – PRINCÍPIO DA INCLUSÃO-EXCLUSÃO

Chama-se *cardinalidade* de um conjunto *finito* A o *número de elementos* desse conjunto, sendo representada usualmente por um dos símbolos a seguir.

$$n(A);\ n_A;\ \#A;\ \text{card } A$$

Por definição, o conjunto *vazio* possui cardinalidade *zero*.

O princípio básico da determinação do número de elementos da união de dois ou mais conjuntos é o seguinte: *se dois conjuntos são disjuntos, o número de elementos da união dos dois é, simplesmente, a soma dos números de elementos de cada conjunto.*

$$\boxed{A \cap B = \phi \Rightarrow n(A \cup B) = n(A) + n(B)}$$

A partir daí, é possível provar que, sendo A e B conjuntos quaisquer:

$$\boxed{n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)}$$

DEMONSTRAÇÃO:

Inicialmente, note-se que $(A - B) \cap B = (A \cap B^C) \cap B = A \cap (B^C \cap B) = A \cap \phi = \phi$. Assim, os conjuntos A – B e B são disjuntos, e: $n[(A - B) \cup B] = n(A - B) + n(B)$ (I).

Mas, $(A - B) \cup B = (A \cap B^C) \cup B = (A \cup B) \cap (B^C \cup B) = (A \cup B) \cup U = A \cup B$ (II). Além disso, é fácil verificar (prove!) que A – B e A ∩ B são disjuntos, bem como $(A - B) \cup (A \cap B) = A$ (mostre isso, também!). Assim, novamente pelo princípio básico tem-se: $n[(A - B) \cup (A \cap B)] = n(A - B) + n(A \cap B)$. Logo: $n(A - B) = n(A) - n(A \cap B)$ (III).

Finalmente, substituindo os resultados (II) e (III) em (I), vem:

$n(A \cup B) = [n(A) - n(A \cap B)] + n(B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$.

Trabalhando com três conjuntos finitos principais, tem-se que:

$$n(A \cup B \cup C) = n(A) + n(B) + n(C) - n(A \cap B) - n(A \cap C) - n(B \cap C) + n(A \cap B \cap C)$$

DEMONSTRAÇÃO:

Aplicando o resultado anterior, tem-se que:

$n(A \cup B \cup C) = n[(A \cup B) \cup C] = n(A \cup B) + n(C) - n[(A \cup B) \cap C]$ (I).

Sabe-se que:

$n(A \cup B) = n(A) + n(B) - n(A \cap B)$ (II).

$n[(A \cup B) \cap C] = n[(A \cap C) \cup (B \cap C)] = n(A \cap C) + n(B \cap C) - n[(A \cap C) \cap (B \cap C)] = n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)$ (III). Substituindo (II) e (III) em (I), conclui-se que: $n(A \cup B \cup C) = [n(A) + n(B) - n(A \cap B)] + n(C) - [n(A \cap C) + n(B \cap C) - n(A \cap B \cap C)]$, de que se tira o resultado.

Utilizando recursivamente os raciocínios anteriores, é possível mostrar (usando o *princípio de indução finita*) a validade do seguinte resultado, conhecido como **princípio da inclusão-exclusão**: o número de elementos da união de uma quantidade finita de conjuntos finitos é igual à *soma* das cardinalidades de cada conjunto *individualmente*, *diminuída* da soma das cardinalidades das interseções dos conjuntos *tomados dois a dois*, *acrescida* da soma das cardinalidades das interseções dos conjuntos *tomados três a três*, e assim sucessivamente, alternando-se os sinais das somas conforme se aumenta o total de conjuntos nas interseções, até obter ± a cardinalidade da interseção de *todos* os conjuntos, conforme a paridade do número de conjuntos envolvidos.

Desse modo, para quatro conjuntos, A_1, A_2, A_3 e A_4, por exemplo, tem-se:

$$n(A_1 \cup A_2 \cup A_3 \cup A_4) = n(A_1) + n(A_2) + n(A_3) + n(A_4) - [n(A_1 \cap A_2) + n(A_1 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3) + n(A_2 \cap A_4) + n(A_3 \cap A_4)] + n(A_1 \cap A_2 \cap A_3) + n(A_1 \cap A_2 \cap A_4) + n(A_1 \cap A_3 \cap A_4) + n(A_2 \cap A_3 \cap A_4) - n(A_1 \cap A_2 \cap A_3 \cap A_4).$$

Também é possível demonstrar o princípio da inclusão-exclusão via métodos combinatórios, utilizando binômio de Newton juntamente com contagem, por exemplo.

1.8. PAR ORDENADO

Conforme visto anteriormente, a ordem dos elementos em um conjunto não é relevante. Entretanto, em algumas situações, a noção de ordem relativa entre entes é fundamental. Por exemplo, considere-se o problema de resolver o sistema abaixo.

$\begin{cases} x + y = 5 \\ x - y = 1 \end{cases}$, em que se deve ter x = 3 e y = 2. Ao serem perguntadas sobre o *conjunto solução* do sistema, algumas pessoas respondem S = {3, 2}. Porém, sabe-se que {3, 2} = {2, 3}, mas, apesar de 2 + 3 = 5, 2 – 3 ≠ 1, isto é, S não é o conjunto solução do sistema. Por quê? Onde está o erro? O engano consiste em utilizar somente a linguagem de conjuntos ("desordenados") para descrever algo que necessita de ordenação. Situações como essa justificam a introdução de conceitos como o de par ordenado.

Apesar de não ser uma definição matemática formal, denominar-se-á par ordenado a um novo ente (objeto matemático) do tipo (x, y), composto por dois outros entes (em geral, números), de modo que a ordem entre eles é relevante: definiu-se um *primeiro termo*, x, que recebe o nome de **abscissa** do par ordenado, assim como um *segundo termo*, y, denominado **ordenada** do par. Tal ordem será caracterizada pela relação fundamental:

$$\boxed{(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d}$$

Isto significa que dois pares ordenados serão iguais somente no caso em que suas abscissas e ordenadas forem respectivamente iguais.

A tempo, a solução do sistema é **S = {(3, 2)}**.

Obs.: É possível definir ternas ordenadas, quádruplas ordenadas, e assim, por diante, conforme se ponham em ordem 3, 4 ou mais elementos. A idéia é estender a propriedade básica da seguinte forma:

$$(a_1, a_2, ..., a_i, ..., a_n) = (b_1, b_2, ..., b_i, ..., b_n) \Leftrightarrow a_i = b_i, \forall\, i \in \{1, 2, ..., n\}$$

Tais entes, constituídos por n objetos, são genericamente denominados *n-uplas ordenadas* ou *seqüências* (ou ainda *sucessões*) com n elementos.

1.9. PRODUTO CARTESIANO

Trata-se de mais uma operação importante entre dois conjuntos A e B. Chama-se de **produto cartesiano de A com B (A x B)** o conjunto dos pares ordenados que têm abscissas em A e ordenadas em B. Formalmente:

$$\boxed{A \times B = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B\}}$$

Exemplos:

a) Sendo A = {1, 2} e B = {3, 4}, tem-se que:
A x B = {(1, 3), (1, 4), (2, 3), (2, 4)} e B x A = {(3, 1), (3, 2), (4, 1), (4, 2)}.
Note-se que **A x B ≠ B x A**, isto é, o produto cartesiano já **não é comutativo**, de um modo geral.

b) Se M = {a, b, c}, então:
$M \times M = M^2 = \{(a,a), (a, b), (a, c), (b, a), (b, b), (b, c), (c, a), (c, b), (c, c)\}$.

ALGUMAS PROPRIEDADES DO PRODUTO CARTESIANO

I. Se A = ϕ ou B = ϕ, então A x B = B x A = ϕ.

DEMONSTRAÇÃO:

De fato, supondo A vazio, não se pode formar par ordenado algum que possua algum elemento de A como abscissa (ou ordenada). Idem para $B = \phi$.

II. $A \times B = \phi$ somente quando $A = \phi$ ou $B = \phi$.

DEMONSTRAÇÃO:

Com efeito, caso ocorressem $A \neq \phi$ e $B \neq \phi$ (note-se De Morgan negando, por absurdo, a tese), poderiam ser escolhidos elementos $a \in A$ e $b \in B$, de modo que (pelo menos) o par ordenado (a, b) pertenceria ao produto $A \times B = \phi$, o que é obviamente um absurdo. Assim, deve-se ter $A = \phi$ ou $B = \phi$.

III. Supondo A e B ***não vazios***, a comutatividade ($A \times B = B \times A$) ocorre se, e somente se, $A = B$.

DEMONSTRAÇÃO:

Se $A = B$, é trivial que $A \times B = B \times A = A^2$ (mesmo que ambos sejam vazios). Suponha-se agora que $A \times B = B \times A$, com A e B não vazios. Tomando um elemento qualquer $a \in A$ e um outro $b \in B$, nota-se que o par ordenado $(a, b) \in A \times B$. Por hipótese, esse mesmo par pertence também ao produto $B \times A$. Logo, $a \in B$ e $b \in A$. Dessa forma, $A \subset B$ e $B \subset A$, ou seja, $A = B$.

IV. Sendo A e B conjuntos *finitos*, tem-se que $n(A \times B) = n(A).n(B)$.

DEMONSTRAÇÃO:

Se A ou B é vazio (ou seja, $n(A) = 0$ ou $n(B) = 0$), tem-se trivialmente que: $n(A \times B) = n(\phi) = 0 = n(A).n(B)$. Caso $A \neq \phi$ e $B \neq \phi$, formar um elemento qualquer do produto cartesiano $A \times B$ consiste em tomar duas decisões consecutivas:
Decisão 1: escolher a abscissa do par, o que pode ser feito de $n(A)$ modos.
Decisão 2: escolher a ordenada do par, o que pode ser feito de $n(B)$ modos.
Assim, pelo princípio multiplicativo, há um total de $n(A).n(B)$ pares ordenados como elementos de $A \times B$.
Obs.: É imediato que, sob mesma hipótese, $n(B \times A) = n(B).n(A) = n(A).n(B)$, ou seja, $n(B \times A) = n(A \times B)$, muito embora $A \times B$ não seja necessariamente igual a $B \times A$.

V. $A \times (B \cup C) = (A \times B) \cup (A \times C)$, quaisquer que sejam os conjuntos A, B e C. (Distributividade do produto cartesiano em relação à união de conjuntos)

DEMONSTRAÇÃO:

$(A \times B) \cup (A \times C) = \{(x, y) \mid (x, y) \in A \times B \text{ ou } (x, y) \in A \times C\} = \{(x, y) \mid (x \in A \text{ e } y \in B) \text{ ou } (x \in A \text{ e } y \in C)\} = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } (y \in B \text{ ou } y \in C)\} = \{(x, y) \mid x \in A \text{ e } y \in B \cup C\} = A \times (B \cup C)$.

Note-se como a sentença "$x \in A$ e $y \in B$ ou $x \in A$ e $y \in C$" transforma-se na sentença (mais simples) "$x \in A$ e $y \in B \cup C$". Com bastante prática (e com alguma ajuda das propriedades da Lógica Matemática), fica mais fácil perceber tais "mágicas". Perceba-se, também, que partindo do outro membro da igualdade a demonstração ficaria menos "natural" (mais difícil mesmo), já que seria necessário, por exemplo, transmutar "$x \in A$" em "$x \in A$ ou $x \in A$", similar a vislumbrar um conjunto A como $A \cup A$. É conveniente verificar isso.

VI. $A \times (B \cap C) = (A \times B) \cap (A \times C)$, para todos conjuntos A, B e C. (Distributividade do produto cartesiano em relação à interseção de conjuntos)

A demonstração é análoga à anterior e fica como um bom exercício.

1.10. PRINCIPAIS CONJUNTOS NUMÉRICOS

1.10.1. CONJUNTO DOS NÚMEROS NATURAIS

$$\mathbf{N = \{0, 1, 2, 3, ...\}}$$

OPERAÇÕES BEM DEFINIDAS

Adição e *multiplicação* (ambas com a propriedade fundamental de **fechamento**, isto é, a soma e o produto de dois números naturais são, ainda, números naturais).

Note-se que, apesar de ser possível subtrair ou dividir números naturais, não é possível garantir que os resultados ainda sejam naturais. Diz-se que tais operações não estão bem definidas em N (ou, ainda, que não são fechadas em N).

PROPRIEDADES BÁSICAS

Sejam a e b números naturais quaisquer. A adição e a multiplicação de números naturais têm como propriedades essenciais (além do fechamento) as seguintes:

a) COMUTATIVIDADE: $a + b = b + a$; $a.b = b.a$.

b) ASSOCIATIVIDADE: $(a + b) + c = a + (b + c)$; $(a.b).c = a.(b.c)$.

c) DISTRIBUTIVIDADE DA MULTIPLICAÇÃO EM RELAÇÃO À ADIÇÃO:

$$a.(b + c) = a.b + a.c.$$

d) EXISTÊNCIA DE ELEMENTO NEUTRO: $a + 0 = a$; $a.1 = a$.

1.10.2. CONJUNTO DOS NÚMEROS INTEIROS

$$\mathbf{Z = \{..., -2, -1, 0, 1, 2, ...\}}$$

Note-se que qualquer número natural também é inteiro. Logo, $N \subset Z$.

OPERAÇÕES BEM DEFINIDAS

Além das operações de adição e multiplicação, agora a *subtração* passa a ser fechada em Z.

A quarta operação aritmética fundamental (divisão) ainda não é fechada (nem sempre o quociente entre dois inteiros, com o denominador não nulo, é ainda inteiro).

PROPRIEDADES BÁSICAS

Em Z, as propriedades anteriores para adição e multiplicação continuam válidas. Ressalta-se, adicionalmente, uma nova propriedade, que, em essência, define o próprio conjunto dos inteiros, bem como a operação de subtração em Z.

e) EXISTÊNCIA DE ELEMENTO SIMÉTRICO (INVERSO ADITIVO): qualquer que seja o número inteiro a, existe (um único) inteiro $a^{`}$, tal que:

$$a + a^{`} = 0.$$

Por definição, a subtrair um inteiro b de um inteiro a é somar a ao simétrico de b, ou seja:

$$a - b = a + (-b).$$

Em verdade, tal inteiro não é representado por a', mas sim por – a, sendo chamado de *simétrico do* ou *oposto ao* elemento a.

A partir dessas propriedades básicas, muitas outras podem ser demonstradas. Como exemplos:

I. Para todo inteiro x, – (– x) = x. Com efeito, (– x) + x = 0, logo x é o simétrico de (– x), isto é, – (– x) = x

II. x.0 = 0. De fato: x + x.0 = x.1 + x.0 = x.(1 + 0) = x.1 = x. Assim, já que x + x.0 = x, tem-se que x.0 é o elemento neutro da adição, ou seja, x.0 = 0.

III. x + y = x + z ⇔ y = z (**1ª LEI DO CORTE**). De fato: x + y = x + z ⇔ (– x) + (x + y) = (– x) + (x + z) ⇔ (– x + x) + y = (– x + x) + z ⇔ 0 + y = 0 + z ⇔ y = z.

IV. (**LEI DO ANULAMENTO DO PRODUTO**) O produto de números inteiros (na verdade, de qualquer tipo usual) é nulo se, e somente se, pelo menos um dos fatores for zero. Ou seja, x.y = 0 ⇔ x = 0 ou y = 0. Em verdade, a volta é trivial. Suponha-se, por absurdo, que fossem x ≠ 0 e y ≠ 0. Então, haveria x^{-1} bem como y^{-1}. Multiplicando a igualdade original por tais inversos: $x^{-1}.(x.y).y^{-1} = x^{-1}.0.y^{-1} \Leftrightarrow (x^{-1}.x).(y.y^{-1}) = 0 \Leftrightarrow 1.1 = 0 \Leftrightarrow 1 = 0$, o que é uma contradição. Logo, caso x.y = 0, algum dos números deve ser nulo. Obviamente, o mesmo vale para mais de dois fatores, em número finito.

V. (**REGRA ou JOGO DOS SINAIS**) Inicialmente, note-se que: x.y + x.(– y) = x.1 + x.(– 1) = x.(1+(– 1)) = x.0. Portanto, x.(– y) = – (x.y) (*). Analogamente, é fácil obter o resultado (– x).y = – (x.y) (**). Então, substituindo x por (– x) em (*): (– x).(– y) = – ((– x) y). Agora, devido a (**), obtém-se (– x).(– y) = – ((– x).y) = – (– (x.y)) = x.y.

Obs.: os símbolos X^*, X_+ e X_- significam, respectivamente, que foram excluídos o zero (pelo asterisco), os números negativos (pelo índice +) e os números positivos (por –) do conjunto X. Também podem ser utilizados concomitantemente, como em X_+^*.

1.10.3. CONJUNTO DOS NÚMEROS RACIONAIS

$$Q = \left\{ \frac{p}{q},\ p \in Z \text{ e } q \in Z^* \right\},$$

isto é, o conjunto de todos os números que podem ser vistos como o quociente entre dois inteiros (denominador não nulo).

Note-se que, como para qualquer inteiro a tem-se a = a / 1, todo inteiro é racional, ou seja, $Z \subset Q$. Assim, $N \subset Z \subset Q$.

OPERAÇÕES BEM DEFINIDAS

Juntamente com as anteriores, a divisão (por números diferentes de zero) agora também é fechada em Q. Deve-se lembrar das seguintes definições fundamentais em Q.

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow a.d = b.c\,;\ \frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + bc}{bd}\,;\ \frac{a}{b}.\frac{c}{d} = \frac{a.c}{b.d}$$

PROPRIEDADES BÁSICAS

Ao lado de todas as propriedades aritméticas apresentadas até então, há uma particularmente importante que serve para definir formalmente a divisão de números:

f) EXISTÊNCIA DE ELEMENTO INVERSO (MULTIPLICATIVO): qualquer que seja o número racional r, *diferente de zero*, existe (um único) racional, r*, tal que:

$$r.r^* = 1$$

Na prática, tal racional é representado por r^{-1} ou ainda $\frac{1}{r}$ (1/r), sendo denominado inverso do número racional não nulo r. Dividir um número inteiro p por um inteiro não nulo q é, por definição, multiplicar p pelo inverso de q. Ou seja: $p.q^{-1} = p/q$.

Uma conseqüência muito importante dessa última propriedade é a **2ª LEI DO CORTE**: Se $x \neq 0$, pode-se garantir que $y.x = z.x \Rightarrow y = z$. Com efeito, basta multiplicar ambos os membros da primeira equação pelo número x^{-1} que o resultado segue facilmente. *Observe-se que o corte multiplicativo só pode ocorrer com fatores não nulos*. Caso contrário, excluem-se situações possíveis ou geram-se absurdos. Exemplos:

a) Resolver a equação: $x^2 - x = 0$. Um erro comum é dividir ambos os membros da igualdade por x: $\frac{x^2 - x}{x} = \frac{0}{x} \Leftrightarrow \frac{x^2}{x} - \frac{x}{x} = 0 \Leftrightarrow x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$. O erro está em que *não está se levando em consideração a possibilidade de x = 0*, uma vez que não existe divisão por zero. A resolução correta (e muito simples), utilizando a distributividade (evidência do fator comum) e a lei do anulamento do produto, é notar sucessivamente que $x^2 - x = 0 \Leftrightarrow x.(x - 1) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ ou $x = 1$.

b) A "demonstração" de que 1 = 2 (naturalmente, inválida – uma verdadeira **falácia**). Inicialmente, parte-se do fato trivial que 0 = 0. Daí:

$0 = 0 \Leftrightarrow x - x = 2x - 2x \Leftrightarrow 1.(x - x) = 2.(x - x) \Leftrightarrow 1 = 2$ (?!).

Todas as equivalências acima estão corretas, com exceção da última, em que se dividiram ambos os membros da equação por x – x (isto é, por 0, o que é um absurdo).

1.10.3.1. REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Como é sabido, o sistema de (base de) numeração decimal utiliza-se de:

a) **dez símbolos**, denominados *algarismos*, para representar qualquer número natural.

b) sistema **posicional** de representação em que cada número escrito vale 10 vezes mais que valeria caso estivesse na posição imediatamente à direita da sua, ou, similarmente, 10 vezes menos do que valeria caso estivesse na posição imediatamente à esquerda da sua.

Desse modo, os números 1976 e 69024,11 devem ser entendidos, respectivamente, como as somas

$(1.10^3 + 9.10^2 + 7.10^1 + 6.10^0)$ e $(6.10^4 + 9.10^3 + 0.10^2 + 2.10^1 + 4.10^0 + 1.10^{-1} + 1.10^{-2}) =$

$= 6.10^4 + 9.10^3 + 0.10^2 + 2.10^1 + 4.10^0 + \frac{1}{10^1} + \frac{1}{10^2}$.

É fundamental lembrar que todo número escrito sob a forma decimal (isto é, com vírgula, explícita ou não, separando a parte inteira da fracionária) pode ser classificado em periódico ou não periódico. Assim, por exemplo, os números –24,696969...; 3,51673673673... e 4 = 4,0 = 4,000... são denominados dízimas periódicas, de períodos 69; 673 e 0, respectivamente, sendo a primeira e a última simples (porque logo após a vírgula vem o período) e a segunda composta (pelo fato de haver números não periódicos entre a vírgula e o período, no caso 51, denominado *anteperíodo*). Observe-se que os números ditos decimais exatos, como 49,397 ou – 45,0 são também dízimas periódicas (simples ou compostas), uma vez que 49,397 = 49,397000... e – 45,0 = – 45,000.... Finalmente, há os números de representação decimal infinita **não periódica**, como 4,101100111000... (em que a quantidade de algarismos iguais a 1 e a 0 vão aumentando em uma unidade, à medida que vão aparecendo novamente) e π = 3,14159265... (a razão entre o comprimento de uma circunferência e o seu diâmetro).

Demonstra-se que *todo* número racional pode ser escrito sob a forma de dízima periódica (finita ou infinita) e vice-versa, isto é, *toda* dízima **periódica** representa um número racional. Conseqüentemente, os números de **representação decimal infinita e não periódica não são racionais**.

A idéia, utilizando o algoritmo convencional da divisão euclidiana continuada, é a seguinte. Suponha-se que se divida um inteiro p qualquer por um inteiro q, não nulo, podem ser consideradas duas possibilidades gerais:

a) em algum momento, obtém-se resto **zero** (a divisão chega a um "fim"). Então, por definição de representação decimal, tem-se um número denominado **decimal exato**.

Ex.

$$\begin{array}{r|l} 127 & 50 \\ \mathbf{270} & \\ \mathbf{200} & \\ \mathbf{0} & \end{array} \qquad 2{,}54 = 2 + \frac{5}{10} + \frac{4}{100}$$

Em negrito, os restos da divisão por 5.

Dada uma *fração ordinária* (isto é, um quociente entre dois inteiros) $\frac{p}{q}$ **irredutível** (isto é, com mdc(p, q) = 1), para obter-se uma *fração decimal* (ou seja, uma fração equivalente a outra de denominador igual a uma potência de 10), é necessário e suficiente que o denominador **q seja divisível, apenas, por 2 ou por 5** (ou seja, os fatores primos de 10 – a base de numeração utilizada). Com efeito, qualquer fração equivalente a $\frac{p}{q}$ assume a forma $\frac{pk}{qk}$, com k inteiro não nulo. Para que qk seja uma potência de 10, não pode haver fatores primos em q distintos de 2 e de 5, e reciprocamente, aparecendo apenas os fatores primos 2 ou 5 em q, qk pode tornar-se uma potência de 10 para algum inteiro k conveniente, desde que p e q sejam primos entre si. Assim, as frações ordinárias irredutíveis $\frac{127}{50}\left(= \frac{127.2}{50.2} = \frac{254}{100}\right)$, $\frac{1}{2} = \frac{1.5}{2.5} = \frac{5}{10}$, $\frac{3}{5}$, $\frac{69}{10}$ podem ser todas escritas sob a forma de um número decimal exato. A fração $\frac{15}{300}$ também pode ser escrita como um decimal exato, embora haja o fator 3 no denominador. Algum erro? Não, basta perceber que a fração dada é equivalente à fração $\frac{1}{20}$. Percebe-se também que o "fim" da divisão do exemplo acima é meramente convencional. Quando se obtém resto nulo, a divisão é interrompida apenas por conveniência. Teoricamente, lembrando que *zero dividido por qualquer número não nulo produz quociente e resto ainda iguais a zero*, a divisão poderia progredir "para sempre". Caso se quisesse continuar a divisão, concluir-se-ia que: 2,54 = 2,540 = 2,5400 = 2,540000000 = 2,54000..., sendo que este último símbolo significa que a divisão de 0 por 5 continuaria indefinidamente.

c) jamais se obtém resto nulo. Quando se divide qualquer inteiro p pelo inteiro não nulo q, há exatamente **q restos possíveis**, a saber: 0, 1, 2, ..., q – 1, uma vez que o resto deve ser um natural inferior ao divisor. Por exemplo, a divisão abaixo não corresponde à definição usual.

$$\begin{array}{r|l} 127 & 50 \\ 77 & 1 \end{array},$$

pois, embora 127 = 50.1 + 77, o resto é maior que o divisor.

Assim, excluindo-se o resto nulo, ao dividir p por q, é possível obter apenas um número *finito* de restos distintos (no máximo, q – 1). Quando algum resto que aparecer for repetido, a seqüência de resto vai repetir-se "para sempre", produzindo-se então uma **dízima periódica**. Ex.:

$$\begin{array}{r|l} 31 & 21 \\ \hline 100 & 1.4761904... \\ 160 & \\ 130 & \\ 40 & \\ 190 & \\ 10 & \\ 100 & \end{array}$$

A partir da primeira repetição nos restos (no caso, a partir do resto 10), é óbvio que haverá também repetições nos quocientes (no exemplo, de 4 a 0), de modo que a seqüência de números **476190** será repetida num processo sem fim. Tal seqüência é exatamente o período do número decimal que "tenta representar exatamente" a fração ordinária $\frac{31}{21}$. As aspas são justificadas observando a impossibilidade real de fazer tal representação, já que o denominador 21 contém fatores primos distintos de 2 ou de 5 e, portanto, *nunca* possuirá um múltiplo igual a uma potência de 10.

Todos os raciocínios empregados são generalizáveis, o que demonstra o seguinte teorema: **Dividindo-se dois inteiros quaisquer, a representação decimal obtida é sempre finita ou infinita, mas periódica.**

Cabe também lembrar as regras práticas que permitem visualizar os números decimais racionais na forma de um quociente entre dois inteiros (**fração geratriz**).

DECIMAIS EXATOS: Exclui-se a vírgula, obtendo-se o numerador. O denominador consistirá de uma potência de base 10 e expoente igual ao número de casas decimais consideradas, simplificando, se possível, o quociente A demonstração deste resultado é simples e segue o raciocínio do exemplo seguinte. Ex.: $13,693 = \frac{13693}{1000}$.

De fato: $13,693 = 10 + 3 + \frac{6}{10} + \frac{9}{100} + \frac{3}{1000} = \frac{1000 + 3000 + 600 + 90 + 3}{1000} = \frac{13693}{1000}$.

Inversamente, já foi provado que quando o denominador de uma fração racional reduzida (simplificada) apresenta, apenas, os fatores primos **2 ou 5** em sua decomposição, então o decimal equivalente é exato, possuindo um número de casas decimais igual ao maior expoente que aparece nos fatores 2 ou 5, como é fácil demonstrar. Ex.:

$$\frac{13461}{5600} = \frac{13461:7}{5600:7} = \frac{1923}{800} = \frac{1923}{2^5.5^2} = \frac{1923x5^3}{2^5.5^2x5^3} = \frac{240375}{2^5.5^5} = \frac{240375}{10^5} = \frac{240375}{100000} = 2,40375$$

Obs.: Note-se que, se uma fração ordinária irredutível possuir no denominador fatores primos diferentes de 2 e de 5, ela nunca pode ser um decimal exato, conforme discutido anteriormente, devendo tratar-se então de uma dízima periódica (simples ou composta).

DÍZIMAS PERIÓDICAS SIMPLES: Inicialmente, separam-se partes inteira e decimal. A fração geratriz (da parte decimal) terá numerador igual ao número obtido pela justaposição dos algarismos do período. O denominador será constituído por uma quantidade de algarismos iguais a 9 correspondente ao número de algarismos do período. Ex.:

$$7,454545... = 7 + 0,454545... = 7 + \frac{45}{99} = 7 + \frac{5}{11} = 7\frac{5}{11} = \frac{82}{11}.$$

Um raciocínio interessante para obter a geratriz e explicar a regra precedente é o seguinte:

$x = 0,454545... \Rightarrow 100x = 45,454545...$ (multiplicando ambos os membros por 100). Subtraindo a primeira equação da segunda, conclui-se que:

$100x - x = 45{,}454545... - 0{,}454545...$ Logo, $99x = 45 \Leftrightarrow x = \frac{45}{99} = 0{,}454545...$

Naturalmente estas idéias podem ser facilmente generalizadas, justificando a regra de obtenção da geratriz de uma dizima periódica.

Reciprocamente, demonstra-se que, quando o denominador de uma razão racional já simplificada apresenta como fatores números primos diferentes **de 2 e de 5**, a representação decimal da fração será uma *dizima periódica simples*. De fato, neste caso, nunca poderá ser obtida uma fração decimal equivalente, conforme já explanado. Assim, na divisão continuada, o processo de divisão prossegue ininterruptamente, gerando uma dizima periódica. Em seguida, será visto quando tal dizima é composta.Ex.:

$$\frac{625}{273} = \frac{625}{3.7.13} = 2{,}289377289377289377... = 2{,}\overline{289377}$$ (a barra explicita o período)

Obs.: Agora deve-se perceber, sob um novo ponto de vista, que todo decimal exato pode ser visto como uma dizima de período igual a 9 (além do 0, como dito antes). Por exemplo:

$5 = 4{,}999...$ Com efeito, fazendo $x = 4{,}999...$, deve-se impor que $10x = 49{,}999...$ Logo: $10x - x = 49{,}999... - 4{,}999... \Leftrightarrow 9x = 45 \Leftrightarrow x = 5$. Analogamente, tem-se $11{,}169 = 11{,}168999...$

De um modo geral, há uma certa *ambiguidade* quando se fala na representação decimal de um decimal exato, sempre existem **duas**. Uma com período **0**, outra com período **9**. Dessa forma:

$5 = 5{,}00... = 4{,}999...$, assim como $11{,}169 = 11{,}169000... = 11{,}168999...$

Apesar de poder parecer estranho, a aceitação de tais propriedades tem como principal conquista a *generalização*: **qualquer número real pode ser escrito na representação decimal**, embora, em certos casos, tal escrita possa parecer "forçada" (o que ocorre devido ao sistema de numeração escolhido). É crucial entender que quando se escreve 4,9 ou 4,99 ou 4,999999999 **não se tem o número** 5, mas sim **aproximações por falta de** (ou seja, por valores *menores que*) 5. Não existe a "melhor" aproximação por falta de 5, de modo que a notação 4,999... significa apenas que a seqüência de aproximações menores que 5 não tem fim, sendo dependente apenas da precisão desejada (isto é, de quantos dígitos se quer na aproximação).

Similarmente, é óbvio (inclusive mais "natural", num certo sentido) que 5,1 ou 5,01 ou 5,0000000001 **não são iguais a 5**, mas sim **aproximações por excesso de** (bem entendido: por valores *maiores que*) 5. Quando se usa a símbolo 5,000..., simplesmente está sendo afirmado que a seqüência de aproximações é ilimitada: sempre existe uma aproximação por excesso de 5 "melhor" ("mais próxima") que as já utilizadas. Dessa maneira:

a) $4 < 5 < 6$. Em negrito, as "melhores" aproximações de 5 por falta e por excesso, utilizando exatamente um algarismo.

b) $4{,}9 < 5 < 5{,}1$. Em negrito, as "melhores" aproximações de 5 por falta e por excesso, utilizando exatamente dois algarismos.

c) $4{,}99 < 5 < 5{,}01$. Em negrito, as "melhores" aproximações de 5 por falta e por excesso, utilizando três algarismos.

d) $4{,}99999 < 5 < 5{,}00001$. Em negrito, as "melhores" aproximações de 5 por falta e por excesso, utilizando cinco algarismos.

Portanto, quando se escreve, como mais um exemplo (a ser compreendido de uma vez por todas) que $\frac{1}{9} = 0{,}111...$, o que se está representando são os seguintes fatos principais:

1. É **impossível** (consoante o exposto precedentemente) obter uma representação decimal finita para a fração ordinária $\frac{1}{9}$.
2. Os números **0,1**, **0,11**, **0,111**, **0,1111**, **0,111111111111** são aproximações (por falta) cada vez "melhores" (na ordem dada) para a fração ordinária $\frac{1}{9}$.
3. Não existe a "melhor" aproximação por falta de $\frac{1}{9}$, e a seqüência acima não termina nunca.

4. É conveniente que *todos* os números reais admitam uma representação decimal, ainda que *infinita* ou *dupla*, visto ser bastante fáceis as regras operatórias com esses números (principalmente, a adição e a subtração).

DÍZIMAS PERIÓDICAS COMPOSTAS: Separa-se a parte decimal da inteira. A fração geratriz da primeira terá como numerador a diferença entre um número formado pela justaposição dos algarismos do anteperíodo e do período e outro número formado apenas pelos algarismos do período. O denominador da geratriz será composto por uma seqüência de algarismos 9 em igual quantidade à dos algarismos do período, seguidos por tantos dígitos 0 quanto forem os algarismos do anteperíodo. Ex.:

$$2,43555... = 2 + 0,43555... = 2 + \frac{435-43}{900} = 2 + \frac{392}{900} = 2 + \frac{98}{225} = \frac{548}{225}.$$

Uma maneira de justificar tal regra é proceder de modo análogo ao das dízimas simples. No exemplo dado, seja x = 0,43555... Multiplicando ambos os membros por 100 e por 1000, tem-se 100x = 43,555... e 1000x = 435,555.... Subtraindo: 1000x − 100x = 435,555... − 43,555... $\Leftrightarrow$ 900x = 435 − 43 $\Leftrightarrow x = \frac{435-43}{900}$.

De modo inverso, se numa fração racional reduzida o denominador possuir, além dos fatores **2 ou 5**, outros primos, demonstra-se, então, que sua representação decimal será feita por meio de uma *dízima periódica composta*. Adicionalmente, a quantidade de algarismos da parte aperiódica é exatamente igual ao maior expoente que aparece em 2 ou em 5. Exs.:

$$\frac{7}{24} = \frac{7}{2^3.3} = \frac{1}{2^3}.\frac{7}{3} = \left(\frac{1}{2^3}.\frac{5^3}{5^3}\right).\frac{7}{3} = \left(\frac{125}{1000}\right).\frac{7}{3} = \frac{1}{1000}.\left(\frac{875}{3}\right) = \frac{1}{1000}.291,666... = 0,291666....$$

PARTE APERIÓDICA — PARTE PERIÓDICA

$$\frac{1234567}{4840} = \frac{1234567}{2^3.5.11^2} = \frac{1234567x5^2}{2^3.5.11^2x5^2} = \frac{30864175}{2^3.5^3.11^2} = \frac{1}{10^3}.\frac{30864175}{11^2} =$$

$$\frac{1}{10^3}.255075,826446280991735537190082644628099173553719 00... =$$

$$255,075826446280991735537190082644628099173553719 00... =$$

$$255,075826446280991735537190\overline{0}$$

Todos os resultados precedentes são gerais (e as respectivas demonstrações facilmente generalizáveis a partir dos exemplos, apenas com notações mais complicadas), podendo ser resumidos assim.

Seja $r = \frac{p}{q}$ um número racional, escrito na forma irredutível: mdc (p,q) = 1.

a) r é um decimal exato se, e somente se, q contém exclusivamente os fatores primos 2 ou 5. Neste caso, o número de casas decimais é igual ao maior dos expoentes que aparecem num desses primos.

b) r é uma dízima periódica simples (*não exata*) se, e somente se, q contém exclusivamente fatores primos distintos de 2 e de 5. Aqui, o número de algarismos do período é, no máximo, q − 1.

c) r é uma dízima periódica composta (*não exata*) se, e somente se, q contém, além dos fatores primos 2 ou 5, algum outro fator primo distinto desses. Nesta situação, o número de algarismos do anteperíodo é igual ao maior dos expoentes que aparecem em 2 ou em 5, após a decomposição.

UMA BREVÍSSIMA HISTÓRIA DOS NÚMEROS

A idéia de número muito provavelmente nasceu com a natural necessidade humana de *contar* os objetos do mundo ao seu redor, como animais, frutas ou pessoas. Para esse propósito (*contagem* ou *cardinalidade*), o conjunto dos números naturais serve perfeitamente. Além dessa finalidade (de número **cardinal**), os naturais são também utilizados como números **ordinais**, ou seja, para colocar objetos em uma certa ordem (tal qual uma fila). Obviamente, mesmo quando não havia ainda a escrita (os algarismos) para representar a contagem, o que possivelmente já ocorria era uma comparação entre os objetos de dois conjuntos diferentes, como um conjunto de pedras numa pequena sacola e o conjunto de animais de um rebanho.

Com o decorrer do tempo houve a necessidade de *medir* grandezas (massas, comprimentos, volumes, tempo, etc.). Medir uma grandeza significa compará-la com outra, da mesma espécie, denominada unidade de medida (padrão). Dessa forma, para exemplificar, quando se diz que a massa de uma pessoa é igual a 87 kg, compara-se a massa do indivíduo com a de um bloco de platina (o quilograma padrão), guardado na França, e adotado como unidade padrão de medida de massa pela maior parte do mundo (há outras, como a libra e a onça). Mas não é necessário um exemplo tão formal: basta notar a utilização de partes do corpo como padrão unitário (como os pés, medindo uma "travinha", ou o palmo da mão, medindo os mais diversos comprimentos).

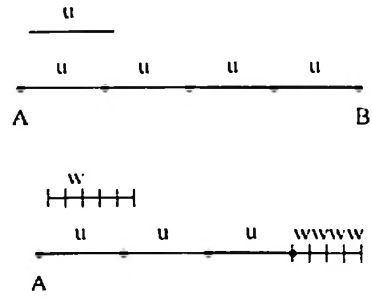
Entretanto, é de esperar-se que nem todo ser humano (ou qualquer outro material) tenha uma massa correspondente a um múltiplo inteiro de 1 kg. É comum encontrar massas "quebradas", isto é, do tipo 87,654 kg, por exemplo. Esta medida significa que, ao dividir-se a unidade padrão de medida, 1 kg, em 1000 partes de mesma massa (denominado miligrama, por sinal um dos vários submúltiplos do quilograma), a massa fracionária corresponde a 87 blocos originais mais 654 unidades de cada uma das partes da divisão. Analogamente, quando se mede um comprimento usando os palmos da mão, é reqüente não caber um número inteiro de palmos.

Dessa forma, surge a necessidade da noção dos números racionais (ou "fracionários"), para os quais a unidade é subdividida em quantidade conveniente de partes iguais, até que alguma dessas partes caiba um número inteiro de vezes na grandeza a ser medida.

A tempo, quando o resultado da comparação de uma grandeza com uma unidade previamente escolhida resulta sempre em números inteiros (até agora, naturais), diz-se que se está realizando uma contagem. Tal fato ocorre quando, por exemplo, vai ser medida a quantidade de vacas num rebanho: sempre se tem 1 vaca, 2 vacas, ou 56 vacas, ou mesmo 0 vacas. Nunca se conta (de um modo geral) 5,7, $\sqrt[3]{69}$ ou π vacas, por exemplo. A grandeza, nesta situação, é denominada discreta.

Já quando essa comparação com a unidade permite que ocorram (todos os) valores – reais – entre dois inteiros consecutivos, lida-se com grandezas denominadas contínuas. Não se usa mais o termo contagem para medidas deste tipo, mas sim medição. Como exemplos, podem ser citadas a massa ou a temperatura de um corpo. A massa de um corpo não passa, abruptamente (instantaneamente), de 79 kg para 80kg. Passa-se por todos os valores intermediários, como 79,1 kg, 79,567 kg, 79,666... kg, $\sqrt{6345} = 3\sqrt{705}$ kg (ainda que não se possa vê-los, explicitamente, na balança).

Essencialmente, o desenvolvimento numérico do ser humano atingiu esse ponto desde a pré-história até aproximadamente o século V antes de Cristo. Esses resultados já predominavam na antigüidade, como entre os babilônios, egípcios e, mais tarde, gregos. Estes tinham a noção de números racionais, sem a notação atual, é claro. Para eles, os números serviam quase que exclusivamente para efetuar medições (ou contagens), de modo que eram principalmente interpretados como **segmentos de reta**. Desse modo, números reais para eles consistiam em qualquer segmento de reta que pudesse ser desenhado, construído ou concebido, em última análise.



Fixando "u" como segmento unitário (unidade de medida), tem-se como era entendido o número inteiro 4: AB.

É de esperar-se que AB não seja sempre inteiro. O que fazer, então? Fácil! Basta subdividir a unidade "u" em subunidades (ou melhor, *submúltiplos*) "w", de modo que "w" caiba exatamente um número inteiro de vezes em "u". Ao lado, tem-se, assim, u = 5w $\Leftrightarrow$ w = u/5, e, conseqüentemente, AB = 3u + 4w = 19/5 unidades.

Em geral, quando se pode dividir a unidade "u" em q segmentos congruentes "w" (de medida 1/q), e quando p destes segmentos "w" justapostos cabem exatamente sobre $\overline{AB}$, diz-se que AB = p/q, com p e q inteiros.

Perceba-se, então, que até alguns séculos antes de Cristo, tudo que se sabia sobre números dizia respeito aos conjuntos N, Z$_+$ e Q$_+$, sendo que este último, na verdade, era imaginado como uma espécie de Z$_+$ "composto" (quociente de dois inteiros). O que havia para os gregos no último exemplo, em que AB = 19/5, não era bem o resultado da divisão de 19 por 5, mas sim 19 segmentos "novos unitários", adjacentemente dispostos em AB. Isso é evidenciado, com grande destaque, em uma seita de cunho místico, os *pitagóricos*, que pregavam, em essência, exatamente esta idéia: a de que **tudo** (no universo) é **número** (ou pode ser explicado por eles). Ressalte-se que o conceito de número, na época (séculos VI e V a.C., aproximadamente), restringia-se ao de números inteiros positivos. Quando uma grandeza pode ser medida por esse processo (isto é, através de um número racional), ela é dita **comensurável** (com a unidade escolhida).

Por ironia do destino, foram os próprios pitagóricos que descobriram, concomitantemente com o teorema pelo qual eles ficaram famosos (ou , pelo menos, seu líder: o *Teorema de Pitágoras*), que nem tudo pode ser explicado por razões entre inteiros. Até então, era aceita a idéia que sempre era possível subdividir a unidade, de forma a obter um submúltiplo conveniente. Se não fosse conveniente subdividir a unidade em 2 partes iguais, efetuava-se a divisão em 3, 4, 5, ... partes iguais até caber um número inteiro de vezes no segmento a ser medido. Esta consideração era oriunda da harmonia existente entre cordas musicais cujas medidas estivessem entre si na mesma razão de dois inteiros. Na prática, esse processo sempre chegava a um fim num certo número inteiro positivo q, o qual criava a subunidade 1/q, uma vez que o olho humano (e mesmo o aparelho de medida mais sofisticado da atualidade) possui o que se chama de *precisão limitada*, o que significa, por exemplo, que dividir a unidade em 20 partes aparenta o mesmo resultado para a divisão em 19 partes. A partir de resultados puramente teóricos, todavia, descobriu-se que, adotando o lado de um quadrado como unidade de medida *jamais* a diagonal do mesmo poderia ser medida por um número racional. Muito estranho, para a época, uma vez que era óbvio que a referida diagonal existe (é *real*). A saída foi abandonar (*PARA FINS TEÓRICOS*) a idéia de que o processo de subdivisão da unidade fosse impecável, e aceitar a existência de grandezas **incomensuráveis**, ou seja, para as quais a medida não é sempre um número racional. Surgem, assim, os números irracionais.

O matemático grego Eudóxio (aproximadamente século V a.C.) foi quem criou, posteriormente e pela primeira vez, definições e propriedades convenientes (para a época e por muitos séculos depois), as quais ensinavam a lidar com esses "monstros numéricos", os irracionais. Deve-se a ele as idéias básicas vistas anteriormente de compreender perfeitamente um número irracional qualquer por meio de suas aproximações por falta e por excesso. Outro resultado fundamental, a ser visto quando do estudo de funções afins, é um poderoso método de demonstração, conhecido por **método da exaustão**, que serve

basicamente para estender uma propriedade dos números racionais para os números reais, sob certas condições.

O curioso é que a existência de *números negativos* só foi aceita muito tempo depois, principalmente sob influência de mercadores orientais (árabes, por exemplo), que já trabalhavam comercial e algebricamente com noções de saldo credor (*positivo*) e saldo devedor (*negativo*). Somente após o Renascimento, em meados do século XV, os números negativos foram sendo introduzidos mundo afora. O número zero também demorou a ser aceito e utilizado, mas essa verdadeira conquista é uma outra história ...

Finalmente, no final do século XIX, a humanidade alcançou o ponto de dominar os conceitos dos conjuntos numéricos, quando grandes matemáticos como Dedekind, Peano, Cantor e Weierstrass desenvolveram teorias rigorosas que explicavam os números reais e, assim, os números irracionais. O interessante é que muitas das idéias partiram (ou estavam bem próximas) dos resultados obtidos por Eudóxio, 24 séculos antes. Obviamente, de modo bem mais operacional e completo.

A propósito, as letras representativas dos principais conjuntos numéricos acima (N, Z e Q) significam, respectivamente, *número*, *zahl* (número, em alemão) e *quociente*.

1.10.4. CONJUNTO DOS NÚMEROS REAIS

Possuem como principal propriedade geométrica o fato de poderem ser postos em correspondência um a um (*correspondência biunívoca*) com os pontos de um eixo orientado. É, basicamente, como se precisa entender os números reais, neste curso. Assim sendo, servem também para medir qualquer tipo de grandeza (comensurável ou não, positiva, negativa ou nula).

Uma reta é um *eixo orientado* quando nela se tomam: um ponto para servir de origem (zero), outro para definir uma unidade (positiva) e um sentido de percurso (da origem à unidade). É comum também chamar uma tal reta de *reta real*.

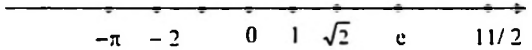
Nestas condições, a cada ponto da reta corresponde um único número real, que, em valor absoluto, é igual à distância entre a origem e o ponto. Reciprocamente, cada número real pode ser representado por um único ponto do eixo, que estará na mesma semi-reta de origem no zero e passando pela unidade, caso o número seja positivo, na outra semi-reta (oposta), se o real for negativo, ou sobre a origem, quando o número for zero. A tempo, chama-se de **MÓDULO** de um número real ao seu valor absoluto (sem sinal), que, geometricamente, representa a distância do ponto que representa esse número num eixo orientado até a origem. Exs.: $|4,8| = 4,8$; $|-\sqrt[3]{7}| = \sqrt[3]{7}$; $|0| = 0$

De um modo geral, o módulo de um número real qualquer ou é igual ao próprio número, quando ele for positivo ou zero, ou é igual ao simétrico do número, quando ele for negativo. Isto é, por definição:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

É útil, também, saber que $|x - y|$ representa, geometricamente, a distância entre os números reais x e y.

Esquematicamente, pode-se ter a seguinte visualização da reta real.



Importante lembrar que o número 0 não é considerado *nem positivo nem negativo*.

Como se sabe, ao contrário do que já se pensou noutros tempos, nem todos os números reais podem ser representados como quociente entre dois números inteiros, ou seja, por números racionais. Noutras palavras, existem grandezas que não admitem submúltiplo comum com a unidade, por menor que estes sejam, como a diagonal de um quadrado e o seu lado. Situações como essa ilustram o conceito de grandezas incomensuráveis.

A idéia é lembrar que todo número real admite uma representação especial e útil, denominada **decimal**. A representação decimal nada mais é do que um quociente equivalente a uma fração cujo denominador seja uma potência de 10. Ora, isso nem sempre é possível de modo "perfeito", o que deve ser considerado natural. Não é obrigatório que um número inteiro seja uma potência de 10. Como já foi visto anteriormente, existem os chamados decimais exatos, aqueles nos quais se inspirou tal representação. Ao lado deles, há também as dízimas periódicas não exatas (simples ou compostas), cujas representações são *infintas*, mas com um certo padrão.

Desde a época de Pitágoras é sabido que nem todo número é racional. O primeiro caso de número não racional (irracional) de que se tem notícia é aquele cujo quadrado é 2. O raciocínio empregado na época é aproximadamente o seguinte.

Seja, por exemplo, um quadrado de lado unitário. Chamando de "d" a medida de sua diagonal, tem-se pelo teorema de Pitágoras que:

$d^2 = 1^2 + 1^2 \Leftrightarrow d^2 = 2$ (I). Supondo que d fosse um número racional, existiriam então dois inteiros (positivos) tais que $d = \frac{p}{q}$. Daí, elevando ambos os membros da última equação ao quadrado, deveria ocorrer $d^2 = \left(\frac{p}{q}\right)^2 = \frac{p^2}{q^2} \Leftrightarrow p^2 = d^2.q^2$. De (I), ocorreria assim que $p^2 = 2q^2$.

Sabe-se (Teorema Fundamental da Aritmética) que todo número inteiro positivo maior que 1 pode ser decomposto (fatorado) de maneira única em seus fatores primos, a menos da ordem dos fatores, que em geral não é relevante. Assim, por exemplo, o único modo de decompor 360 em seus fatores primos é $360 = 2^3.3^2.5$. Desta forma, os expoentes dos fatores primos de um número inteiro maior que 1 qualquer são bem determinados. Além disso, trivialmente a quantidade de fatores primos na decomposição de um quadrado perfeito é, sempre, par. Por exemplo, 2250000 $(= 1500^2) = (2^2.3.5^3)^2 = 2^4.3^2.5^6$, que possui quatro fatores primos iguais a 2, dois fatores primos iguais a 3 e seis fatores primos iguais a 5. A propósito, **lembrando que 0 é par** (por ser divisível por 2), poder-se-ia também dizer que há zero fatores 7, zero fatores 13, etc.

Note-se que tanto p quanto q podem ser considerados maiores que 1 (por quê?). Por conseguinte, pelo exposto, o inteiro p^2 deve possuir uma quantidade **par** de fatores iguais a 2, tal qual ocorre com o inteiro q^2. Mas então o inteiro $2.q^2$ deveria possuir uma quantidade **ímpar** de fatores iguais a 2, o que é um absurdo. Portanto, não é possível escrever $\sqrt{2}$ como quociente de dois inteiros, ou seja, $\sqrt{2}$ é **irracional**.

O filósofo grego Aristóteles, sabendo não ser possível refutar o argumento acima, ficou pasmo e disse: "se fosse possível escrever $\sqrt{2}$ como razão de dois inteiros, haveria um inteiro que seria, ao mesmo tempo, par e ímpar". O número impossível ao qual Aristóteles se refere é p^2.

Assim, a linguagem dos números reais não fica totalmente esclarecida apenas com o conceito de números racionais. Necessita-se de um novo conjunto numérico: o conjunto dos números irracionais, que preenchem as lacunas deixadas pelos números racionais na reta real, completando-a. E, conforme já foi dito, demonstra-se (por exclusão) que os números irracionais são constituídos por todos os números cujas representações decimais são **infinitas e não periódicas**. De fato, a representação de um número irracional **não pode ser finita**, senão ele seria um decimal exato. Assim, deve ser **infinita** a **representação decimal de qualquer irracional**. Em seguida, tal representação **não pode ser periódica**, uma vez que seria então uma dízima (simples ou composta) e, por conseguinte, racional.

Entretanto, nem sempre um número irracional é apresentado em Matemática na sua forma decimal. Não existe, infelizmente, uma regra geral (cabível neste curso) que garanta a irracionalidade ou não de um número. Usualmente, utiliza-se a redução ao absurdo para provar que um dado número é irracional: supõe-se que ele seja racional e, de alguma forma, obtém-se uma contradição, como nos casos clássicos da irracionalidade de radicais, em que se enquadra a famosa (e antiga) demonstração precedente de que $\sqrt{2}$ não é racional. O problema é que, em muitos casos, a parte do "de alguma forma, obtém-se uma contradição" envolve, em geral raciocínios de Análise Matemática (uma espécie de "super Cálculo").

Mesmo assim, é importante conhecer os principais números irracionais elementares, tais quais π, o **número de Euler**, e (normalmente apresentado quando do estudo de logaritmos), e o **número de ouro**, Φ (ou **razão áurea**), bem como seus valores aproximados, de acordo com a conveniência. Apenas para exemplificar:

$\pi = 3{,}14159265358979323846264338327 9...$

$e = 2{,}71828182845904523536028747135 2...$

$\sqrt{2} = 1{,}41421356237309504880168872420 9...$

$\sqrt{3} = 1{,}73205080756887729352744634150 58...$

$\Phi = 1{,}61803398874989484820458683436564...$

Obviamente, não é necessário decorar tantas casas decimais (em geral, bastam duas).

É útil, ainda, saber fazer uso de dois teoremas fundamentais que "produzem", ou ainda, identificam "alguns" números irracionais.

TEOREMA 1: Se $n \in N$ e $\sqrt[m]{n} \notin N$, então $\sqrt[m]{n} \notin Q$.

Logo, por exemplo, como a raiz quarta de 65 não é exata ($\sqrt[4]{65} \notin N$), pode-se garantir, pelo teorema 1, que tal raiz é irracional.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponha-se que $\sqrt[m]{n} = \frac{p}{q}$, para algum par de inteiros p e q. Adicionalmente, suponha-se que foi escolhida uma fração ordinária irredutível, isto é, considere-se mdc (p,q) = 1(isto é sempre possível). Então, por definição de raiz m-ésima, deveria ocorrer $p^m = n.q^m$. Mas aí, q^m e n deveriam ser fatores de p^m (observando o fechamento, p^m e q^m ainda são inteiros). Da hipótese mdc (p,q) = 1, segue mdc (p^m,q^m) = 1. Ocorreria, então, que o fato de q^m ser um divisor de p^m, mas não ter fator comum com este, implicaria $q^m = \pm 1$, do que se teria $q = \pm 1$. Mas então, o racional p/q seria inteiro, o que contraria a hipótese ($\sqrt[m]{n} \notin N$). Logo, $\sqrt[m]{n} \notin N$, como se queria demonstrar.

Obs.: O resultado é análogo quando se considera n negativo, desde que $\sqrt[m]{n}$ seja real (isto é, não ocorra n negativo e m par), substituindo no teorema o conjunto N pelo conjunto Z. Dessa forma, pode-se afirmar que $\sqrt[7]{-123}$, por exemplo, é irracional.

Observe-se também que o teorema 1 exibe uma infinidade de números irracionais distintos. Além disso, a demonstração absorve a de que $\sqrt{2}$ é irracional.

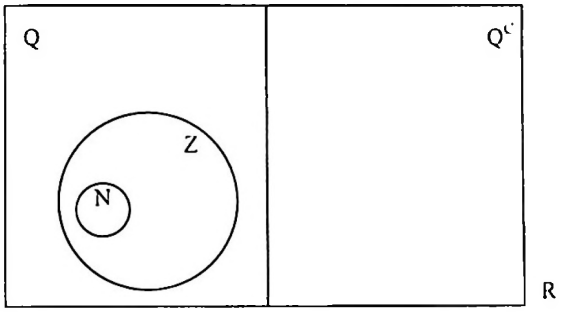
TEOREMA 2: Sendo r um número racional (não nulo, nas últimas três operações a seguir) e α um número irracional qualquer, então os números $r \pm \alpha$, r.α, $\frac{r}{\alpha}$, $\frac{\alpha}{r}$ são, todos, irracionais.

Dessa forma, o número $7 - \sqrt[3]{9}$ não pode ser racional, uma vez que, pelo teorema anterior, $\sqrt[3]{9}$ é irracional e, pelo teorema 2, a diferença entre um racional e um irracional deve ser irracional. Note-se que $0.(7 - \sqrt[3]{9}) = 0$ é racional, mas isso não contraria o teorema.

DEMONSTRAÇÃO:

Suponha-se que $r = \frac{p}{q}$, para inteiros p e q. Se, por absurdo, existissem inteiros m e n para os quais $r + \alpha$ (por exemplo) fosse racional, ou seja, caso $r + \alpha = \frac{m}{n}$, dever-se-ia ter: $\alpha = \frac{m}{n} - \frac{p}{q} = \frac{mq - np}{nq}$, o que é uma contradição, já que (novamente pelo fechamento), mq – np e nq são números inteiros, mas α é irracional. As outras operações são inteiramente análogas e ficam como exercícios.

Finalmente, deve-se concluir que todo número real ou é racional ou é irracional, não podendo ser os dois, nem havendo uma terceira opção. Daí, é fácil ver que o conjunto dos números irracionais pode ser representado por $\mathbf{Q}^c$, uma vez que é o complementar de Q em relação ao universo R. Logo, $\mathbf{R = Q \cup Q^c}$, que pode servir, de modo elementar, como definição para o conjunto dos números reais. Esquematicamente, é bom ter as relações entre os principais conjuntos numéricos de cabeça, lembrando de figuras como a que segue.



Obs.: Além do conjunto R, há ainda outro conjunto numérico muito importante: o **conjunto dos números complexos**, representado por **C**. Valem as inclusões: $N \subset Z \subset Q \subset R \subset C$. Esse conjunto será estudado posteriormente, em separado.

1.10.4.1. RELAÇÃO DE ORDEM EM R

Seja X um conjunto em que se definiram duas operações fundamentais (como a *adição* e a *multiplicação* numéricas usuais) com todas as propriedades básicas apresentadas anteriormente (comutatividade, associatividade, existência de elemento neutro, existência de elemento inverso, bem como o fechamento, trivialmente, e a distributividade de uma operação em relação à outra). O conjunto X é dito **ordenado** quando for possível destacar um subconjunto X_P de X, tal que valem as seguintes propriedades:

I. Dado qualquer $x \in X$, exatamente uma das três possibilidades deve ocorrer: **ou** $\mathbf{x \in X_P}$ **ou** $\mathbf{(-x) \in X_P}$ **ou** $\mathbf{x = 0}$ (elemento neutro da adição em X).

II. X_P é fechado para suas duas operações fundamentais, ou seja: **a "soma" e o "produto" (comparando com as operações elementares usuais) de dois elementos de X_P são, ainda, membros de X_P.** Em símbolos:

$$x, y \in X_P \Rightarrow x + y, x.y \in X_P.$$

O conjunto X_P é denominado **conjunto dos elementos positivos** de X. Indicando por $-X_P$ ou X_N o conjunto $\{-x : x \in X_P\}$, chamado **conjunto dos elementos negativos** de X, tem-se, devido a I, que $X = X_P \cup (-X_P) \cup \{0\}$.

Para o presente curso, interessa apenas ordenar subconjuntos de números reais, mas a definição acima pode ser aplicada a outros tipos de conjuntos (ver exemplo b a seguir). Além disso, é também possível ordenar conjuntos de maneira "não total", ignorando ou restringindo algumas das propriedades operacionais. Por exemplo, o conjunto N dos números naturais não tem elemento inverso (nem aditivo, nem multiplicativo), mas é usual ordená-lo mesmo assim. Analogamente para o conjunto Z dos números inteiros. Naturalmente, nem todas as propriedades seguintes serão válidas, nesses casos. Exs.:

a) O conjunto Q dos números racionais é ordenado, sendo $Q_P = Q_+^*$ o conjunto formado pelos racionais p/q tais que $p.q \in N^*$ (significando assim que p e q possuem o mesmo sinal).

b) Seja X o conjunto das funções racionais, isto é, dos objetos do tipo $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$, em que p e q são polinômios numa variável (t) com coeficientes racionais, e q não é identicamente nulo. Definindo as operações de adição e de multiplicação de maneira semelhante às operações correspondentes em Q, é fácil verificar que X é um conjunto que possui todas as propriedades operacionais de Q. Pode-se, então, ordenar X do seguinte modo: chame-se uma fração $r(t) = \frac{p(t)}{q(t)}$ de *positiva* quando o coeficiente dominante (ou seja, de grau mais alto) do polinômio p.q for positivo. Assim, as duas condições de ordenação acima (I e II) são satisfeitas. De fato, suponha-se que $r_1 = \frac{p_1}{q_1}$ e $r_2 = \frac{p_2}{q_2}$ sejam frações positivas. Então, $r_1 + r_2 = \frac{p_1 \cdot q_2 + p_2 \cdot q_1}{q_1 \cdot q_2}$ é também positiva, pois o produto do numerador pelo denominador é $(p_1.q_2 + p_2.q_1).q_1.q_2 = (p_1.q_1).(q_2)^2 + (p_2.q_2).(q_1)^2$ tem o coeficiente dominante positivo, como é fácil verificar. As verificações das demais partes das condições I e II são imediatas. De acordo como essa ordenação, tem-se, por exemplo, que as frações racionais $\frac{2t^3 - 4t^2 + 1}{2 - 3t + 5t^7}$ e $\frac{-t^3 + t^2 + 4}{-2t^2 + 5t}$ são positivas, ao passo que $\frac{6t^5 - 2t + 9}{1 - t}$ é negativa.

PROPRIEDADES BÁSICAS DA ORDENAÇÃO

Em qualquer conjunto ordenado X (independentemente da ordenação escolhida), tem-se que:

a) Se $x \in X^*$, então x^2 **é sempre positivo.** De fato, sendo $x \neq 0$, ou $x \in X_P$ (x é positivo) ou $-x \in X_P$ (x é negativo). Caso $x \in X_P$, pela parte II da definição (fechamento), tem-se $x^2 = x.x \in X_P$. E se $-x \in X_P$, pela regra dos sinais e novamente por II, tem-se $x^2 = (-x).(-x) \in X_P$. Obviamente, quando $x = 0$ (e somente nessa situação), tem-se $x^2 = 0$. Isto é: $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.
b) 1 (ou, mais genericamente, o elemento neutro da multiplicação em X) é sempre positivo. Em verdade, $1 = 1.1 = 1^2$. Daí, é só aplicar a propriedade anterior.
c) -1 **é sempre negativo.** Isso é conseqüência da parte I da definição, bem como da regra dos sinais. De fato: $1 \in X_P \Leftrightarrow -1 \in -X_P$. Note-se que, dessa forma, **em nenhum conjunto ordenado com as propriedades operacionais da definição dada** -1 **pode ser o quadrado de algum elemento.**
d) Existem infinitos elementos em qualquer conjunto ordenado, de acordo com a definição dada. Com efeito, como $1 \in X$, pelo fechamento da adição, deve-se ter $1 + 1$, $(1 + 1) + 1$, $(1 + 1 + 1) + 1$, ... (e assim sucessiva e indefinidamente) todos em X_P e, conseqüentemente, em X.

Quando X é um conjunto ordenado, utiliza-se a notação $x > y$ ("x é maior que y") para significar que a diferença $x - y$ é positiva ($x - y \in X_P$). É evidente que isso é o mesmo que afirmar que existe um número positivo $z \in X$, tal que $x = y + z$. Nas mesmas condições, diz-se também que $y < x$ ("y é menor que x").

Inicialmente, é óbvio que $x \in X_P$ (x é positivo) se, e somente se, $x > 0$. Com efeito, basta observar que $x = x - 0$. Analogamente, $-x \in X_P$ (x é negativo) se, e somente se, $x < 0$. Também, todo número positivo é maior que qualquer número negativo, pois: $a \in X_P$ e $-b \in X_P \Rightarrow a - b = a + (-b)$ é positivo, ou seja, $a > b$.

MAIS PROPRIEDADES IMPORTANTES

Sendo X um conjunto ordenado qualquer e a, b, c, d elementos de X, valem as seguintes propriedades.

I. $a > b$ e $b > c \Rightarrow a > c$ (TRANSITIVIDADE).

II. Ou $a > b$ ou $b > a$ ou $a = b$ (TRICOTOMIA).

III. $a > b \Leftrightarrow a + c > b + c$ (MONOTONICIDADE DA ADIÇÃO).

IV. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} a.c > b.c, & \text{se } c > 0 \\ a.c < b.c, & \text{se } c < 0 \end{cases}$ (MONOTONICIDADE DA MULTIPLICAÇÃO)

V. $\begin{cases} a > b \\ c > d \end{cases} \Rightarrow a + c > b + d.$

VI. $\begin{cases} a > b \\ c > d \\ a,b,c > 0 \end{cases} \Rightarrow a.c > b.d.$

VII. $a > 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} > 0$ e $a < 0 \Leftrightarrow \frac{1}{a} < 0.$

VIII. $a > b \Leftrightarrow \begin{cases} \frac{1}{a} < \frac{1}{b}, & \text{se } a > b > 0, \text{ ou se } 0 > a > b \\ \frac{1}{a} > \frac{1}{b}, & \text{se } a > 0 > b \end{cases}$

DEMONSTRAÇÕES:

I. Sabendo que $a > b$ e que $b > c$., tem-se que ambos os números $a - b$ e $b - c$ são positivos. Portanto sua soma $(a - b) + (b - c) = a - c$ também será positiva, a partir do que se tem $a > c$.

II. Dados os números a e b de um conjunto ordenado X, $a - b$ também está em X. Portanto, pela parte I da definição inicial, ou $a - b > 0$ ou $-(a - b) = b - a > 0$ ou $a - b = 0$, ou seja, ou $a > b$ ou $b > a$ ou $a = b$.

III. Basta notar que $a - b = (a + c) - (b + c)$, qualquer que seja o elemento $c \in X$. Portanto, $a > b \Leftrightarrow a - b > 0 \Leftrightarrow (a + c) - (b + c) > 0 \Leftrightarrow a + c > b + c$.
Obs.: olhando para a volta, pode-se denominar a monotonicidade da adição de **lei do corte**.

IV. É só perceber que $a.c - b.c = (a - b).c$. Desse modo, pela regra dos sinais, caso $a > b$ (ou seja, $a - b > 0$), tem-se $a.c - b.c > 0$ se, e somente se, $c > 0$, bem como $a.c - b.c < 0$ se, e somente se, $c < 0$. Daí, $a > b \Rightarrow \begin{cases} a.c > b.c, & \text{se } c > 0 \\ a.c < b.c, & \text{se } c < 0 \end{cases}$. A recíproca é análoga.
Obs.: como conseqüência direta desta propriedade, pode-se afirmar que $a > b \Leftrightarrow -a < -b$, bastando multiplicar ambos os membros da desigualdade conveniente por -1.

V. Supondo que $a - b > 0$ e que $c - d > 0$, tem-se que $(a - b) + (c - d) = (a + c) + (b + d) > 0$. Portanto, $a + c > b + d$. Desse modo, tal qual como ocorre para equações, **é possível somar, membro a membro, duas inequações de mesmo sentido.**
Obs.: Perceba-se que, sob mesma hipótese ($a > b$ e $c > d$) apenas, não se pode ordenar as diferenças $a - c$ e $b - d$. Com efeito, $(a - c) - (b - d) = (a - b) - (c - d)$. Apesar de $a - b$ e $c - d$ serem ambos positivos, nada se pode falar acerca da *diferença* entre eles. Deve-se, então, ter muito cuidado para não cometer **erros comuns** do tipo: $x > 4$ e $y > 1 \Rightarrow x - y > 4 - 1 = 3$, embora esteja correto afirmar que $x = 4$ e $y = 1 \Rightarrow x - y = 4 - 1 =$

3. Pessoas menos experientes tentam estender resultados válidos em *equações* para *inequações*, o que nem sempre é possível.

VI. Suponha-se que $a > b$ e que $c > d$. Em conformidade com a propriedade IV, supondo $b > 0$ e $c > 0$, pode-se garantir que: $\begin{cases} a > b \Rightarrow a.c > b.c \\ c > d \Rightarrow c.b > d.b \end{cases}$, em que multiplicaram-se as desigualdades, membro a membro, por números positivos. Devido à comutatividade e à propriedade I, pode-se afirmar, assim, que $a.c > b.c$ e $b.c > b.d \Rightarrow a.c > b.d$. Assim, caso se disponha de *pelo menos três positivos* (pois $b > 0$ acarreta $a > 0$) dentre os quatro números ordenados, **é permitido multiplicar, membro a membro, inequações de mesmo sentido**, de modo análogo ao que se pode fazer com equações.

VII. Suponha-se que $a > 0$. Então, caso $\frac{1}{a}$ fosse negativo, $-\frac{1}{a}$ seria positivo. Mas, daí, multiplicando ambos os membros de $a > 0$ por $-\frac{1}{a}$, o sentido da desigualdade seria mantido (por IV), do que $a.\left(-\frac{1}{a}\right) > 0.\left(-\frac{1}{a}\right)$, ou seja, $-1 > 0$, o que é um absurdo. Assim, $a > 0 \Rightarrow \frac{1}{a} > 0$. As demonstrações da recíproca e da outra parte são análogas.

VIII. Suponha-se que $a > b > 0$. Então, a diferença $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{a.b}$ é positiva, visto que $a - b$, $a.b$ e (pela propriedade anterior) $\frac{1}{a.b}$ são todos positivos. Portanto: $a > b > 0 \Rightarrow \frac{1}{b} > \frac{1}{a}$. Supondo-se $\frac{1}{b} > \frac{1}{a}$ bem como a e b positivos, multiplicando ambos os membros da desigualdade por $a.b$, obtém-se facilmente $a > b$. Desse modo: $\begin{cases} \frac{1}{b} > \frac{1}{a} \\ a > 0 \quad b > 0 \end{cases} \Rightarrow a > b$.

As outras partes, isto é, **$a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} < \frac{1}{b}$, caso $a, b < 0$ e $a > b \Leftrightarrow \frac{1}{a} > \frac{1}{b}$, caso a e b tenham sinais contrários**, são inteiramente análogas e ficam como bons exercícios.

Dados os elementos x e y de um conjunto ordenado X, utiliza-se a notação $x \geq y$ ("x é **maior que ou igual a** y" ou ainda "x **não é inferior a** y") para negar que $x < y$. Noutros termos, escreve-se $x \geq y$ quando se tem $x > y$ ou $x = y$. Obviamente, $x \geq y$ significa portanto que $x - y \in X_P \cup \{0\}$. Os elementos de $X_P \cup \{0\} = X_+$ são denominados **não negativos**, caracterizados pela relação $a \geq 0$. Quando $x \geq y$ também é possível escrever, equivalentemente, $y \leq x$ ("y é **menor que ou igual a** x" ou ainda "y **não é superior a** x"), significando que $y - x \in X_N \cup \{0\} = X_-$, conjunto este chamado de conjunto dos elementos **não positivos** de X, caracterizado pela propriedade $a \leq 0$.

Com exceção da TRICOTOMIA, todas as demais propriedades, demonstradas acima, da relação de ordem $x > y$ estendem-se naturalmente para $x \geq y$. A tricotomia deve ser substituída por outras duas: a REFLEXIVIDADE, segundo a qual $x \geq x$, para todo $x \in X$, bem como a ANTI-SIMETRIA, isto é, $x \geq y$ e $y \geq x \Leftrightarrow x = y$.

1.10.4.2. INTERVALOS REAIS

Destacam-se alguns subconjuntos importantes em R (ou, mais geralmente, em qualquer conjunto ordenado X, no lugar de R), utilizando a relação de ordem. Supondo $a < b$, têm-se os seguintes subconjuntos fundamentais:

$[a, b] = \{x \in R: a \leq x \leq b\}$ (INTERVALO FECHADO, de *extremos* a e b).

$(a, b] =]a,b] = \{x \in R: a < x \leq b\}$ (INTERVALO FECHADO À DIREITA E ABERTO À ESQUERDA, de extremos a e b).

$[a, b) = [a,b[= \{x \in R: a \leq x < b\}$ (INTERVALO FECHADO À ESQUERDA E ABERTO À DIREITA, de extremos a e b).

$(a, b) =]a,b[= \{x \in R: a < x < b\}$ (INTERVALO ABERTO, de extremos a e b).

$[a, +\infty) = [a, +\infty[= \{x \in R: x \geq a\}$.

$(a, +\infty) =]a, +\infty[= \{x \in R: x > a\}$.

$(-\infty, b] =]-\infty, b] = \{x \in R: x \leq b\}$.

$(-\infty, b) =]-\infty, b[= \{x \in R: x < b\}$.

$(-\infty, +\infty) = R$.

O primeiro destes oito intervalos também recebe o nome de **segmento de reta de extremidade em a e em b**, obviamente chamando a atenção para a representação geométrica oriunda da correspondência biunívoca entre os números reais e os pontos de um eixo orientado. Os quatro primeiros intervalos são genericamente denominados **intervalos limitados**. Os cinco últimos intervalos são chamados **ilimitados**. Também se utiliza um apelo geométrico muito forte para eles, quando se denomina $[a, +\infty)$ **semi-reta direita fechada** (ou seja, com a origem – a – incluída) ou ainda quando $(-\infty, b)$ é chamado **semi-reta esquerda aberta** (já que se excluiu sua origem). Todas essas correspondências entre Álgebra e Geometria são muito úteis, e devem ser bem usadas sempre que necessário em nível elementar. Finalmente, o intervalo total $(-\infty, +\infty)$ é a própria reta real.

Nunca se deve esquecer que, já que os intervalos são conjuntos, é possível (e muito comum) operar com eles. Todas as operações de conjuntos definidas anteriormente podem ser aplicadas a intervalos numéricos. Assim, mais uma vez, a representação geométrica dos intervalos é fundamental, concomitantemente com o domínio das definições daquelas operações.

É possível também considerar o caso em que $a = b$, diferentemente da definição geral, que exige $a < b$. Nessa situação, $[a, b] = [a, a] = \{a\}$ é denominado **intervalo degenerado**. Todos os demais intervalos limitados reduzir-se-iam, neste caso, ao conjunto vazio, como é imediato verificar. Também é imediato que, no caso em que $a > b$, *todos os intervalos limitados acima seriam vazios*. Exs.:

a) $[-3, -3] = \{-3\}$.

b) $(4, 4] = \{x \in R: 4 < x \leq 4\} = \phi$ (é impossível que um número real seja, simultaneamente, maior que 4 e não superior a 4).

c) $(1, 1) = \{x \in R: 1 < x < 1\} = \phi$.

d) $(7, 3) = \{x \in R: 7 < x < 3\} = \{x \in R: x > 7 \text{ e } x < 3\} = \phi$

Obs.: É trivial (apesar de muito importante) notar que, por exemplo, $(-3, 7]$ **não é o conjunto** $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$. De fato, este último conjunto é finito, o que contrasta com a proposição seguinte.

Todo intervalo não degenerado é infinito. Com efeito, basta notar que, se $a < b$, então $a < \frac{a+b}{2} < b$ (prove isto!). Portanto, em qualquer intervalo não degenerado, sempre é possível encontrar uma infinidade de elementos, notando, sucessivamente, que:

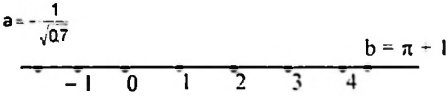
$a < \frac{a+b}{2} \Rightarrow a < \frac{a+\frac{a+b}{2}}{2} < \frac{a+b}{2}$, bem como $\frac{a+b}{2} < \frac{\frac{a+b}{2}+b}{2} < b$, o que significa que, dados dois extremos, a e b, distintos, podem ser encontrados mais dois números, $a_1 = \frac{a+\frac{a+b}{2}}{2}$ e $b_1 = \frac{\frac{a+b}{2}+b}{2}$, ambos diferentes entre si, bem como de a e de b. Finalmente, é só estender tal processo indefinidamente, encontrando: $a < ... < a_1 < \frac{a+b}{2} < b_1 < ... < b$ (infinitos elementos entre a e b).

Deve ser ressaltado também que os símbolos $-\infty$ e $+\infty$ **NÃO REPRESENTAM NÚMERO ALGUM**. Quando se utiliza a notação $(6, +\infty)$, por exemplo, simplesmente se está interassado no conjunto dos números reais maiores que 6, tais como: 6, 000001; 6,9; 7; π^2; 24^{69}; 69^{24};$(24!)^{69!}$, etc. A simbologia $+\infty$ indica, *apenas*, que tal conjunto *não possui um maior elemento*. Não existe o maior número real superior a 6: sempre é possível encontrar um real maior ainda. Ou seja: se $x > 6$, existe $y > x$ (e, obviamente, $y > x$). Basta escolher $y = x + 1$. Considerações análogas devem ser feitas para a simbologia $-\infty$.

1.10.5. DENSIDADE DE Q E DE Q^C EM R

Diz-se que um subconjunto X de R é **denso em R** quando todo intervalo real aberto (a, b) contém pelo menos um elemento de X. Noutros termos, dados os reais quaisquer $a < b$, X é denso em r quando for possível encontrar $x \in X$, tal que $a < x < b$. Ex.:

O conjunto $C_R^Z = \overline{Z}$ é denso em R. De fato, sejam $a < b$ números reais. Entre a e b há no máximo um número finito de inteiros. Já que (a, b) é infinito, deve então haver infinitos números não inteiros, x, tais que $a < x < b$. Ou seja, dados $a < b$ reais quaisquer, existe algum $x \notin Z \Leftrightarrow x \in \overline{Z}$, tal que $a < x < b$.



Como é finita a quantidade de inteiros entre dois reais distintos, mas é infinita a quantidade de reais entre eles, intuitivamente (e de fato!) deve haver (e há) uma infinidade de números não inteiros entre eles.

É possível provar rigorosamente que **o conjunto dos números racionais, assim como o conjunto dos números irracionais, são ambos densos em R. Ou seja, dados arbitrariamente dois números reais distintos, sempre é possível encontrar um número racional e um número irracional entre eles.**

A demonstração formal deste teorema não cabe num curso deste nível, mas a idéia intuitiva contida nela sim. Suponha-se que $a < b$. Intuitivamente, quanto menor a diferença positiva $b - a$ (quanto mais próximos estiverem os reais dados) mais "problemático" parece ser encontrar um racional e um irracional entre eles.

Mas a saída é a seguinte. Por menor que seja $b - a > 0$ (e, conseqüentemente, por maior que seja $\frac{1}{b-a}$, ainda positivo), sempre existe um número **natural** q, de forma que $q > \frac{1}{b-a} > 0$. Assim, dados os reais arbitrários, $a < b$, pode-se escolher um natural q, para o qual $0 < \frac{1}{q} < b - a$. Ora, $b - a$ representa o comprimento do segmento de extremos em a e em b. É, portanto, sempre possível criar um segmento menor ainda, *submúltiplo inteiro da unidade*, qual seja, o de medida $\frac{1}{q}$. Dessa forma, dentre os infinitos racionais da forma $\frac{p}{q}$, com p também inteiro, algum vai ter que "cair" dentro de (a, b). De fato,

suponha-se que $\frac{p_0}{q}$ seja o maior racional não superior ao real a (podendo ser igual a "a"), isto é, $\frac{p_0}{q} \leq a$ e $\frac{p}{q} \leq a \Rightarrow \frac{p}{q} \leq \frac{p_0}{q}$ (a parte rigorosa é mostrar que sempre existe tal $\frac{p_0}{q}$). Assim, $\frac{p_0+1}{q} > a$. Além disso, $\frac{p_0+1}{q} < b$. Em verdade, caso $\frac{p_0+1}{q} \geq b$, ocorreria que $\frac{p_0}{q} \leq a < b \leq \frac{p_0+1}{q}$, do que se concluiria que $b - a \leq \frac{p_0+1}{q} - \frac{p_0}{q} = \frac{1}{q}$ (algebricamente, vem do fato de: $a \geq \frac{p_0}{q}$ e $\frac{p_0+1}{q} \geq b \Rightarrow a + \frac{p_0+1}{q} \geq \frac{p_0}{q} + b$; geometricamente, significaria que o segmento [a, b] estaria contido no segmento $\left[\frac{p_0+1}{q}, \frac{p_0}{q}\right]$), o que é um absurdo, haja vista que $0 < \frac{1}{q} < b - a$. Tem-se, por conseguinte, que $a < \frac{p_0+1}{q} < b$, o que significa que, pelo menos, o racional $\frac{p_0+1}{q}$ está em (a, b). Note-se que praticamente tudo depende da escolha inicial do natural q. Serviriam, também, q +1, q + 2, q + 3, ..., que simplesmente melhorariam a precisão obtida. Ou, ainda, "encolheriam" o segmento de medida 1/q.

Sejam, por exemplo, $a = \sqrt{3}$ e b = 1,74. Então: $b - a = 1{,}74 - 1{,}73205... > 0{,}001 = 1/1000 = 1/q$. Ou seja, escolheu-se q = 1000 (qualquer natural maior serviria também!). É fácil perceber que $p_0 = 1732$ é o maior natural do conjunto $X = \left\{p \in Z : \frac{p}{q} \leq a\right\}$, pois 1733/1000 = 1,733 > $\sqrt{3}$ (ou seja, com o próximo inteiro, já não se tem mais uma aproximação p/q *por falta* de a).

1,732 1,733
$\sqrt{3}$ 1,74

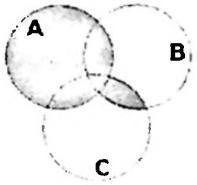
Desse modo, $\frac{p_0}{q}$ = 1,732 é a melhor aproximação por falta de $\sqrt{3}$, com quatro dígitos (isto é, para q = 1000). Assim, $\frac{p_0+1}{q}$ = 1,733 já supera $\sqrt{3}$, mas ainda é inferior a 1,74. Há pelo menos o racional $\frac{p_0+1}{q}$ em (a, b).

Para encontrar um irracional entre a e b, basta utilizar o mesmo raciocínio anterior, só que no lugar de escolher q de modo a ter $q > \frac{1}{b-a} > 0$, escolham-se um inteiro q e um irracional qualquer α para os quais valham as relações $q > \frac{\alpha}{b-a} > 0 \Leftrightarrow b - a > \frac{\alpha}{q}$. Analogamente ao que foi feito acima, como o segmento de comprimento $\frac{\alpha}{q}$ é menor que a medida do segmento [a, b], irremediavelmente algum número da forma $p.\frac{\alpha}{q} = \alpha.\frac{p}{q}$, com p natural, vai ter que "cair" em (a, b). Sendo α irracional e os números da forma $\frac{p}{q}$ racionais não nulos, acabou-se de encontrar pelo menos um irracional, $\alpha.\frac{(p_0+1)}{q}$, em que p_0 é encontrado como na situação precedente, entre a e b.

Exercícios

1) (Cefet/PR-2003) Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4, 5}; B = {4, 5, 6, 7}; C – A = {7, 8, 9}; C – B = {3, 8, 9} e A ∩ B ∩ C = {4}, o número de elementos do conjunto C é:
a) 6. b) 7. c) 3. d) 4. e) 5.

2) (Cefet/PR-2004) Marque a alternativa que possui a expressão que representa a região sombreada do diagrama de Venn, abaixo.



a) (A ∪ B) ∩ (A ∪ C).
b) (A ∩ B) ∪ (A ∪ C).
c) (A ∪ B) ∪ A.
d) A ∪ (B ∪ C).
e) (A ∪ B) ∩ (B ∪ C).

3) (Ciaba-94) Seja A = {1,{2},{1,2}}. Considere as afirmações:
(I) $1 \in A$
(II) $2 \in A$
(III) $\varnothing \in A$
(IV) $\{1,2\} \subset A$
Estão corretas as afirmações:
a) I e II b) I e III c) III e IV
d) III e) I

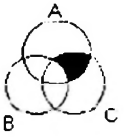
4) (Ciaba-95) Sejam A = [3,4[, B = [–1,5[e C =]2,5[. O conjunto $C_B A \cup (C - A)$ é:
a) $\{x \in R / -1 \le x < 3 \cup 4 \le x < 5\}$
b) $\{x \in R / -1 < x \le 3 \cup 4 \le x \le 5\}$
c) $\{x \in R / -1 \le x \le 3 \cup 4 < x \le 5\}$
d) $\{x \in R / -1 < x < 3 \cup 4 < x < 5\}$
e) $\{x \in R / -1 \le x \le \cup 4 \le x \le 5\}$

5) (Ciaba-95) Num grupo de 99 esportistas, 40 jogam Vôlei; 20 jogam Vôlei e "Futevôlei"; 22 jogam "Futevôlei" e Basquete; 11 jogam as 3 modalidades. O número de pessoas que jogam "Futevôlei" é igual ao número de pessoas que jogam basquete. O número de pessoas que jogam "Futevôlei" ou Basquete e não jogam vôlei é:
a) 55 c) 57 e) 59
b) 56 d) 58

6) (Ciaba-96) Dados os conjuntos:
$A = \{x \in R / -2 < x \le 4\}$
$B = \{x \in R / -1 \le x < 3\}$
$C = \{x \in R / -3 \le x < 5\}$
$D = \{x \in R / x \ge 0\}$
A resultado de $(A \cap C_C^R) \cup (D \cap C_A^R)$ é:
a) [3,4] b)]–2,–1[∪ [3,4]
c) [–2,–1] ∪ [3,5[d)]–2,4] ∪ [5,+∞[
e)]–3,–1]

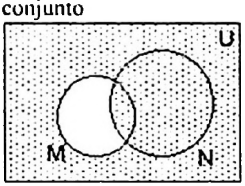
7) (UFPE-2003) Numa pesquisa de mercado, foram entrevistados consumidores sobre suas preferências em relação aos produtos A e B. Os resultados da pesquisa indicaram que:
- 310 pessoas compram o produto A;
- 220 pessoas compram o produto B;
- 110 pessoas compram os produtos A e B;
- 510 pessoas não compram nenhum dos dois produtos.
Indique o número de consumidores entrevistados, dividido por 10.

8) (EEAR-2004) A região assinalada no diagrama corresponde a



a) (B ∪ C) ∩ A. b) (B ∩ C) ∪ A.
c) (A – B) ∩ C. d) C – (A ∩ B).

9) (EEAR-2004) No diagrama, o hachurado é o conjunto



a) complementar de (M ∪ N) em relação a U.
b) complementar de (M – N) em relação a U.
c) complementar de (M ∩ N) em relação a U.
d) (M – N) ∪ (N – M).

10) (EEAR-2002) Dados os conjuntos A = {1, 2, 3, 4}, B = {3, 4, 5} e C = {1, 2, 5}. Ao determinar

o conjunto M, tal que: $A \cup M = \{1, 2, 3, 4\}$, $B \cup M = \{3, 4, 5\}$, $C \cup M = A \cup B$, podemos concluir que M é um conjunto
a) vazio. c) que possui dois elementos.
b) unitário. d) que possui três elementos.

11) (EEAR-2002) Seja P o conjunto dos retângulos, Q o conjunto dos quadrados e L o conjunto dos losangos. É correto afirmar que
a) $L \cap P = L - P$ c) $L \cap Q = P$
b) $L \cap Q = L - Q$ d) $L \cap P = Q$

12) (EEAR-2003) Sejam os conjuntos $A = \{x \in N / x \text{ é múltiplo de } 2\}$, $B = \{x \in Z / -2 < x \leq 9\}$ e $C = \{x \in \Re / x \geq 5\}$. A soma dos elementos que formam o conjunto $(A \cap B) - C$ é
a) 9. b) 6. c) 3. d) 1.

13) (ESPM-2004) Uma pesquisa envolvendo 800 habitantes de uma cidade revelou que 35% deles lêem diariamente o jornal A; 60% lêem o jornal B e que 120 entrevistados não lêem nenhum dos dois jornais. O número de pessoas entrevistadas que lêem os dois jornais é:
a) 60; d) 120;
b) 80; e) 140.
c) 100;

14) (IBMEC-2000) No computador central de uma empresa existem dois arquivos principais independentes, A e B. Internamente a eles há ainda dois arquivos auxiliares, um de agenda e outro de controle, que atuam em A e B, conjuntamente ou não.
Recentemente, um "vírus de computador" infectou igualmente os arquivos A e B e após uma análise técnica mais apurada verificou-se o seguinte:
· 6% do arquivo de agenda foi infectado;
· 6% do arquivo de controle foi infectado;
· 4% dos arquivos de agenda ou controle em A foram infectados;
· 5% dos arquivos de agenda ou controle em B foram infectados;
· 2% exclusivamente do arquivo de agenda em A foi infectado;
· 1% exclusivamente do arquivo de agenda em B foi infectado;
· 1% exclusivamente do arquivo de controle em B foi infectado.
Desse modo, a porcentagem dos arquivos de agenda e controle que foram infectados em A é de:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

15) (IBMEC-2001) Dentre os investimentos de "alto risco" podemos destacar os de "mercado de derivativos". No levantamento estatístico do perfil de investidores de "alto risco" foram obtidos os seguintes resultados:
• 60% desses investidores são homens;
• 55% desses investidores são mulheres ou investiram em "mercado de derivativos".
Logo, podemos afirmar que a porcentagem de homens que investiram em "mercado de derivativos" é de:
a)15% b) 10% c) 45% d) 30% e) 60%

16) (IBMEC-2002) Numa certa empresa, em cada 100 funcionários, 85 possuem cartão de crédito, 70 possuem telefone celular, 75 possuem automóvel e 80 possuem computador portátil. Logo, o número mínimo dos que, simultaneamente, possuem cartão de crédito, telefone celular, automóvel e computador portátil é, em porcentagem, de:
a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

17) (IBMEC-2002) Dentre as 100 pessoas que trabalham em uma certa empresa, 30 consomem um produto A, 60 consomem um produto B e 80 consomem um produto C. Qual é o maior número possível de pessoas que não consomem nem o produto A e nem o produto B?
a) 50 b) 40 c) 30 d) 20 e) 10

18) (Mackenzie-99) A e B são dois conjuntos tais que $A - B$ tem 30 elementos, $A \cap B$ tem 10 elementos e $A \cup B$ tem 48 elementos. Então o número de elementos de $B - A$ é :
a) 8 b) 10 c) 12 d) 18 e) 22

19) (Mackenzie-99) I) Se $\{5; 7\} \subseteq A$ e $A \subseteq \{5; 6; 7; 8\}$, então os possíveis conjuntos A são em número de 4 .
II) Supondo A e B conjuntos quaisquer, então sempre temos $(A \cap \varnothing) \cup (B \cup \varnothing) = A \cup B$.
III) A soma de dois números irracionais pode ser racional.
Das afirmações acima:
a) I , II e III são verdadeiras.
b) apenas I e II são verdadeiras.

c) apenas III é verdadeira.
d) apenas II e III são verdadeiras.
e) apenas I e III são verdadeiras.

20) (PUC/MG-2000) Considere os conjuntos $A = \{x \in IR / -2 < x < 3\}$, $B = \{x \in IR / 0 \leq x \leq 5\}$ e $C = A - B$. O número de elementos inteiros de C é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

21) (PUC/MG-2002) Considere os seguintes conjuntos de números naturais: $A = \{x \in IN / 0 \leq x \leq 25\}$ e $B = \{x \in IN / 16 \leq x < 25\}$. O número de elementos do conjunto $A \cap B$ é:
a) 9 b) 10 c) 11 d) 12

22) (PUC/PR-2003) Em uma pesquisa feita com 120 empregados de uma firma, verificou-se o seguinte:
- têm casa própria: 38
- têm curso superior: 42
- têm plano de saúde: 70
- têm casa própria e plano de saúde: 34
- têm casa própria e curso superior: 17
- têm curso superior e plano de saúde: 24
- têm casa própria, plano de saúde e curso superior: 15

Qual a porcentagem dos empregados que não se enquadram em nenhuma das situações anteriores?
a) 25% b) 30% c) 35%
d) 40% e) 45%

23) (PUC/MG-98) Se $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq y\}$ e se $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2 - x\}$, então $A \cap B$ é igual a
a) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \geq 1\}$
b) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | x \leq 1\}$
c) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y \leq 1\}$
d) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2 - x \text{ e } x \leq 1\}$
e) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 | y = 2 - x \text{ e } y \leq 1\}$

24) (PUC/MG-2002) A diferença de dois conjuntos, indicada por $M - P$, é o conjunto dos elementos de M que não são de P, e a interseção de dois conjuntos, indicada por $M \cap P$, é o conjunto dos elementos comuns a M e P. Se $A =]-2, 5[$, $B =]-3, 3[$ e $C =]0, +\infty[$ são intervalos reais, a quantidade de números inteiros pertencentes ao conjunto $(A \cap B) - C$ é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3

25) (UECE-2003) Se A é um conjunto finito, seja n(A) o número de elementos de A. Sejam X, Y e Z três conjuntos tais que: $n(X) = 100$, $n(Y) = 90$, $n(Z) = 80$, $n(X - (Y \cup Z)) = 50$, $n(X \cap Y \cap Z) = 10$ e $n(X \cap Y) = n(X \cap Z) = n(Y \cap Z)$. Nestas condições o número de elementos que pertencem a mais de um conjunto é:
a) 70 b) 80 c) 90 d) 100

26) (UEPA-Prise-2005) "Cabelo e vestuário são itens que se destacam no rol de preocupações das adolescentes que costumam freqüentar as 'baladas' belenenses"- é o que aponta a pesquisa realizada com 650 meninas, na faixa etária entre 15 e 19 anos. Destas, 205 comparecem a esse tipo de festa se adquirem um traje inédito; 382 se fazem presentes após uma boa "escova" no cabeleireiro; 102 aparecem nos locais onde acontecem as "baladas" com traje inédito e depois de uma "escova" no cabeleireiro. Pergunta-se: quantas são as adolescentes consultadas que não se preocupam em ir ao cabeleireiro fazer "escova", nem em vestir uma roupa inédita?
a) 39 b) 63 c) 102 d) 165 e) 177

27) (UEPA-Prise-2005) Em conseqüência da aquisição de hábitos nada saudáveis, como sedentarismo e alimentação excessivamente calórica, Camilla, Daniela e Giselle estão engordando. Para combater o sobrepeso, resolveram seguir uma dieta e praticar exercícios físicos. Porém, devido ao intenso ritmo dos estudos dedicados ao cumprimento das tarefas escolares, estão com dificuldades para destinar um horário em que, juntas, as três possam freqüentar a mesma academia. Os horários disponíveis de cada uma correspondem aos seguintes intervalos fechados: Camilla, das 17h às 20h; Daniela, das 18h às 21h; Giselle, de 16h às 19h. Neste caso, o intervalo que corresponde ao horário disponível comum às três para a prática de exercícios físicos é:
a) [16; 17] b) [17; 18] c) [18; 19]
d) [19; 20] e) [20; 21]

28) (UFAL-2002) Considere os conjuntos $A =]-\infty, 2]$, $B = [-3, 4]$ e $C =]-1, 3[$ para analisar as afirmativas abaixo.
0 0 - $A \cap B = [-3, 2]$
1 1 - $B \cup C = C$

2 2 - A − C =] − ∞, −1]
3 3 - [2, 5] ⊂ A
4 4 - O complementar de C em relação a B é [− 3, −1] ∪ [3, 4]

29) (UFAL-2003) Dados A = [−1, 2[, B =]2, 4] e C = [−3, 3], determine o conjunto (C − A) ∪ B.

30) (UFBA-2002) Numa academia de ginástica que oferece várias opções de atividades físicas, foi feita uma pesquisa para saber o número de pessoas matriculadas em alongamento, hidroginástica e musculação, chegando-se ao resultado expresso a seguir:
Alongamento: 109
Hidroginástica: 203
Musculação: 162
Alongamento e hidroginástica: 25
Alongamento e musculação: 28
Hidroginástica e musculação: 41
As três atividades: 5
Outras atividades: 115
Com base nessas informações, pode-se concluir:
(01) A pesquisa envolveu 500 pessoas.
(02) 61 pessoas estavam matriculadas apenas em alongamento.
(04) 259 pessoas estavam matriculadas em alongamento ou musculação.
(08) 89 pessoas estavam matriculadas em pelo menos duas das atividades indicadas na tabela.
(16) O número de pessoas matriculadas apenas em hidroginástica corresponde a 28,4% do total de pessoas envolvidas na pesquisa.

31) (UFC-2003) Sejam M e N conjuntos que possuem um único elemento em comum. Se o número de subconjuntos de M é igual ao dobro do número de subconjuntos de N, o número de elementos do conjunto M ∪ N é:
a) o triplo do número de elementos de M.
b) o triplo do número de elementos de N.
c) o quádruplo do número de elementos de M.
d) o dobro do número de elementos de M.
e) o dobro do número de elementos de N.

32) (UFCG-2004) Em uma das Olimpíadas Campinense de Matemática (realizada anualmente pelo Departamento de Matemática e Estatística da UFCG), foi feita uma pesquisa para se conhecer o índice de acertos nas 1ª e 2ª questões da prova referente ao nível 1 (alunos de 5ª e 6ª séries). A pesquisa revelou que 1320 candidatos acertaram a primeira questão, 860 candidatos erraram a segunda, 1200 acertaram as duas e 540 acertaram apenas uma das duas questões. Sabendo-se que 2480 candidatos tentaram resolver as duas primeiras questões, faça um diagrama de Venn e responda quantos alunos acertaram nenhuma das duas questões pesquisadas.

33) (UFES-2003) Numa pesquisa de mercado sobre a venda de três produtos X, Y e Z constatou-se que 38% dos entrevistados compram o produto X, 27% compram o produto Y e 35% compram o produto Z. Constatou-se também que 19% compram os produtos X e Y, 20% compram X e Z e 14% compram Y e Z. Além disso, constatou-se que, dentre os entrevistados que compram algum desses três produtos, 20% não compram o produto X. Nessa pesquisa, o percentual dos entrevistados que compram os produtos X, Y e Z é
a) 8% b) 9% c) 10% d) 11% e) 12%

34) (UFES-2005) Uma empresa tem 180 funcionários. Dentre os funcionários que torcem pelo Flamengo, 25% também torcem pelo Cruzeiro. Dentre os funcionários que torcem pelo Cruzeiro, 1/8 também torcem, simultaneamente, pelo Flamengo e pelo Rio Branco. Nessas condições,
A) mostre que, no máximo, 16 funcionários da empresa torcem, simultaneamente, pelo Flamengo, pelo Cruzeiro e pelo Rio Branco.
B) admitindo que, dentre os funcionários da empresa,
- 80 torcem pelo Flamengo,
- 20 torcem pelo Rio Branco e não torcem nem pelo Flamengo e nem pelo Cruzeiro,
- 60 não torcem nem pelo Flamengo, nem pelo Cruzeiro e nem pelo Rio Branco,

Calcule o número de funcionários que torcem, simultaneamente, pelo Flamengo, pelo Cruzeiro e pelo Rio Branco.

35) (UFLA-2000) Dados os conjuntos
$A = \{ x : x \in Z \text{ e } |x| \leq 2 \}$ e $B = \{ y : y \in Z \text{ e } -1 \leq y \leq 3 \}$
O conjunto $(A \times B) \cap (B \times A)$ é:
(Sugestão: tem-se que $A \times B \cap C \times D = (A \cap C) \times (B \cap D)$)
a) $\{ (x, y) : x \in Z, \ y \in Z \text{ e } -1 \leq x \leq 2, \ -1 \leq y \leq 3 \}$

b) $\{(x, y) : x \in Z,\ y \in Z\ e\ -2 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 3\}$
c) $\{(x, y) : x \in Z,\ y \in Z\ e\ -2 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 2\}$
d) $\{(x, y) : x \in Z,\ y \in Z\ e\ 0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 2\}$
e) $\{(x, y) : x \in Z,\ y \in Z\ e\ -1 \le x \le 2,\ -1 \le y \le 2\}$

36) (UFLA-2002) Seja P o conjunto das pessoas em uma festa. Para cada pessoa $x \in P$, vamos definir o subconjunto $A_x \subset P$ como o conjunto dos amigos de x, isto é, $A_x = \{ y \in P \ ;\ y \text{ é amigo de } x \}$

Estamos considerando aqui que, se x é amigo de y, então y também é amigo de x e também que $x \in A_x$ (x é amigo de si próprio).

Assinale a alternativa INCORRETA.

a) Se x e y têm um amigo em comum, então $A_x \cap A_y \neq \varnothing$
b) Se a interseção de todos os subconjuntos A_x é não vazia $\left(\bigcap_{x \in P} A_X \neq \varnothing \right)$, então existe alguém que é amigo de todas as pessoas na festa
c) Se $\bigcap_{x \in P} A_X \neq \varnothing$, então existe uma pessoa z, tal que $A_z = P$
d) Se $x \in A_y$ e $y \in A_z$ então, necessariamente, $x \in A_z$
e) $\bigcup_{x \in P} (A_X - \{x\})$ pode ser diferente de P, pois pode ocorrer que alguém não possui amigos na festa.

37) (UFLA-2002) Sobre os conjuntos A, B, C e D, afirma-se $(A \cap B) \cup (C \cap D) = \varnothing$
então, pode-se concluir que a opção CORRETA é:

a) os conjuntos A e C são vazios.
b) O conjunto $A \cup B$ é vazio.
c) os conjuntos $A \cap B$ e $C \cap D$ são vazios.
d) Dos quatro conjuntos, dois são vazios.
e) Os quatro conjuntos são disjuntos dois a dois.

38) (UFLA-2004) O número de elementos da união de dois conjuntos é dado por
$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|$
em que $|A|$ significa o número de elementos do conjunto A.

Assinale a fórmula CORRETA do número de elementos da união de três conjuntos.

a) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B \cap C|$
b) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| + |A \cap B \cap C|$
c) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| + |A \cap B \cap C|$
d) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C|$
e) $|A \cup B \cup C| = |A| + |B| + |C| - |A \cap B| - |A \cap C| - |B \cap C| - |A \cap B \cap C|$

39) (UFLA-2004) Sejam os conjuntos A = {r, s, t, u, v, w }
B = {u, v, w, x, y, z}
C = {s, u, y, z}
D = {u, v}
E = {s, u}
F = {s}
Se X é um desses conjuntos e se sabe que $X \not\subset A$ e $X \not\subset C$, então:
a) X = B b) X = D c) X = E
d) X = F e) X = C

40) (UFPB-2005) Sejam $A = \{x \in R \mid 0 \le x \le 2\}$ e $B = \{x \in R \mid 0 \le x \le 3\}$. Quantos pares ordenados, cujas coordenadas são todas inteiras, existem no produto cartesiano A × B ?
a) 12 b) 10 c) 9 d) 8 e) 6

41) (UFPB-2005) Três instituições de ensino, aqui denominadas por A, B e C, oferecem vagas para ingresso de novos alunos em seus cursos. Encerradas as inscrições dos candidatos, verificou-se que exatamente 540 deles se inscreveram para cursos de A e B, 240 para cursos de A e C, e 180 para cursos de A, B e C. Quantos candidatos se inscreveram em cursos de A e também em cursos de B ou C?
a) 700 c) 950 e) 600
b) 900 d) 500

42) (UFPB-2004) O conjunto $\{x \in \mathbb{R};\ -2 \le x < 3\}$ está contido em
a) $\{x \in \mathbb{R};\ -x \ge -3 \text{ e } -x < -2\}$
b) $\{x \in \mathbb{R};\ |x| \le 2\}$
c) $\{x \in \mathbb{R};\ |x| \le 3\}$
d) $\{x \in \mathbb{R};\ 0 \le x + 1 \le 4\}$
e) $\{x \in \mathbb{R};\ |x| < 1 \text{ ou } |x| \ge 4\}$

43) (UFRJ-99) Uma amostra de 100 caixas de pílulas anticoncepcionais fabricadas pela Nascebem S.A. foi enviada para a fiscalização sanitária. No teste de qualidade, 60 foram

aprovadas e 40 reprovadas, por conterem pílulas de farinha. No teste de quantidade, 74 foram aprovadas e 26 reprovadas, por conterem um número menor de pílulas que o especificado. O resultado dos dois testes mostrou que 14 caixas foram reprovadas em ambos os testes. Quantas caixas foram aprovadas em ambos os testes?

44) (UFRN-95) Dados os conjuntos $A = \{x \in IR: x > 2\}$ e $B = \{x \in IR; x < 4\}$, assinale a sentença correta:

A) $A \cup B = \{x \in /R; 2 < x < 4\}$

B) $A \cup B = /R$

C) $A \cap B = \{3\}$

D) $A \cap B = \{x \in /R; 2 \leq x \leq 4\}$

E) $A \cap B = \emptyset$

45) (UFRN-96) De dois conjuntos *A* e *B*, sabe-se que:

I) O número de elementos que pertencem a $A \cup B$ é *45*;

II) *40%* destes elementos pertencem a ambos os conjuntos;

III) O conjunto *A* tem *9* elementos a mais que o conjunto *B*.

Então, o número de elementos de cada conjunto é:

a) $n(A) = 27$ e $n(B) = 18$

b) $n(A) = 30$ e $n(B) = 21$

c) $n(A) = 35$ e $n(B) = 26$

d) $n(A) = 36$ e $n(B) = 27$

e) $n(A) = 38$ e $n(B) = 29$

46) (EPCAr-2003) Numa turma de 31 alunos da EPCAR, foi aplicada uma Prova de Matemática valendo 10 pontos no dia em que 2 alunos estavam ausentes. Na prova, constavam questões subjetivas: a primeira, sobre conjuntos; a segunda, sobre funções e a terceira, sobre geometria plana. Sabe-se que dos alunos presentes

nenhum tirou zero;

11 acertaram a segunda e a terceira questões;

15 acertaram a questão sobre conjuntos;

1 aluno acertou somente a parte de geometria plana,

e 7 alunos acertaram apenas a questão sobre funções.

É correto afirmar que o número de alunos com grau máximo igual a 10 foi

a) 4 c) 6

b) 5 d) 7

47) (EPCAr-2004) Dados os conjuntos A, B e C tais que $[A - (A \cap B)] \cap B = C$, pode-se afirmar, necessariamente, que

a) $C \not\subset (AXB)$

b) $n(A - B) < n(B)$

c) $n(A \cap C) > n(A \cap B) - n(B)$

d) $n(B \cap C) = n(C)$

48) (EPCAr-2005) Analise as afirmativas abaixo:

I – Sejam A, B e C três conjuntos não vazios. Se $A \subset B$ e $C \cap A \neq \emptyset$, então, $(A \cap C) \subset B$.

II – Se A e B são dois conjuntos não vazios tais que $A \cup B = \{x \in IN \mid 1 \leq x \leq 8\}$, $A - B = \{1, 3, 6, 7\}$ e $B - A = \{4, 8\}$, então $A \cap B = \emptyset$.

III – Dados os números reais x tais que: $x \notin \{x \in IR \mid -1 < x \leq 2\}$, $\{x \in IR \mid x < 0\}$ e $\{x \in IR \mid x \geq 3\}$; então, a união de todos os números reais x é o conjunto $\{x \in IR \mid x \leq -1 \text{ ou } x \geq 3\}$.

É correto afirmar que

a) apenas II é verdadeira.

b) apenas I é falsa.

c) todas são falsas.

d) II e III são falsas.

49) Se $A = \{a, b, \{a\}, \{b\}, \{a, b\}\}$, em que a e b são números reais quaisquer, então o (s) possível (eis) valor (es) do número de elementos de A é (são):

a) 1 ou 5. b) 2 ou 5. c) 3 ou 5.

d) 2 ou 3. e) apenas 5.

50) (CBERJ-91) Dado o conjunto $A = \{\phi; 1; 2; \{1\}; \{2\}\}$ a afirmação FALSA é:

a) $\phi \in A$ b) $\phi \subset A$ c) $\{1\} \subset A$

d) $(\{1\} \cup \{2\}) \in A$ e) $2 \in A$

51) (PUC/SP) Se $A = \phi$ e $B = \{\phi\}$, então:

a) $A \in B$ b) $A \cup B = \phi$ c) $A = B$

d) $A \cap B = B$ e) $B \subset A$

52) (Vunesp-84) Suponhamos que:

$A \cup B = \{a, b, c, d, e, f, g, h\}$

$A \cap B = \{d, e\}$

$A - B = \{a, b, c\}$

Então:

a) $B = \{f, g, h\}$ b) $B = \{d, e, f, g, h\}$

c) $B = \{a, b, c, d, e\}$ d) $B = \{d, e\}$

e) $B = \phi$

53) Determine os conjunto A, B e C que satisfazem as seguintes seis condições:
1ª) $A \cup B \cup C = \{z, x, v, u, t, s, r, q, p\}$
2ª) $A \cap B = \{r, s\}$
3ª) $B \cap C = \{s, x\}$
4ª) $C \cap A = \{s, t\}$
5ª) $A \cup C = \{p, q, r, s, t, u, v, x\}$
6ª) $A \cup B = \{p, q, r, s, t, u, x, z\}$

54) (IME-76) Considere um conjunto E e três de seus subconjuntos, A, B, C. Sendo M um subconjunto de E, represente por M_L o seu complemento em relação a E. Determine E e os subconjuntos A, B, C, sabendo que A e C são disjuntos e que:

$(A \cup B \cup C)_L = \{4, 6\}$ ... (1)

$B \cap C = \{7\}$ ... (2)

$A \cup B = \{1, 2, 7, 9, 10\}$ ... (3)

$A \cup C = \{1, 2, 3, 5, 7, 8, 9, 10\}$ ... (4)

$B_L = \{3, 4, 5, 6, 8, 9\}$ ... (5)

55) (Colégio Naval-97) Considere o conjunto A dos números primos positivos menores do que 20 e o conjunto B dos divisores positivos de 36. O número de subconjuntos do conjunto diferença B – A é
a) 32 b) 64 c) 128 d) 256 e) 512

56) (Colégio Naval-87) Considere os conjuntos A = {1, {1}, 2} e B = { 1, 2, {2}} e as cinco afirmações:
I- A – B = {1}
II- {2} ⊂ (B – A)
III- {1} ⊂ A
IV- $A \cap B = \{1, 2, \{1, 2\}\}$
V- B – A = {{2}}
Logo,
a) todas as afirmações estão erradas
b) se existe uma afirmação correta
b) as afirmações ímpares estão corretas
d) as afirmações III e V estão corretas
e) as afirmações I e IV são as únicas incorretas

57) (UFPE-84) Seja $S = \{S_1, S_2, S_3\}$ o conjunto de sintomas de uma determinada moléstia. Em geral, um portador desta moléstia apresenta apenas um subconjunto não vazio de S.
Assinale a única alternativa correspondente ao número de subconjuntos de S que poderão apresentar os pacientes desta moléstia.
a) 7 b) 8 c) 16 d) 15 e) 14

58) (Escola Naval-89) Considere os conjuntos A = { x } e B = { x, { A } } e as proposições
I. { A } ∈ B
II. { x } ∈ A
III. A ∈ B
IV. B ⊂ A
V. { x, A } ⊂ B
As proposições FALSAS são
a) I, III e V b) II, IV e V c) II, III, IV e V
d) I, III, IV e V e) I, III e IV

59) (Colégio Naval-85) A, B e C são respectivamente os conjuntos dos múltiplos de 8, 6 e 12, podemos afirmar que o conjunto $A \cap (B \cup C)$ é o conjunto dos múltiplos de:
a) 12 b) 18 c) 24 d) 48 e) 36

60) (Colégio Naval-87) Dados dois conjuntos A e B tais que:
- o número de subconjuntos de A está compreendido entre 120 e 250.
- B tem 15 subconjuntos não vazios.

O produto cartesiano de A por B tem
a) 8 elementos b) 12 elementos
c) 16 elementos d) 28 elementos
e) 32 elementos

61) (EPCAr-90) Se um conjunto A tiver 4 elementos e um conjunto B tiver 3 elementos, então o conjunto de todas as partes do conjunto A x B (A cartesiano B) terá um número de elementos equivalente a:
a) 2^3 b) 2^4 c) 2^7 d) 2^{12} e) 2^{14}

62) (Colégio Naval-00) Dados dois conjuntos A e B tais que $n(A \cup B) = 10$, $n(A \cap B) = 5$ e $n(A) > n(B)$, pode-se afirmar que a soma dos valores possíveis para $n(A - B)$ é
a) 10 b) 11 c) 12 d) 13 e) 14

63) (Colégio Naval-87) Representando-se por n (X) o número de elementos de um conjunto X, considere dois conjuntos A e B tais que n (A ∩ B)

= 4, n (A – B) = 5 e n (A x B) = 36. Podemos afirmar que n (A ∪ B) é igual a:
a) 4 b) 6 c) 7 d) 9 e) 10

64) (Colégio Naval-88) Dados os conjuntos M, N e P tais que N ⊂ M, n (M ∩ N) = 60% n (M), n (N ∩ P) = 50 % n (N), n (M ∩ N ∩ P) = 40% n (P) e n (P) = x% n (M), o valor de x é:
a) 80 b) 75 c) 60 d) 50 e) 45

65) (FGV/SP) Sejam A, B e C conjuntos finitos. O número de elementos de A ∩ B é 30, o número de elementos de A ∩ C é 20 e o número de elementos de A ∩ B ∩ C é 15.
Então o número de elementos de A ∩ (B ∪ C) é igual a:
a) 35 b) 15 c) 50 d) 45 e) 20

66) (Colégio Naval-97) Dados os conjuntos A, B e C, tais que $n(B \cup C) = 20$, $n(A \cap B) = 5$, $n(A \cap C) = 4$, $n(A \cap B \cap C) = 1$ e $n(A \cup B \cup C) = 22$, o valor de $n[A - (B \cap C)]$ é:
a) 10 b) 9 c) 8 d) 7 e) 6

67) (Colégio Naval-86) Considere os conjuntos M pares ordenados (x, y) que satisfazem a equação $(a_1x + b_1y + c_1) \cdot (a_2x + b_2x + c_2) = 0$ e N dos pares ordenados (x, y) que satisfazem o sistema

$$\begin{cases} a_1x + b_1y + c_1 = 0 \\ a_2x + b_2y + c_2 = 0 \end{cases}$$

sendo a_1, b_1, c_1, a_2, b_2, $c_2 \neq 0$, pode-se afirmar que
a) M = N b) M ∪ N = M c) M ∩ N = ϕ
d) M ∪ N = N e) M ∩ N ≠ ϕ

68) (IME-75) Em uma pesquisa realizada entre 500 pessoas foram obtidos os seguintes dados:
200 pessoas gostam de música clássica;
400 pessoas gostam de musica popular;
75 pessoas gostam de música clássica e de música popular.

Verifique a consistência ou inconsistência dos dados desta pesquisa.

69) Trinta e seis alunos de uma determinada escola prestaram exames vestibulares em duas universidades, A e B, sendo que, desse grupo de alunos, todos os aprovados em A também foram aprovados em B e o número de aprovados em B foi o triplo do número de aprovados em A. Se foram aprovados menos da metade e mais de um terço desses alunos, quantos não foram aprovados em nenhuma das duas universidades?
a) 15 b) 20 c) 21 c) 30 e) 31

70) (Colégio Naval-84) Num colégio verificou-se que 120 alunos não têm pai professor; 130 alunos não têm mãe professora e 5 têm pai e mãe professores. Qual é o número de alunos do colégio, sabendo-se que 55 alunos possuem pelo menos um dos pais professor e que não existem alunos irmãos?
a) 125 b) 135 c) 145 d) 155 e) 165

71) (FUVEST/SP) Depois de n dias de férias, um estudante observa que:
a) choveu 7 vezes, de manhã ou à tarde;
b) quando chove de manhã, não chove à tarde;
c) houve 5 tardes sem chuva;
d) houve 6 manhãs sem chuva.
Podemos afirmar então que n é igual a:
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 e) 11

72) (Colégio Naval-95) Num concurso, cada candidato fez uma prova de Português e uma de Matemática. Para ser aprovado, o aluno tem que passar nas duas provas. Sabe-se que o número de candidatos que passaram em Português é o quádruplo do número de aprovados no concurso; dos que passaram em Matemática é o triplo do número de candidatos aprovados no concurso; dos que não passaram nas duas provas é a metade do número de aprovados no concurso; e dos que fizeram o concurso é 260. Quantos candidatos foram reprovados no concurso?
a) 140 b) 160 c) 180 d) 200 e) 220

73) (AMAN-90) A fórmula A – B = A ∩ B' pode definir a diferença de dois conjuntos usando somente as operações de interseção e complemento. Da mesma forma, A ∪ B pode ser representada por:
a) [A ∩ B'] ∪ [B ∩ A'] ∪ [A ∩ B]
b) [A ∩ B'] – B
c) [A ∩ B'] ∩ [B ∩ A'] ∪ [A ∩ B]
d) [A ∪ B'] – B
e) [A + B]

74) (FGV-80) Numa pesquisa de mercado, foram entrevistadas várias pessoas acerca de suas preferências em relação a 3 produtos: A, B e C. Os resultados da pesquisa indicaram que:
210 pessoas compram o produto A.

210 pessoas compram o produto B.
250 pessoas compram o produto C.
20 pessoas compram os 3 produtos.
100 pessoas não compram nenhum dos 3 produtos.
60 pessoas compram os produtos A e B.
70 pessoas compram os produtos A e C.
50 pessoas compram os produtos B e C.
Quantas pessoas foram entrevistadas?
a) 670 b) 970 c) 870 d) 610 e) 510

75) Na questão anterior quantas pessoas compraram exatamente um produto? E quantas compraram exatamente dois produtos?

76) Um total de 34 estudantes estrangeiro veio ao Brasil. Todos eles visitaram Manaus, São Paulo ou Salvador. 16 deles visitaram Manaus; 16 visitaram São Paulo e 11 visitaram Salvador. Desses estudantes, 5 visitaram Manaus e Salvador e, desses 5, 3 visitaram também São Paulo. É orreto, então, afirmar que
) 27 estudantes visitaram apenas uma dessas três apitais.
o) 29 estudantes visitaram apenas uma dessas três capitais.
c) 3 estudantes visitaram exatamente duas capitais.
d) é possível ter certeza da quantidade de alunos que visitaram apenas Salvador.
e) os dados da questão são incoerentes entre si.

77) (Colégio Naval-83) Numa cidade constatou-se que as famílias que consomem arroz não consomem macarrão. Sabe-se que: 40% consomem arroz; 30% consomem macarrão; 15% consomem feijão e arroz; 20 % consomem feijão e macarrão; 60% consomem feijão.
A porcentagem correspondente às famílias que não consomem esses três produtos é:
a) 10% b) 3% c) 15%
d) 5% e) 12%

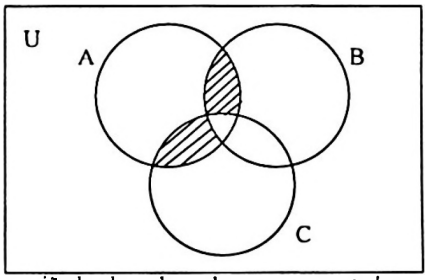
78) (FGV-2004) Numa cidade do interior do estado de São Paulo, uma prévia eleitoral entre 2.000 filiados revelou as seguintes informações a respeito de três candidatos A, B, e C, do Partido da Esperança (PE), que concorrem a 3 cargos diferentes:
I. todos os filiados votaram e não houve registro de voto em branco, tampouco de voto nulo;
II. 280 filiados votaram a favor de A e de B;
III. 980 filiados votaram a favor de A ou de B, mas não de C;
IV. 420 filiados votaram a favor de B, mas não de A ou de C;
V. 1.220 filiados votaram a favor de B ou de C, mas não de A;
VI. 640 filiados votaram a favor de C, mas não de A ou de B;
VII. 140 filiados votaram a favor de A e de C, mas não de B.
Determine o número de filiados ao PE que:
a) votaram a favor dos 3 candidatos.
b) votaram a favor de apenas um dos candidatos.

79) (Colégio Naval-89) Num grupo de 142 pessoas foi feita uma pesquisa sobre três programas de televisão A, B e C e constatou-se que:
I – 40 não assistem a nenhum dos três programas;
II – 103 não assistem ao programa C;
III – 25 só assistem ao programa B;
IV – 13 assistem aos programas A e B;
V – O número de pessoas que assistem somente aos programas B e C é a metade dos que assistem somente a A e B;
VI – 25 só assistem a 2 programas; e
VII – 72 só assistem a um dos programas.
Pode-se concluir que o número de pessoas que assistem:
a) ao programa A é 30.
b) ao programa C é 39.
c) aos 3 programas é 6.
d) aos programas A e C é 13.
e) aos programas A ou B é 63.

80) (UnB-01) Em uma pesquisa realizada com um grupo de 100 turistas, constatou-se que 42 falam inglês, 12 falam inglês e italiano, 18 falam espanhol e inglês e 16 falam espanhol e italiano. O número de turistas que falam espanhol é precisamente 50% maior do que o número daqueles que falam italiano. Com base nessas afirmações, julgue os itens a seguir.
(1) O número de turistas que falam italiano é igual a 2/3 do número dos que falam espanhol.
(2) Se 9 dos turistas consultados falam as três línguas, espanhol, inglês e italiano, enquanto 5 deles não falam nenhuma dessas línguas, então mais da metade dos turistas falam espanhol.
(3) Se 9 dos turistas consultados falam as três línguas, espanhol, inglês e italiano, enquanto 5

deles não falam nenhuma dessas línguas, então exatamente 24 desses turistas falam apenas inglês.
(4) *(não obrigatório para esta lista de exercícios)* Se todos os turistas falam pelo menos uma das três línguas, então, escolhendo-se aleatoriamente um dos turistas, a chance de ele falar italiano será maior que 30%

81) (Colégio Naval-92) Considere o diagrama onde A, B, C e U são conjuntos:

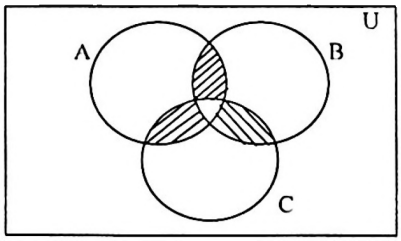


A região hachurada pode ser representada por:

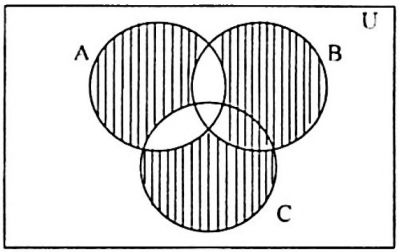
a) $(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cap C)$
b) $(A \cap B) \cup (A \cap C) - (B \cup C)$
c) $(A \cup B) \cup (A \cap C) \cup (B \cap C)$
d) $(A \cup B) - (A \cup C) \cap (B \cap C)$
e) $(A - B) \cap (A - C) \cap (B - C)$

82) (Colégio Naval-93) Sejam U o conjunto das brasileiras, A o conjunto das cariocas, B o conjunto das morenas e C o conjunto das mulheres de olhos azuis.
O diagrama que representa o conjunto de mulheres morenas ou de olhos azuis, e não cariocas; ou mulheres cariocas e não morenas e nem de olhos azuis é

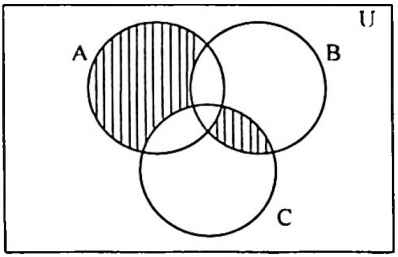
a)



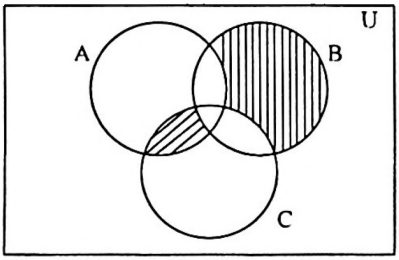
b)



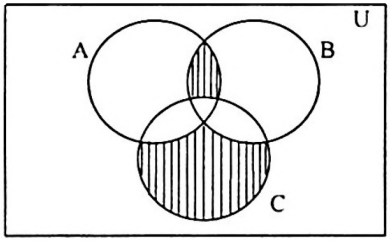
c)



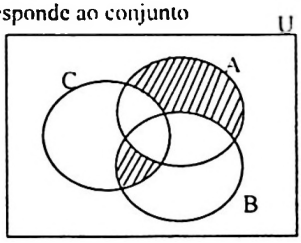
d)



e)



83) (Colégio Naval-87) Considere os conjuntos A, B, C e U no diagrama abaixo. A região hachurada corresponde ao conjunto



a) $[A-(B\cap C)]\cup[(B\cap C)-A]$

b) $C^{[(A\cup B)-C]}_{(A\cup B)\cup C}$

c) $C^{[(A\cap B)\cup(A\cap C)]}_{A\cup(B\cap C)}$

d) $(A\cup B)-[(A\cap B)\cup(A\cap C)]$

e) $[(B\cap C)-A]\cup(A-B)$

84) (AFA-98) Em um grupo de n cadetes da Aeronáutica, 17 nadam, 19 jogam basquetebol, 21 jogam voleibol, 5 nadam e jogam basquetebol, 2 nadam e jogam voleibol, 5 jogam basquetebol e voleibol e 2 fazem os três esportes. Qual o valor de n, sabendo-se que todos os cadetes desse grupo praticam pelo menos um desses esportes?
a) 31 b) 37 c) 47 e) 51

85) (AFA-98) Entrevistando 100 oficiais da AFA, descobriu-se que 20 deles pilotam a aeronave TUCANO, 40 pilotam o helicóptero ESQUILO e 50 não são pilotos. Dos oficiais entrevistados, quantos pilotam o TUCANO e o ESQUILO?
a) 5 b) 10 c) 15 d) 20

86) (AFA-2004) No conjunto universo S dado por $S = \{(x, y) \in IR \times IR \mid 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le 1\}$, é definido o subconjunto $M = \{(x, y) \in IR \times IR \mid 0 \le x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$.

Pode-se afirmar que C_S^M é igual a

a) $\{(x, y)\in IR \times IR \mid 0 < x < 1 \text{ e } \frac{1}{2} < y < 1\}$

b) $\{(x, y)\in IR \times IR \mid 0 < x \le \frac{1}{2} \text{ e } \frac{1}{2} \le y \le 1\}$

c) $\{(x, y)\in IR \times IR \mid \frac{1}{2} < x \le 1 \text{ e } 0 \le y \le \frac{1}{2}\}$

d) $\{(x, y)\in IR \times IR \mid 0 \le x \le 1 \text{ e } \frac{1}{2} < y \le 1\}$

87) (AFA-2005) Considere um subconjunto A contido em IR* e constituído por y elementos dos quais
i) 13 são múltiplos de 4
ii) 7 são múltiplos de 10
iii) 5 são múltiplos de 20 e
iv) 9 são números ímpares.
É correto dizer que y é um número
a) par menor que 19 c) primo maior que 21
b) ímpar entre 10 e 20 d) múltiplo de 12

88) (EsPCEx-2000) É correto afirmar que:
a) A soma e a diferença de dois números naturais é sempre um número natural.
b) O produto e o quociente de dois números inteiros é sempre um número inteiro.
c) A soma de dois números racionais é sempre um número racional.
d) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
e) O produto de dois números irracionais é sempre um número irracional.

89) (EsPCEx-2000) Se $A = |-5, 1|$ e $B = \left]-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{5}\right[$, então os conjuntos A – B e $A \cap B$ são, respectivamente

a) $\left[-5, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ e $\left]-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right[$

b) $\left[-5, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right]$ e $\left]-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{5}\right[$

c) $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right[$ e $\left]-\frac{\sqrt{2}}{3}, \sqrt{5}\right[$

d) $\left[1, \sqrt{5}\right]$ e $\left]-5, -\frac{\sqrt{2}}{3}\right[$

e) $\left]-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right[$ e $\left[-\frac{\sqrt{2}}{3}, 1\right]$

90) (EsPCEx-2001) Dados os conjuntos:

R = {x / x é um número real}
Q = {x / x é um número racional}
N = {x / x é um número natural}
P = {x / x é um número primo}

e considerado as afirmações:
(I) $P \subset Q$
(II) $R \subset Q$
(III) $P \supset Q$
(IV) $6 \in (R \cap Q \cap N \cap P)$
(V) $5 \in (Q \cap P)$

estão corretas as afirmações:
a) I e II d) IV e V
b) II e V e) I e V
c) III e IV

91) (EsPCEx-2003) Quaisquer que sejam o número irracional a e o número racional b, pode-se afirmar que, sempre,
A) $a \cdot a$ é irracional.
B) $a^2 + b$ é racional.
C) $a \cdot b$ é racional.
D) $b - a + \sqrt{2}$ é irracional.
E) $b + 2a$ é irracional.

92) (EsPCEx-2004) Dados os números $a = \sqrt{3} - 1$, $b = \sqrt{3} + 1$ e $c = 0{,}1333...$, pode-se afirmar que:
a) a.b é um número irracional.
b) (a – b).c é um número irracional.
c) (a+b).c é um número racional.
d) b.c é um número racional.
e) a.b.c é um número racional.

93) (ITA-96) Sejam A e B subconjuntos não vazios de R, e considere as seguintes afirmações:
I- $(A - B)^C \cap (B \cup A^C)^C = \varnothing$
II- $(A - B^C)^C = B - A^C$
III- $|(A^C - B) \cap (B - A)|^C = A$
Sobre essas afirmações podemos garantir que:
a) Apenas a afirmação I é verdadeira.
b) Apenas a afirmação II é verdadeira.
c) Apenas a afirmação III é verdadeira.
d) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Apenas as afirmações I e III são verdadeiras.

94) (ITA-99) Sejam E, F, G e H subconjuntos não vazios de R. Considere as afirmações:
I - Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $E \subset F$ e $G \subset H$.
II - Se $(E \times G) \subset (F \times H)$, então $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$.
III - Se $(E \times G) \cup (F \times H) = F \times H$, então $(E \times G) \subset (F \times H)$.
Então:
a) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
b) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
c) Apenas as afirmações (II) e (III) são verdadeiras.
d) Apenas as afirmações (I) e (II) são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são verdadeiras.

95) (ITA-00) Denotemos por n(X) o número de elementos de um conjunto finito X. Sejam A, B e C conjuntos tais que $n(A \cup B) = 8$, $n(A \cup C) = 9$, $n(B \cup C) = 10$, $n(A \cup B \cup C) = 11$ e $n(A \cap B \cap C) = 2$. Então $n(A) + n(B) + n(C)$ é igual a :
a) 11 b) 14 c) 15 d) 18 e) 25

96) (ITA-01) Sejam X, Y e Z subconjuntos próprios de R, não-vazios. Com respeito às afirmações:
I. $x \cap \{[Y \cap (X \cup Y)^C] \cup [X \cup Y^C]^C\}$
II. Se $Z \subset X$ então $(Z \cup Y) \cup (X \cup (Z^C \cap Y)) = X \cup Y$.
III. Se $(X \cup Y)^C \subset Z$ então $Z^C \subset X$.
temos que:
a) apenas I é verdadeira.
b) apenas I e II são verdadeiras.
c) apenas I e III são verdadeiras.
d) apenas II e III são verdadeiras
e) todas são verdadeiras.

97) (ITA-03) Sejam U um conjunto não-vazio e A $\subset$ U, B $\subset$ U. Usando apenas as definições de igualdade, reunião, interseção e complementar, prove que:
I – Se $A \cap B = \varnothing$, então $B \subset A^C$.
II – $B \setminus A^C = B \cap A$.

98) (ITA-04) Considere as seguintes afirmações sobre o conjunto $U = \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$:
I - $\varnothing \in U$ e $n(U) = 10$.
II - $\varnothing \subset U$ e $n(U) = 10$.
III – $5 \in U$ e $\{5\} \subset U$.
IV – $\{0, 1, 2, 5\} \cap \{5\} = 5$
Pode-se dizer, então, que é (são) verdadeira(s).
a) apenas I e III b) apenas II e IV c) apenas II e III d) apenas IV e) todas as afirmações

99) (ITA-04) Seja A um conjunto não-vazio.
a) Se $n(A) = m$, calcule $n(P(A))$ em termos de m.
b) Denotando $P^1(A) = P(A)$ e $P^{k+1}(A) = P(P^k(A))$, para todo número natural $k \geq 1$, determine o menor k, tal que $n(P^k(A)) \geq 65000$, sabendo que $n(A) = 2$.

100) Suponha-se que sejam verdadeiras as seguintes afirmações:
I. Os bebês não são lógicos.
II. Quem consegue amestrar um crocodilo não é desprezado.
III. Pessoas ilógicas são desprezadas.
É possível afirmar que, dentre as proposições a seguir, a verdadeira deve ser:
a) Nenhum bebê é desprezado.
b) Existem bebês que sabem amestrar crocodilos.

c) Bebês não sabem amestrar crocodilos.
d) Pessoas que sabem amestrar crocodilos podem não ser lógicas.
e) Toda pessoa desprezada é um bebê.

101) Considerem-se como verdadeiras as seguintes proposições:
I. Todos os advogados são ricos.
II. Poetas são temperamentais.
III. Carlos é um advogado.
IV. Nenhuma pessoa temperamental é rica.
Pode-se garantir, nestas condições, que deve ser correta a afirmação:
a) Todas as pessoas ricas são advogadas.
b) Todas as pessoas temperamentais são poetas.
c) Existem advogados poetas.
d) Carlos não é um poeta.
e) Existem poetas ricos.

02) Uma pessoa cética quanto às boas intenções a humanidade afirma que 70% dos homens são desonestos, 70% são intolerantes e 70% são violentos. Se ela estiver certa, numa amostra perfeita de 100 homens, qual é o número mínimo de pessoas simultaneamente desonestas, intolerantes e violentas?

103) Numa pesquisa realizada em uma turma militar, constatou-se que 60% dos entrevistados desejavam prestar concurso para a ESCOLA NAVAL, 70% para o IME e 80% para o ITA. Sabendo que qualquer dos entrevistados almeja fazer as provas de uma dessas instituições, qual o percentual mínimo de alunos que querem prestar os três concursos?

104) (EN-88) Se 70% da população gostam de samba, 75% de choro, 80% de bolero e 85% de rock, quantos por cento da população, no mínimo, gostam de samba, choro, bolero e rock?
a) 5% b) 10% c) 20% d) 45% e) 70%

105) Provar que, sendo X, Y, Z e W conjuntos, valem as seguintes propriedades:
a) $X \subset Z$ e $Y \subset Z \Rightarrow X \cup Y \subset Z$ e $X \cap Y \subset Z$.
b) $X \subset Z$ e $Y \subset W \Rightarrow X \cup Y \subset Z \cup W$ e $X \cap Y \subset Z \cap W$.
c) $X \cap (Y \cup Z) = (X \cap Y) \cup (X \cap Z)$.
d) $X = X \cup Y \Leftrightarrow Y \subset X$.
e) $X = X \cap Y \Leftrightarrow X \subset Y$.
f) $X \subset Y \Rightarrow (X \cup Z) \subset (Y \cup Z)$.
g) $X \subset Y \Rightarrow (X \cap Z) \subset (Y \cap Z)$.
h) $X \cup Y = X \cap Y \Leftrightarrow X = Y$.
i) $(X \cap Y) \cup Z = X \cap (Y \cup Z) \Leftrightarrow Z \subset X$.
j) $X - Y \subset X$.
k) $X - Y = X \Rightarrow X \cap Y = \phi$.
l) $X - Y = \phi \Rightarrow X \subset Y$.
m) $(X - Y) \cap (X \cap Y) = \phi$.
n) $(X - Y) \cup (X \cap Y) = X$.
o) $X \cap (Y - Z) = (X \cap Y) - Z$.
p) $Y \cap (X - Y) = \phi$.
q) $(X \cup Y) - Z = (X - Z) \cup (Y - Z)$.
r) $(X \cap Y) - Z = (X - Z) \cap (Y - Z)$.
s) $(X \Delta Y) \Delta Z = X \Delta (Y \Delta Z)$.
t) $X \Delta Z = Y \Delta Z \Leftrightarrow X = Y$;
u) $X \Delta Y = \phi \Leftrightarrow X = Y$.

106) Se $A \cup B = A \cup C$, é verdade que $B = C$? Se $A \cap B = A \cap C$, então $B = C$? E se $A \times B = A \times C$, então $B = C$?

107) Dados os conjuntos A e B, seja X um conjunto com as seguintes propriedades:
1ª $X \supset A$ e $X \supset B$.
2ª Se $Y \supset A$ e $Y \supset B$ então $Y \supset X$.
Prove que $X = A \cup B$.

108) Enuncie e demonstre um resultado análogo ao anterior, caracterizando $A \cap B$.

109) Sendo A e B conjuntos, prove que $A \cap B = \phi$ se, e somente se, $A \subset B^C$. Prove também que $A \cup B = U$ se, e somente se, $A^C \subset B$.

110) Prove que se $A \cap X = \phi$ e $A \cup X = U$ então $X = A^C$.

111) Se $A \subset B$, então $B \cap (A \cup C) = (B \cap C) \cup A$ para todo conjunto C. Por outro lado, se existir C de modo que a igualdade acima seja satisfeita, então $A \subset B$.

112) Prove que $A = B$ se, e somente se, $(A \cap B^C) \cup (A^C \cap B) = \phi$.

113) Sejam A, B e C conjuntos quaisquer. Demonstre as afirmações verdadeiras e dê contra-exemplos para as falsas.
a) Se $A \subset B$ e $B \not\subset C$, então $A \not\subset C$.
b) $(A - B)^C = A^C \cap B$.

c) $A - (B - C) = A - (B \cup C)$.
d) $(A \cup B) - C = (A - C) \cup (B - C)$.
e) $(A - B) \cap C = (A \cap C) - (B \cap C)$.
f) Se $X \subset Y$ então $P(X) \subset P(Y)$.
g) Se $X \subset Y$ então $P(Y - X) = P(Y) - P(X)$.
h) $A \subset B$ se, e somente se, $A \cap B^C = \phi$.

114) (ITA-85) Sejam X um conjunto não vazio; A e B dois subconjuntos de X. Definimos $A^C = \{x \in X$ tal que $x \notin A\}$ e $A - B = \{x \in A$ tal que $x \notin B\}$.
Dadas as sentenças:
1 – $A \cap B = \phi \Leftrightarrow A \subset B^C \Leftrightarrow B \subset A^C$, onde "$\Leftrightarrow$" significa "equivalente" e ϕ o conjunto vazio;
2 – Se $X = \mathbb{R}$; $A = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $x^3 - 1 = 0\}$; $B = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $x^2 - 1 = 0\}$ e $C = \{x \in \mathbb{R}$ tal que $x - 1 = 0\}$, então $A = C = B$;
3 – $A - \phi = A$ e $A - B = A - (A \cap B)$;
4 – $A - B \neq A \cap B^C$;
podemos afirmar que está (estão) correta (s):
a) as sentenças nº 1 e nº 3.
b) as sentenças nº 1, nº 2 e nº 4.
c) as sentenças nº 3 e nº 4.
d) as sentenças nº 2, nº 3 e nº 4.
e) apenas a sentença nº 2.

115) (ITA-87) Sejam F e G dois subconjuntos não vazios de $\mathbb{R}$.
Assinale a alternativa CORRETA.
a) Se $F \subset G$ e $G \neq F$, então necessariamente $F = F \cup G$.
b) Se $F \cap G$ é o conjunto vazio, então necessariamente $F \cup G = \mathbb{R}$.
c) Se $F \subset G$ e $G \subset F$, então $F \cap G = F \cup G$.
d) Se $F \cap G = F$, então necessariamente $G \subset F$.
e) Se $F \cap G = G$ e $G \neq \mathbb{R}$, então $(F \cap G) \cup G = \mathbb{R}$.

116) (ITA-89) Sejam A, B e C subconjuntos de $\mathbb{R}$, não vazios, e $A - B = \{p \in \mathbb{R}; p \in A$ e $p \notin B\}$. Dadas as igualdades:
(1) $(A - B) \times C = (A \times C) - (B \times C)$
(2) $(A - B) \times C = (A \times B) - (B \times C)$
(3) $(A \cap B) - A \neq (B \cap A) - B$
(4) $A - (B \cap C) = (A - B) \cup (A - C)$
(5) $(A - B) \cap (B - C) = (A - C) \cap (A - B)$
podemos garantir que
a) 2 e 4 são verdadeiras
b) 1 e 5 são verdadeiras
c) 3 e 4 são verdadeiras
d) 1 e 4 são verdadeiras
e) 1 e 3 são verdadeiras

117) (IME-87) Dados dois conjuntos A e B, define-se $A \Delta B = (A - B) \cup (B - A)$
Prove que dados três conjuntos arbitrários X, Y e Z
$X \cap (Y \Delta Z) = (X \cap Y) \Delta (X \cap Z)$

118) (Colégio Naval-88) Sendo a e b números inteiros quaisquer, $R = \left\{x \middle| x = \frac{a}{b}, b \neq 0\right\}$ e $S = \{2; 1,3; 0,444...; \sqrt{2}\}$, então:
a) $S \subset R$ b) $S \cap R = \phi$ c) $S \cap R$ é unitário d) $S \cap R$ tem dois elementos e) $S - R$ é unitário

119) (Provão-98) Uma das afirmativas abaixo sobre os números naturais é FALSA. Qual é ela?
a) Dado um número primo, existe sempre um número primo maior do que ele.
b) Se dois números não primos são primos entre si, um deles é ímpar.
c) Um número primo é sempre ímpar.
d) O produto de três números naturais consecutivos é múltiplo de seis.
e) A soma de três números naturais consecutivos é múltipla de três.

120) (Colégio Naval-96) Dadas as operações:
$x * y = x + y$; $x \neq y = x - y$ e $x \Delta y = x^y$, o valor da expressão:
$[2 * (8 \neq 12)] * \{[(3 * 2) \neq 5] \Delta [10 * (2 \neq (4 \Delta 2))]\}$
a) Não é um número real b) é igual a –1
c) é igual a – 2 d) é igual a –3
e) é igual a – 4

121) Um subconjunto X de números naturais contém 12 múltiplos de 4, 7 múltiplos de 6, 5 múltiplos de 12 e 8 números ímpares. Qual é o número de elementos de X?

122) (Fuvest-95) Dividir um número por 0,0125 equivale a multiplicá-lo por
a) 1/125 b) 1/8 c) 8
d) 12,5 e) 80

123) (Escola Naval-90) O 1989º algarismo depois da vírgula na expansão decimal de $\frac{5}{39}$ é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 5 e) 8

124) (Colégio Naval-96) Sobre o número $\frac{1937}{8192}$ podemos afirmar que é:
a) uma dízima periódica simples;
b) uma dízima periódica composta;
c) um decimal exato com 12 casas decimais;
d) um decimal exato com 13 casas decimais;
e) um decimal exato com 14 casas decimais.

125) (Colegio Naval-97) Um aluno, efetuando a divisão de 13 por 41, foi determinando o quociente até a soma de todos os algarismos por ele escritos, na parte decimal, foi imediatamente maior ou igual a 530. Quantas casas decimais ele escreveu?
a) 144 b) 145 c) 146
d) 147 e) 148

126) (Escola Naval-88) Assinale a alternativa verdadeira:
a) $-1^2 = 1$ e $0{,}999... < 1$
b) $-1^2 = -1$ e $0{,}999... < 1$
c) $-1^2 = 1$ e $0{,}999... = 1$
d) $-1^2 = -1$ e $0{,}999... = 1$
e) $0{,}999... > 1$

127) (Provão-99) Sobre a dízima periódica 0,999..., pode-se afirmar que:
a) é um número irracional.
b) 0,333... = 0,999...
c) 0,999... = 1.
d) $0{,}999 = \frac{999}{1000}$
e) 0,999... não pode ser igual a 1, porque sua geratriz não pode ser um número inteiro.

128) (PUC/SP-82) Sabe-se que o produto de dois números irracionais pode ser um número racional. Um exemplo é:
a) $\sqrt{12}.\sqrt{3} = \sqrt{36}$ b) $\sqrt{4}.\sqrt{9} = \sqrt{6}$
c) $\sqrt{3}.\sqrt{1} = \sqrt{3}$ d) $\sqrt{2}.2 = \sqrt{8}$
e) $\sqrt{2}.\sqrt{3} = \sqrt{6}$

129) (Colégio Naval-99) Dos números:
I. 0,4333...
II. 0,101101110...
III. $\sqrt{2}$
IV. O quociente entre o comprimento e o diâmetro de uma mesma circunferência.
São racionais:
a) Todos b) Nenhum
c) Apenas 1 deles d) Apenas 2 deles
e) Apenas 3 deles

130) (Provão-98) Assinale a única alternativa verdadeira, a respeito de números reais.
a) A soma de dois números irracionais é sempre um número irracional.
b) O produto de dois números irracionais é sempre um numero racional.
c) Os números que possuem representação decimal periódica são irracionais.
d) Todo número racional tem uma representação decimal finita.
e) Se a representação decimal infinita de um número é periódica, então esse número é racional.

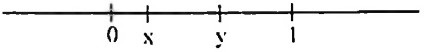
131) (Colégio Naval-87) O número $\sqrt{1+\sqrt[3]{4}+\sqrt[3]{16}}$ está situado entre:
a) 1 e 1,5 b) 1, 5 e 2 c) 2 e 2,5
d) 2, 5 e 3 e) 3,5 e 4

132) (Colégio Naval-98) $\frac{2}{\sqrt{5}-\sqrt{3}} - \frac{2}{\sqrt[3]{2}}$ é um número que está entre:
a) 0 e 2 b) 2 e 4 c) 4 e 6
d) 6 e 8 e) 8 e 10

133) (Vunesp-94) Sejam x e y dois números reais não nulos e distintos entre si. Das alternativas abaixo, a única necessariamente verdadeira é:
a) $-x < y$ b) $x < x + y$ c) $y < x.y$
d) $x^2 \neq y^2$ e) $x^2 - 2.x.y + y^2 > 0$

134) (FGV-83) Sejam a, b e c números reais quaisquer. Assinale a afirmação verdadeira:
a) $a > b \Leftrightarrow a^2 > b^2$ b) $a > b \Leftrightarrow ac > bc$
c) $\sqrt{a^2+b^2} \geq a$ d) $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$
e) $a^2 = b^2 \Leftrightarrow a = b$

135) (Fuvest-91) Na figura estão representados geometricamente os números reais 0, x, y e 1. Qual a posição do numero xy?



a) À esquerda de 0. b) Entre 0 e x
c) Entre x e y. d) Entre y e 1
e) À direita de 1.

136) (Fuvest-92) Se $-4 < x < -1$ e $1 < y < 2$, então xy e $\frac{2}{x}$ estão no intervalo:

a) $]-8,-1[$ b) $]-2,-\frac{1}{2}[$ c) $]-2,-1[$

d) $]-8,-\frac{1}{2}[$ e) $]-1,-\frac{1}{2}[$

137) (Colégio Naval-98) Observe as afirmações abaixo sobre os números reais x e y e assinale a opção correta.

I. $\frac{1}{x} < y$, então $x > \frac{1}{y}$, $xy \neq 0$

II. $\sqrt{\frac{x}{y}} = \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{y}}$, $y \neq 0$

III. $x^2 > y$, então $x > \sqrt{y}$

a) Apenas I é falsa.
b) Apenas II é falsa.
c) Apenas III é falsa.
d) I, II, III são falsas.
e) Apenas I e II são falsas.

138) (Colégio Naval-88) Se a e b são números reais diferentes de zero e $a - b > 0$, então, necessariamente,

a) $a^2 > b^2$ b) $\frac{a}{b} > 1$ c) $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geq 2$

d) $a - 2 < b - 2$ e) $1 - a < 1 - b$

139) (ITA-95) Uma vez que, para todo $x \geq 1$ e $n \in N$, vale a desigualdade $x^n > n(x-1)$, temos como conseqüência que, para $0 < x < 1$ e $n \in N$, tem-se que:

a) $x^{n-1} < [n(1+x)]^{-1}$
b) $x^{n-1} < [(n+1)(1+x)]^{-1}$
c) $x^{n-1} < [n^2(1-x)]^{-1}$
d) $x^{n-1} < [(n+1)(1-x)]^{-1}$
e) $x^{n-1} < [n(1-x)]^{-1}$

140) (Unicamp-94)

a) Se a_1 é um valor aproximado por excesso da raiz quadrada de um número inteiro $N > 1$, isto é, $a_1 > \sqrt{N}$, mostre que $\frac{N}{a_1}$ é valor aproximado por falta da mesma raiz, ou seja, $\frac{N}{a_1} < \sqrt{N}$.

b) Mostre que a média aritmética a_2 entre a_1 e $\frac{N}{a_1}$ também é uma aproximação de $\sqrt{N}$ por excesso, isto é, $a_2 - \sqrt{N} > 0$.

c) Mostre que a_2 é uma aproximação de $\sqrt{N}$ melhor do que a_1, isto é, $\sqrt{N} < a_2 < a_1$. Mais do que isto, mostre que $a_2 - \sqrt{N} < \frac{a_1 - \sqrt{N}}{2}$, vale dizer, o erro que se comete aproximando $\sqrt{N}$ por a_2 é menor do que a metade do erro da aproximação anterior.

141) (Provão-98) Um aluno deu a solução seguinte para a inequação abaixo:

$$\frac{(x+3)(x-2)}{x-1} > x \quad (1)$$

$(x+3)(x-2) > x^2 - x$ (2)
$x^2 + x - 6 > x^2 - x$ (3)
$x - 6 > -x$ (4)
$2x > 6$ (5)
$x > 3$ (6)

Mas 0, por exemplo, satisfaz a inequação (1) e não é maior do que 3. Assim, houve um erro na passagem de:

a) (1) para (2)
b) (2) para (3)
c) (3) para (4)
d) (4) para (5)
e) (5) para (6)

142) (Provão-98) Se $x^2 \geq 1$, então:

a) $x \geq \pm 1$ b) $x = \pm 1$ c) $x \geq 1$
d) $x \geq 1$ ou $x \leq -1$ e) $x \leq 1$ e $x \geq -1$

143) (Colégio Naval-83) Sendo $A = \{x \in N / x^2 - 4 = 0\}$, $B = \{x \in Z / -2 \leq x < 5\}$ e $C = \{x \in Z / 0 < \frac{-3x+2}{3} \leq 5\}$

O conjunto $A \cup (B \cap C)$ é:

a) $\{0,2\}$ b) $\{-2,2,1\}$ c) $\{-2,-1,0,2\}$
d) $\{-2,0,3,5\}$ e) $\{-2,0,2,4\}$

144) (Provão-2001) Considere os intervalos fechados A = [1, 3] e B = [2, 4] e as seguintes afirmações:

I. para todo $x \in A$, existe $y \in B$ tal que $x \leq y$;

II. existe $x \in A$ tal que, para todo $y \in B$, $x \leq y$;

III. para todos $x \in A$ e $y \in B$, $x \leq y$;

IV. existem $x \in A$ e $y \in B$ tais que $x \leq y$.

Então:

a) I é falsa b) II é falsa c) III é falsa
d) IV é falsa e) todas são verdadeiras

145) (Provão-2001) O conjunto das soluções da inequação $\frac{1+x}{1-x} \geq 1$ é

a) $[0, \infty)$ b) $[0, 1)$ c) $(1, \infty)$
d) $(-\infty, 0]$ e) $(-\infty, 0] \cup (1, \infty)$

146) a) Mostre, por meio de um exemplo, que existe um numero irracional α tal que α^4 e α^6 são números racionais.

b) Mostre que, se α^7 e α^{12} são racionais, então α é racional.

147) a) Mostre que $\sqrt{4+2\sqrt{3}} = 1+\sqrt{3}$.

b) Mostre que, sendo a, b e $a^2 - b$ números racionais positivos, então vale a identidade:

$$\sqrt{a \pm \sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}},$$

conhecida como "fórmula do radical duplo".

c) Obter racionais a e b, de modo que $\sqrt{18-8\sqrt{2}} = a + b\sqrt{2}$.

148) Seja X um conjunto ordenado qualquer. Provar que, sendo a e b elementos de X:
$a^2 + b^2 = 0 \Leftrightarrow a = b = 0$.

149) Provar que: $0 < a < b \Rightarrow a < \frac{2ab}{a+b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{2} < b$. Provar também que, sendo a e b positivos:

$$\sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \frac{2ab}{a+b} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow \sqrt{ab} = \frac{a+b}{2} \Leftrightarrow a = b.$$

150) Suponha-se que a, b, c, d sejam elementos de um conjunto ordenado X, com b e d positivos. Provar que:

$$\frac{a}{b} < \frac{c}{d} \Rightarrow \frac{a}{b} < \frac{a+c}{b+d} < \frac{c}{d}$$

151) Suponha-se que a, b, c, d sejam números racionais, que m e n sejam inteiros e que $\sqrt[n]{m}$ seja irracional. Provar que:
$a + b\sqrt[n]{m} = c + d\sqrt[n]{m} \Leftrightarrow a = c \text{ e } b = d$.

152) Sejam a, b números racionais positivos. Prove que $\sqrt{a} + \sqrt{b}$ é racional se, e somente se, $\sqrt{a}$ e $\sqrt{b}$ são ambos racionais.

153) Um número positivo é somado com o seu inverso. a) Qual o menor valor possível que pode ser obtido para tal soma? b) Sob que condição?

154) A área de um terreno retangular deve ser de 100 m^2. Quais devem ser as dimensões do terreno (comprimento e largura), de modo que o terreno possua o menor contato possível com o exterior?

155) a) Sabendo que dois números somam 10, qual o maior valor possível para o seu produto?
b) Com 400 metros de arame, deseja-se cercar um terreno na forma de um retângulo. Qual a maior área possível que pode ser obtida em tais condições?

156) Sejam a, b, x e y números positivos, com a e b dados. Prove que, se xy = c (constante conhecida), a soma ax + by assume seu valor mínimo quando $ax = by = \sqrt{abc}$.

157) Deseja-se cavar um buraco retangular com 1 m de largura de modo que o volume cavado tenha 300 m^3. Sabendo que cada metro quadrado de abertura custa 10 reais e cada metro de profundidade custa 30 reais, determinar o comprimento e a profundidade do buraco, a fim de que seu custo seja o menor possível.

2.1. DEFINIÇÕES INICIAIS

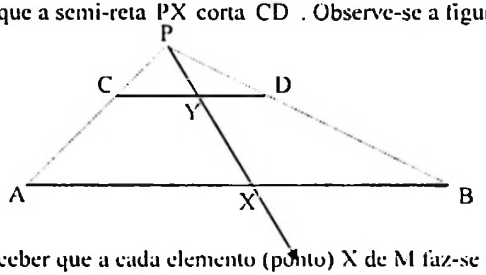
Exemplos:

a) Sejam C o conjunto de todos os clientes de um determinado banco e N o conjunto dos números naturais. Cada cliente de tal banco é "transformado" num número de 11 dígitos (ignorando-se as separações de agência, de conta-corrente ou de dígitos verificadores), que é o modo pelo qual o sistema de processamento de dados da instituição o reconhece. Pois bem, tal correspondência é um exemplo de uma **função** dos elementos **de C** nos elementos que estão **em N**, ou, simplesmente, **uma função de C em N**. Desta forma, por exemplo, o elemento João Firmino, de C, passa a ser "visto" como o número 33722186286, de N. Uma espécie de *transformação*: pessoas transformadas em números. Note-se que esta correspondência é, de fato, uma função, visto que **todo** cliente do banco (elemento de C) **associa-se a um único** número natural (elemento de N), de 11 dígitos. Observe-se, também, que não há necessidade de que todo número natural de 11 dígitos corresponda à conta corrente de algum cliente. É perfeitamente possível que o número 5555555555, por exemplo, não seja associado a cliente algum.

b) Com as mesmas notações do exemplo anterior, suponha-se que alguém tente criar uma função de N em C, de modo que um número natural seja transformado num cliente. É crucial notar que esta tentativa **não surte efeito**, uma vez que comporta **exceções**, isto é, números naturais que não são associados a cliente algum (pois as contas devem ter 11 dígitos). Perceba-se que, embora **não haja ambigüidades**, ou seja, um mesmo natural não é associado a mais de um cliente (dois clientes distintos não podem possuir mesmo número de conta), **não** é possível construir uma função de **N em C**, nas condições dadas, já que "sobram" *elementos no domínio sem imagem*, o que a definição de função *não permite*.

É usual atribuir a denominação ***relação binária*** a uma ***associação qualquer*** entre entes de um conjunto e objetos de outros conjuntos, sem as restrições avessas a exceções ou ambigüidades que uma função possui. Desta maneira, quando uma relação binária entre elementos de um conjunto X e elementos de um conjunto Y satisfaz a duas determinadas condições (**não ambigüidade** e **não exceção**), tem-se o caso particular em que a *relação* de X em Y recebe o nome de *função* de X em Y.

c) Sejam dois segmentos paralelos e não congruentes, M = $\overline{AB}$ e N = $\overline{CD}$. Chamando de P a intersecção das retas $\overline{AC}$ e $\overline{BD}$, considere-se a correspondência que leva cada ponto X de $\overline{AB}$ ao ponto Y, de $\overline{CD}$, em que a semi-reta $\overline{PX}$ corta $\overline{CD}$. Observe-se a figura.



É imediato perceber que a cada elemento (ponto) X de M faz-se corresponder um único elemento Y em N, sem exceções nem ambigüidades. Deste modo, define-se uma função de M em N. Chamando tal função de *f*, utiliza-se a notação $f(X) = Y$ para indicar que o elemento X, do **domínio de** *f* (o conjunto M), foi transformado no elemento Y, do **contradomínio de** *f* (o conjunto N). Uma outra maneira de indicar esta transformação é utilizando a simbologia:

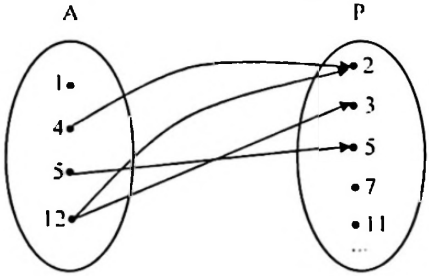
$$X \longmapsto Y = f(X).$$

Diz-se que Y é **a imagem** (ou seja, o resultado da transformação) **de X pela função** *f*.

d) Ainda de acordo com o exemplo anterior, é importante perceber que é possível obter uma função de N em M, de forma análoga à correspondência anterior. Noutros termos, como a cada elemento de N

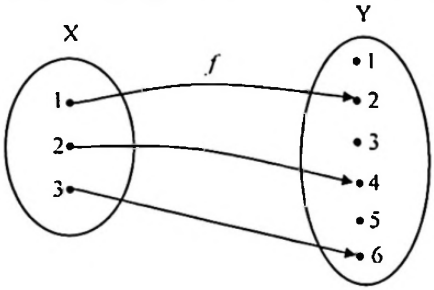
associa-se um único elemento de $M = \overline{PY} \cap \overline{CD}$, tem-se, também, uma função $g: N \to M$ bem definida (a *função inversa* de *f*, do exemplo anterior, como será visto mais adiante).

e) Sejam $A = \{1, 4, 5, 12\}$ e $P = \{p \in N: p \text{ é primo}\}$. Associando-se um elemento "a" de A a um de seus fatores primos "p" em P, nota-se que não é obtida uma função de A em P. De fato: ocorre uma **exceção**, visto que 1 não possui fator primo, logo não é associado a número algum (não tem imagem); como se não bastasse, há também **ambigüidade**, visto que 12 tem dois fatores primos distintos ($12 = 2^2.3$), ou seja, um mesmo elemento do domínio tem mais de uma imagem. Tradicionalmente, é comum representar uma função (ou, mais genericamente, uma *relação*) por meio de diagramas de Euler-Venn ligados por meio de setas, de modo a conectar os elementos do domínio às respectivas imagens no contradomínio, principalmente quando estes conjuntos fundamentais (domínio e contradomínio) são *finitos*. Assim, embora a relação deste exemplo não seja uma função, pode-se representá-la como segue.

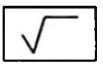


Como será visto no item 2.4, outra maneira (mais eficiente) de representar uma função (ou mesmo uma relação) é por meio de seu *gráfico*.

f) Considerando agora os conjuntos $X = \{1, 2, 3\}$ e $Y = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Pode-se definir uma função $f: X \to Y$, em que $y = f(x) = 2x$, isto é, que leva cada elemento de X ao seu dobro em Y. Perceba-se que, embora "sobrem" elementos em Y sem seta, de cada elemento de X sai exatamente uma seta. Portanto, qualquer elemento de X (sem exceção) possui exatamente uma única imagem em Y (sem ambigüidade).



g) As teclas de calculadoras (principalmente as científicas) estão repletas de funções (com domínio e contradomínio *implícitos*). Por exemplo, é possível encontrar a tecla



que serve para *extrair raízes quadradas* de **números reais não negativos**. É fundamental notar que se trata de uma função, a qual pode ser denominada $\sqrt{\ }$ (ou qualquer outro nome, como *f*, $x^{1/2}$, $\wedge$ *1/2* ou *sqrt* – do inglês *square root*), cujo **domínio** é o conjunto $\mathbf{R_+}$ e cujo **contradomínio** pode ser **R** (ou mesmo R_+). Ou seja, a tecla acima subentende a função $\sqrt{\ }: R_+ \to R$, em que $y = \sqrt{x}$.

Em verdade, as escolhas de domínio e de contradomínio devem ser feitas de modo que sejam observadas as condições para a definição de uma função. Normalmente, procura-se definir o "maior" domínio D possível, de modo que qualquer outro domínio D*, que faça a relação binária virar uma correspondência funcional, esteja contido em D. A este hábito dá-se o nome de **regra do domínio máximo**. É praxe, no caso de funções numéricas elementares de uma variável (objetivo deste curso), utilizar subconjuntos de R, no domínio, e o próprio R (ou um seu subconjunto) no contradomínio.

Quando se digita o número 1024 na entrada da calculadora, o que se está fazendo é "atacar" (com fins de transformá-lo) um valor específico do domínio da função. Ao teclar $\sqrt{}$ (ou ENTER, conforme a calculadora), obtém-se a imagem (saída) do valor inicial. Tal resultado, 32 no caso, é a imagem de 1024 pela função $\sqrt{}$, isto é, corresponde à (única) raiz quadrada (real) de 1024.

Caso se digitem, em seqüência, "11 – 27 =", obter-se-á o valor – 16. Daí, ao teclar $\sqrt{}$, aparecerá uma **mensagem de erro**. Isto se deve ao fato (simples, porém importantíssimo) de **– 16 não ser um elemento do domínio** da função raiz quadrada. Portanto, tal função não pode gerar uma saída (imagem) para este valor. Curioso notar que uma alteração do domínio e do contradomínio da função para R e C, respectivamente, criaria uma outra "função", a qual geraria *dois valores* como saída (ambigüidade): 4i e – 4i, sendo i a unidade imaginária ($i^2 = -1$). No passado, chamava-se uma "função" assim, $\sqrt{} : R \to C$, com $y = \sqrt{x}$ (ou, mais precisamente, $y^2 = x$), de *função plurívoca* (ou ***multívoca***), a qual permitia ambigüidades. Atualmente, porém, reserva-se o termo função apenas para aquilo que, antigamente, era denominado ***função unívoca***, qual seja, a que não permite imagens duplas.

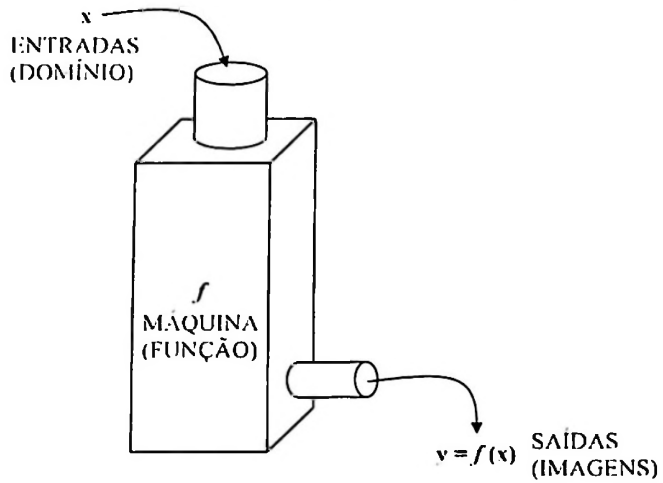
h) A tecla [1/x] ou [x^{-1}] transforma um número **real não nulo** no seu (único) **inverso**. Denominando tal função φ, tem-se a função $\varphi: R^* \to R$, dada pela lei $y = 1/x$. Quando se entra com o número $x = 5$, obtém-se $y = \varphi(5) = 0{,}2$. Quando $x = 0{,}2$, tem-se $y = \varphi(0{,}2) = 5$. Note-s que $\varphi(0)$ **não está definido** (não existe). Finalmente, ressalte-se que não deve haver confusão quanto à simbologia $y = \varphi(x)$, em que x é um elemento qualquer do domínio da função e y é a respectiva imagem de x, pela função φ. Além disso, embora as letras mais utilizadas em Matemática para estes fins sejam x e y, nada impede que se usem outras. O importante é habituar-se ao símbolo $u = \varphi(v)$: agora, *u é a imagem de v por* φ.

Uma metáfora interessante é comparar uma função a uma **máquina de transformação**, como uma máquina de moer carne, que transforma pedaços inteiros de carne em carne moída. Ou ainda como uma máquina de bater açaí, a qual transmuta caroços de açaí em vinho de açaí. Como toda máquina de transformação, **três coisas devem** estar muito bem definidas:

I. O que a máquina aceita na entrada: carne, açaí, números reais, pontos de um segmento de reta, clientes de determinado banco, etc. O importante é que uma máquina só funciona bem (produzindo os resultados esperados) quando a entrada (o insumo) for correta (correto). Não se pode esperar o produto vinho de açaí quando se introduz carne na máquina de bater açaí. No conceito de função, a boa definição da entrada diz respeito ao ***domínio*** da função.

II. O que a máquina produz na sua saída. Corresponde ao ***contradomínio*** da função. É necessário à definição da função, para que haja uma espécie de previsão da natureza das imagens (dos resultados). Assim, não se permitem saídas que não as esperadas (possíveis).

III. Qual a transformação efetivamente produzida pela máquina. Noutros termos, o que a máquina, de fato, faz. Liquefação, moedura, inversão de números, extração de raízes quadradas, fornecimento de velocidade instantânea ou do PIB de um certo país num determinado ano, etc. Matematicamente, corresponde a ***lei da função***, a qual pode ser dada por uma expressão matemática explícita (em geral, equações) ou não.



Não há de confundir-se o conceito de *função f* com o de *f (x)*, isto é, com o conceito de *imagem* de um elemento x do domínio produzida por *f*. Noutras palavras: *f* é uma coisa (é a função), *f (x)* é outra (é o resultado da transformação de x por *f* – a imagem de x por *f*).

É comum, entretanto, fazer referência à "função $f(x) = x^2 - 3x + 2$" ou à "função $g(t) = \frac{t+1}{3t+2}$".

Embora, a rigor, tais expressões estejam *erradas*, pois *f* (x) e g (t) são as respectivas *leis* das funções *f* e g, isto é, as imagens produzidas por tais funções, aquelas frases são consagradas pelo uso. Nestes casos, deve-se ter em mente a **regra do domínio máximo**. Caso seja preciso (ou conveniente) definir corretamente as funções *f* e g, pode-se fazê-lo atentando para os valores de entrada que cada uma aceita. Vê-se que, nestes exemplos, a única restrição é na função g, que não aceita o valor $t = -3/2$ em seu domínio (já que *não existe divisão por zero*). Assim, o correto (embora pedante, em certos casos) seria escrever:

"A função $f: R \to R$, definida por $f(x) = x^2 - 3x + 2$".

"A função $g: R - \{-3/2\} \to R$, dada pela lei $g(t) = \frac{t+1}{3t+2}$".

Observe-se, mais uma vez, que a natureza da lei de uma função é completamente arbitrária, podendo ser uma equação matemática ou mesmo um conjunto de palavras, *desde que não surjam exceções ou ambigüidades*.

Finalmente, note-se que a natureza dos elementos dos conjuntos domínio e contradomínio é também totalmente arbitrária. Deste modo, *números reais* podem ser transformados em *números reais* (caso mais comum, em que a **função é dita real de variável real**), *pontos* podem ser transformados em *pontos* (por exemplo, nas **transformações geométricas**, estudadas mais adiante, no item ...), números complexos podem ser transformados em números reais e vice-versa, gerando as mais variadas espécies de funções. As duas primeiras espécies de funções (*real de variável real* e as *transformações geométricas*) são, sem dúvida, as mais importantes neste curso elementar. Deve-se destacar, porém, que há muitas outras classes de funções, mesmo a mais de uma variável, algumas eventualmente exploradas em vestibulares mais difíceis (como ITA e IME).

Exemplos:

a) Considere-se a função *f* de $R^2 = R \times R$ em R, definida por $f[(x,y)] = 3x - 4y$. É comum escrever $f(x,y) = 3x - 4y$, por simplicidade. Desta maneira, *f* transforma *pares ordenados* de números reais (elementos de R^2) em *números reais*. Com efeito, *f* é uma função porque qualquer que seja o par

ordenado (x, y) sempre há um único valor associado: $3x - 4y$. Assim, por exemplo, $f(2, 4) = -10$ e $f(6, 9) = -18$.

b) Seja g: $\mathbb{R} \to \mathbb{C}$ a *função complexa de variável real*, tal que $g(x) = x + xi$, em que $i^2 = -1$. A cada real x associa-se um único complexo $x + xi$, de tal sorte que $g(3) = 3 + 3i$ e -7 transforma-se em $-7 - 7i$, por exemplo. Assim, de fato, g é uma função.

c) A função M: $\mathbb{C} \to \mathbb{R}$, dada por $M(z) = |z|$, que transforma um número complexo qualquer em seu módulo, é um exemplo de uma *função real de variável complexa*, lembrando que cada número complexo possui um único módulo, o qual, por sua vez, é um número real não negativo. Por exemplo, $M(1 + i) = |1 + i| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}$ e $M(-5 + 12i) = |-5 + 12i| = \sqrt{(-5)^2 + 12^2} = 13$.

c) Sejam *e* um eixo orientado e R o conjunto dos números reais. Conforme visto na definição de R, aceita-se a existência de uma função Ω: $e \to \mathbb{R}$ que associa cada ponto de um eixo orientado a um único número real, bem como a de uma função φ: $\mathbb{R} \to e$ que leva cada número real a um único ponto do eixo orientado. Mais tarde, será visto que as funções Ω e φ são denominadas *funções inversas* uma da outra.

d) A relação h que leva pontos de $\mathbb{R}^3$ em pontos de $\mathbb{R}^2$, de acordo com a lei $h[(x, y, z)] = \left(x + y + z, \sqrt{x + y + z}\right)$ **não define** uma função de $\mathbb{R}^3$ em $\mathbb{R}^2$. De fato, embora $(1, -10, 0)$ seja um elemento do domínio $\mathbb{R}^3$, a sua "imagem" por h, $\left(-9, \sqrt{-9}\right)$, não está definida, pois $\left(-9, \sqrt{-9}\right) \notin \mathbb{R}^2$.

Cabe conhecer (ao término deste curso) as definições e as propriedades válidas para qualquer espécie de função (tais quais a *igualdade* e a *tipologia*), bem como aquelas mais específicas (tais quais a *paridade* e as *propriedades gráficas*), que valem apenas no caso em que se tem função real de variável real.

2.2. IGUALDADE DE FUNÇÕES

De acordo com o exposto, chega a ser intuitiva a definição de igualdade de funções. Duas funções *f*: $A \to B$ e g: $C \to D$, dadas respectivamente por $y = f(x)$ e $y = g(x)$, são iguais quando:

- $A = C$ e $B = D$, ou seja, têm mesmo domínio e mesmo contradomínio;
- $f(x) = g(x)$, $\forall x \in A\ (= C)$. Isto significa que um elemento qualquer do domínio comum às duas funções possui mesma imagem, quer por *f*, quer por g. Noutros termos, as funções *f* e g realizam a mesma transformação.

Assim, as "máquinas funcionais" *f* e g são, na prática, a mesma máquina quando aceitam exatamente as mesmas entradas, quando geram os mesmos tipos de saída e quando realizam o mesmo tipo de transformação, ou seja, se uma mesma entrada é posta em *f* ou em g, o resultado é o mesmo, independentemente da máquina utilizada.

Quando *f* e g são iguais, diz-se, alternativamente, que as funções *f* e g são *idênticas*.

Exemplos:

a) As funções *f*: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, de leis $f(x) = x^2 - 6x + 8$ e $g(x) = (x - 4)(x - 2)$ são iguais, visto que $x^2 - 6x + 8 = (x - 4)(x - 2)$, para todo x real.

b) As funções *f*, g: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ (uma forma opcional – um tanto econômica ou "preguiçosa" – de escrever que *f* e g possuem mesmos domínio e contradomínio), definidas por $f(x, y) = x^3 - y^3$ e $g(x, y) = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$ são idênticas. Tanto faz calcular a imagem do par ordenado $(2, 3)$ – assim como de qualquer outro – por *f* quanto por g: o resultado é sempre o mesmo. No caso, -19.

c) As "funções" $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$ e $g(x) = x + 2$ são iguais? Fatorando o numerador de $f(x)$, é fácil "concluir" que $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = \frac{(x+2)(x-2)}{x-2} = x + 2$, ou seja, que as funções f e g são iguais. No entanto, deve-se ter um cuidado extremo com este tipo de afirmação, uma vez que *a definição de igualdade de funções não se restringe à igualdade de suas leis*. Para começo de conversa, as expressões de $f(x)$ e de $g(x)$ não devem ser confundidas com as funções respectivas, f e g, consoante dito anteriormente. Assim, $g(x) = x + 2$ não é a função g, apesar de este abuso de linguagem ser extremamente comum. Caso se utilize a *regra do domínio máximo*, pode-se escrever corretamente cada uma das funções dadas. Deste modo, f: $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, de lei $f(x) = \frac{x^2 - 4}{x - 2}$, e g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = x + 2$, são, de fato, as funções f e g. Fica evidente por que $f \neq g$: embora ambas realizem a mesma transformação (qual seja, transformar um elemento do domínio em um outro número real, duas unidades superior), e possuam mesmo contradomínio, não têm mesmo domínio. A definição de igualdade não é satisfeita. Embora $g(2) = 4$, $f(2)$ não existe, sendo impossível, de tal modo, que $f(2) = g(2)$. Isto ressalta um dos problemas de confundir uma função com sua regra (lei).

d) Ainda de posse do exemplo anterior, caso se defina a função g^*: $\mathbb{R} - \{2\} \to \mathbb{R}$, tal que $g^*(x) = x + 2$, deve-se notar que, agora sim, $f = g^*$. Note-se, porém, que $g^* \neq g$, por possuírem domínios distintos. Observe-se, também, que o domínio de g^* é um subconjunto do domínio de g.

O que foi feito neste exemplo é muito comum e deve ser destacado. Dada uma função qualquer f: $X \to Y$, de lei $y = f(x)$, denomina-se **restrição de f a um subconjunto X^* do seu domínio** a função $f|X^*$: $X^* \to Y$, definida por $(f|X^*)(x) = f(x)$, para todo $x \in X^*$. Neste exemplo, portanto, g^* é uma restrição da função g (do exemplo anterior) ao conjunto $\mathbb{R} - \{2\}$. Perceba-se que uma restrição de uma função dada, deste modo, utiliza a mesma regra da função original, apenas "diminuindo", restringindo seu domínio (campo) de abrangência.

Analogamente, dada uma função f: $X \to Y$, dada por $y = f(x)$, qualquer, sendo $A \supset X$ (A é um superconjunto de X), diz-se que a função f: $A \to Y$, com a mesma lei $y = f(x)$, é uma **extensão** de f. Logo, g é uma extensão de g^*. Naturalmente, uma mesma função admite, via de regra, muitas restrições e extensões distintas.

e) As "funções" reais $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = x$ são iguais? Novamente, muito cuidado com o abuso de linguagem. Em conformidade com a regra do domínio máximo, a resposta é **não**, já que, conquanto ambas funções possuam mesmo domínio e mesmo contradomínio (o conjunto $\mathbb{R}$), *nem sempre* $f(x) = g(x)$. Basta notar que $f(-3) = \sqrt{(-3)^2} = \sqrt{9} = 3$, ao passo que $g(-3) = -3$. Destarte, $f(x) = g(x)$ é *falso* para qualquer x negativo (pertencentes, assim, ao domínio comum), garantindo que $f \neq g$.

f) Caso se utilizem as restrições f_-: $\mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ e g_+: $\mathbb{R}_- \to \mathbb{R}$ das funções do exemplo anterior, ocorrerá a igualdade $f_- = g_-$ de tais restrições. Sem utilizar restrições, é possível definir a função h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $h(x) = |x|$, criando uma função idêntica a f: $h = f$.

g) As "funções" $f(x) = x^4$ e $g(x) = (x^2)^2$ são iguais? Pela regra do domínio máximo, sim. Ignorando-a, entretanto, é possível obter uma gama de funções diferentes, como por exemplo f: $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$, em que $f(x) = x^4$, e g: $\mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$, com $g(x) = (x^2)^2$, ambas restrições (**distintas**) da função obtida pela regra do domínio máximo. Novamente, outro problema que surge ao não explicitar domínio ou contradomínio de uma função.

h) As expressões (ou funções, com o já conhecido abuso de linguagem) $f(x) = \sec x - tg\ x$ e $g(x) = \frac{1}{\sec x + tgx}$ são **iguais** (ou idênticas, termo mais utilizado para expressões genéricas) **em todo domínio comum**. Isto significa que, se as duas expressões fizerem sentido (estiverem bem definidas) em R, se tem $f(x) = g(x)$. Em certos casos, é conveniente ressalvar qual é este domínio comum. Para tanto, utiliza-se o domínio máximo, bem como restrições de definição das razões trigonométricas em jogo. Deve-se impor, neste caso, que $x \neq \pi/2 + k\pi$, para todo $k \in Z$, a fim de que sec x e tg x estejam definidas, bem como que $\sec x \neq -tg\ x$, para que $g(x)$ exista. Assim, sen x deve ser diferente de -1, fato já englobado pela restrição precedente. Finalmente, pode-se afirmar que as funções $f(x) = \sec x - tg\ x$ e $g(x) = \frac{1}{\sec x + tgx}$ são idênticas, $\forall\ x \in R - \{\pi/2 + k\pi,\ k \in Z\}$.

2.3. FUNÇÕES IMPLÍCITAS

Em praticamente todos os exemplos vistos até o momento (nas funções a uma única variável), a regra que associa um elemento x do domínio de uma função f ao elemento y correspondente do contradomínio é dada através de uma equação do tipo $y = f(x)$, em que se tem, simplesmente falando, a ***variável dependente*** y ***explicitamente*** isolada num dos membros da equação, sendo que o outro membro contém uma expressão que encerra tão somente a variável x, dita ***independente***. Claro, como já foi dito precedentemente, não são necessariamente estas as letras a representar tais variáveis. Mas o importante é que se tem uma "receita explícita" de como deve ser obtido o valor da imagem de um dado elemento do domínio, estritamente dependente do valor da variável independente. Como explanado, deve-se lembrar que tal elemento pode ser um número, um ponto, uma seqüência numérica, uma matriz, ou qualquer ente. Estas são as situações elementares mais comuns.

Em certos casos, principalmente em Cálculo, mas também presente em outras situações (como em Geometria Analítica), é possível, contudo, ter-se a lei da função dada de forma **implícita**. Basta, para isto, não ocorrer o que foi dito no parágrafo anterior (ou seja, basta que haja uma "lei explícita"). Quando se escreve a regra de uma função sob a forma $y - f(x) = 0$, simplesmente, já não se tem mais y explicitamente em função de x. Diz-se que y *é* uma função implícita de x, apesar de ser melhor entender que y *está* em função implícita de x, uma vez que se pode "explicitar" y novamente, neste caso. É só isolar a variável dependente.

Exemplos:

a) A equação $3x - 4y + 5 = 0$ *define implicitamente* uma função (afim) $y = f(x)$, a saber, $f: R \to R$, dada (*explicitamente*) por $y = \frac{3x}{4} + \frac{5}{4}$.

b) A equação $u.\text{sen}\ v - u + 7 = 0$ define, implicitamente, uma função (transcendente, mas não vem ao caso) $u = g(v)$, qual seja, $g: R - \{\pi/2 + 2k\pi,\ k \in Z\} \to R$, dada, explicitamente, por $u = \frac{7}{1 - \text{sen}\ v}$. Note-se que foi aplicada a regra do domínio máximo, uma vez que $\text{sen}\ v \neq 1$. Observe-se que, quando $\text{sen}\ v = 1$, a equação original transforma-se numa impossibilidade, ou seja, não define função alguma.

Em algumas situações, uma mesma equação pode definir implicitamente mais de uma função.

c) A equação $x^2 + y^2 = 1$ define pelo menos duas funções (de domínios máximos), $y = f(x)$, a saber: f_1: $[-1, 1] \to R$, dada por $y = \sqrt{1 - x^2}$; f_1: $[-1, 1] \to R$, dada por $y = -\sqrt{1 - x^2}$. Naturalmente, ignorando a regra do domínio máximo, há uma infinidade de outras funções (distintas das anteriores) dadas implicitamente pela equação fornecida, tais como: f_3: $[-1, 0] \to R$, dada por $y = \sqrt{1 - x^2}$; f_4: $[0, 1] \to R$, dada por $y = -\sqrt{1 - x^2}$; etc. Mais um problema de não ressaltar-se o domínio de uma função.

d) Nem sempre é possível isolar uma variável em função da outra, numa equação dada. Se $2y - x(y^2 + 1)\operatorname{sen} y - \cos y = 0$, é impossível explicitar y como função de x (é instrutivo tentar). Porém, conforme é imediato, tem-se que $x = \dfrac{\cos y - 2y}{(y^2 + 1)\operatorname{sen} y}$, ou seja, a equação dada define implicitamente uma função $x = f(y)$ (x como função de y).

Num caso mais geral, diz-se que uma função implícita assume a forma $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$, sendo o primeiro membro uma expressão matemática qualquer a n incógnitas. Diz-se que tal equação define, implicitamente, uma variável (ou mais) em função das outras. Por exemplo, $x_2 = f(x_1, x_3, ..., x_n)$.

e) A equação $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ (superfície esférica de centro na origem e raio unitário, num sistema cartesiano ortogonal Oxyz) define implicitamente (dentre outras) duas funções de z: z_1: $D \to R$, dada por $z_1 = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$, e z_2: $D \to R$, dada por $z_2 = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$, sendo D (o domínio de ambas) o conjunto $\{(x, y): x^2 + y^2 \leq 1\}$ (disco do plano xOy). Cada uma destas funções explícitas é um hemisfério da esfera inicial.

f) Finalmente, cabe ressaltar que, embora as funções implícitas sejam dadas por meio de equações, nem toda equação fornece funções implícitas. Por exemplo, a equação $x^2 + y^2 + 11 = 0$ não define função implícita alguma, no campo real. Em verdade, tem-se que $x^2 + y^2 + 11 \geq 0$, $\forall\, x, y \in R$.

2.4. GRÁFICO DE UMA FUNÇÃO

Seja f: $A \to B$ uma função qualquer. Denomina-se **gráfico** de f, indicado por $G(f)$ ou $gr\, f$, o subconjunto de $A \times B$ constituído pelos pares $(x, f(x))$, sendo x um elemento qualquer de A. Em símbolos:

$$G(f) = \{(x, y) \in A \times B: y = f(x)\}.$$

TEOREMA: Duas funções são iguais se, e somente se, seus gráficos forem iguais.

DEMONSTRAÇÃO

Se duas funções são iguais, os gráficos são trivialmente iguais, pois se trata do fato de o gráfico de uma função ser um conjunto univocamente determinado, isto é, uma (mesma) função só pode possuir um (único) gráfico. Suponha-se, agora, que f: $A \to B$ e g: $C \to D$ sejam duas funções tais que $G(f) = G(g)$, isto é, com mesmo gráfico. Então, por definição, $\{(x, y) \in C \times D: y = g(x)\} = \{(x, y) \in A \times B: y = f(x)\}$. Tomando um elemento (x^*, y^*) de G (g), tem-se que:

I. $x^* \in C$ (pois $(x^*, y^*) \in G(g)) \Rightarrow x^* \in A$ (pois $G(g) = G(f)$, por hipótese). Logo, $C \subset A$.

II. $y^* \in D \Rightarrow y^* \in A$, analogamente. Assim, $D \subset B$.

III. Para cada $x^* \in C$, $x^* \in A$ e $y^* = g(x^*)$.

Como este mesmo par, (x^*, y^*), também está em $G(f)$ (pois $G(f) = G(g)$), conclui-se da mesma forma que:

I'. $A \subset C$.

II'. $B \subset D$.

III'. Para cada x^* de A, $y^* = f(x^*)$.

Portanto, de I e I' conclui-se que $A = C$; de II e II' chega-se a $B = D$; e finalmente de III e III', obtém-se $f(x^*) = g(x^*)$, $\forall\, x^* \in A\ (= C)$. Logo, $f = g$.

O procedimento para construir o gráfico de uma função real de variável real, mesmo elementar, não é, via de regra, fácil, a não ser em alguns casos específicos (e **muito importantes**) de funções simples, como afins, quadráticas, exponenciais, logarítmicas, bem como de variações destas, por

transformações geométricas, conforme será estudado ao longo deste curso. De um modo bastante geral, porém, é possível construir o gráfico de uma função através de uma certa quantidade de pontos (às vezes, muitos), ligando-se tais pontos em seguida. O problema consiste em como é feita essa ligação. Caso se tenha uma previsão do aspecto genérico do gráfico (se é uma reta, ou uma parábola, ou uma exponencial, se é crescente, decrescente, se é côncava ou convexa, etc), o esboço obtido "ligando pontos" torna-se mais próximo do gráfico real. Senão, pode-se obter uma curva distante do gráfico da função.

O Cálculo Diferencial fornece ferramentas bastante úteis para construir (ou pelo menos esboçar de modo satisfatório) o gráfico de uma função real de variável real. Essas técnicas, porém, fogem ao escopo deste curso, sendo estudadas em separado.

TEOREMA: Um subconjunto G do produto cartesiano é o gráfico de alguma função f. $A \to B$ se, e somente se, para cada $x \in A$, existe *um único* ponto $(x, y = f(x)) \in G$.

A demonstração é trivial, oriunda diretamente da definição de função, mas fica como exercício (pode-se usar o método indireto. Tente!). Para o caso de uma função real de variável real, este teorema pode ser enunciado da seguinte forma:

Um conjunto G de pontos do plano cartesiano é o gráfico de alguma função real de variável real f: $A \to B$ se, e somente se, *toda reta vertical* (paralela ao eixo das ordenadas) *por pontos de A intersecta G em exatamente um ponto.*

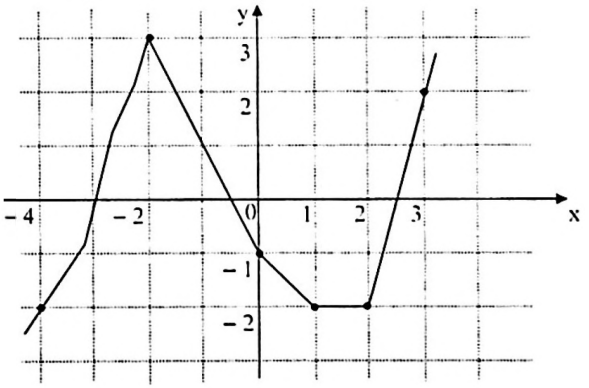
Enfim, cabe destacar que "um gráfico vale por mil palavras". Muitas das informações, técnicas ou cotidianas, são passadas pelos meios de comunicação via gráficos. Daí, faz-se imprescindível saber **ler um gráfico**, o que significa interpretá-lo corretamente. Deve-se saber associar os valores do domínio com as correspondentes imagens e vice-versa, conforme o caso. Para tanto, é mister utilizar corretamente retas *verticais* e *horizontais*.

Uma reta vertical passando por um ponto x_0 do domínio de uma função (ou ainda de uma relação qualquer), ao intersectar uma curva representativa da relação (funcional ou não), determina o (s) valor (es) associado (s) a x_0. Analogamente, uma reta horizontal qualquer passando por um valor y_0 encontra (eventualmente) a curva em pontos os quais determinarão valores do domínio que, porventura, tenham imagem exatamente igual a y_0.

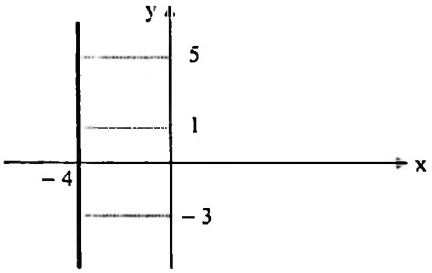
Deve-se, a todo custo, evitar o ***analfabetismo funcional***, que traz, intrínseco, o ônus da alienação ou da opressão. A propósito, é também indispensável dominar (ler, interpretar e escrever) a língua mãe, pelo menos.

Exemplos:

a) O gráfico a seguir indica, pelo menos, que $f(-2) = 3$, $f(0) = -1$ e $f(3) = 2$. Mostra, também, que tanto -4, quanto 1 e 2 possuem mesma imagem: -2.

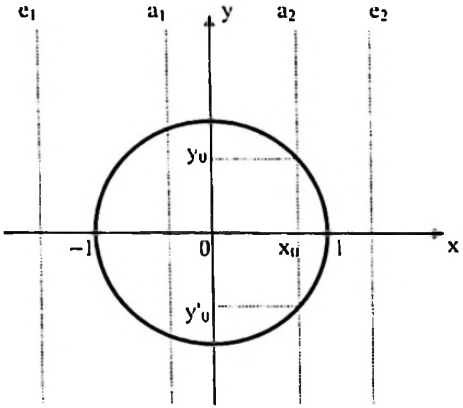


b) Uma reta vertical jamais pode ser o gráfico de uma função real de variável real. De fato, mesmo que o domínio seja formado unicamente pelo ponto em que esta reta corta o eixo das abscissas, tal ponto possuirá infinitas imagens distintas, o que contraria a definição de funções.



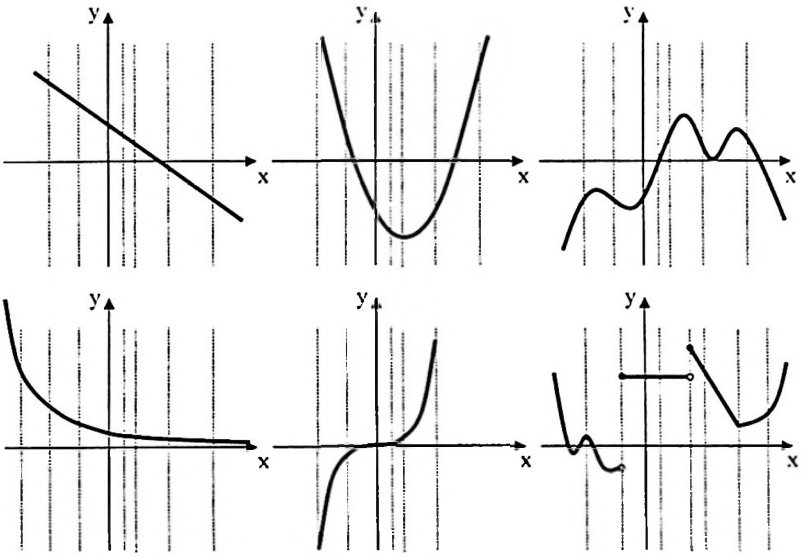
Qual é a imagem de – 4? – 3, 1 ou 5? Ou todos os reais?

c) Uma circunferência λ, centrada na origem de um sistema cartesiano e com raio 1, não pode representar o gráfico de alguma função real de variável. Caso o domínio da candidata a função com gráfico nesta circunferência contenha propriamente (seja "maior" que) o intervalo D = [– 1, 1], então haverá exceções. Graficamente, isto significa que as retas verticais pelos pontos externos a D **não intersectam** a curva. Caso o domínio da candidata a função de gráfico λ esteja contido em D, nota-se que qualquer reta vertical passando pelos pontos do domínio **intersecta a curva em mais de um ponto**. Daí, surgem as **ambigüidades**. Portanto, λ não pode ser gráfico de função real de variável real. A propósito, prova-se facilmente (será feito em Geometria Analítica) que a equação que define λ é $x^2 + y^2 = 1$. Quer dizer que um ponto pertence a λ se, e somente se, satisfaz esta equação. Note-se, finalmente, que esta equação define funções implícitas. Nenhuma destas funções, contudo, tem por gráfico a circunferência λ *por completo*.



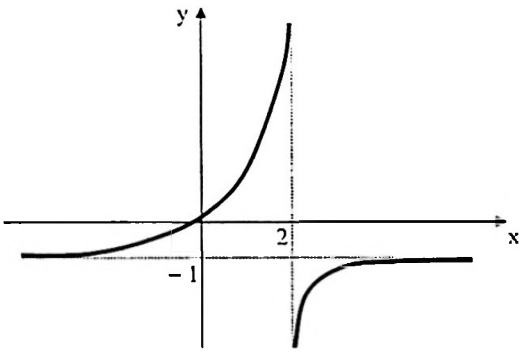
As retas verticais e_1 e e_2 (que não intersectam a curva) indicam pontos de um eventual domínio em que ocorreriam exceções. Já qualquer uma das verticais a_1 e a_2 indicam que um mesmo x do domínio teria mais de um y como imagem.

c) Todas as curvas a seguir representam os gráficos de funções reais com domínio real. Perceba-se que *qualquer reta vertical* (mesmo entre as que não aparecem) *intersecta as curvas em um único ponto*.



Destaque-se o último dos gráficos acima. Mesmo possuindo "quebras", denominadas matematicamente **descontinuidades**, qualquer reta vertical o intersecta em um único ponto. Notem-se os pontos abertos (excluídos) e os fechados ou cheios (incluídos). Uma mesma vertical não pode cortar dois pontos fechados de um mesmo gráfico funcional. Todos os demais gráficos (por sinal, muitíssimo importantes e que serão estudados detalhadamente durante este curso) possuem a peculiaridade de poderem ser completamente traçados (desenhados) sem precisar sair do plano do papel nem passar pelo mesmo ponto duas vezes. Quando uma curva possui estas duas características, é denominada **contínua e simples**, respectivamente às propriedades citadas. Obviamente, tais idéias não servem como definições matemáticas formais, mas são convenientes ao propósito destas linhas, uma vez que o estudo rigoroso destas propriedades geométricas adentra nos domínios do Cálculo.

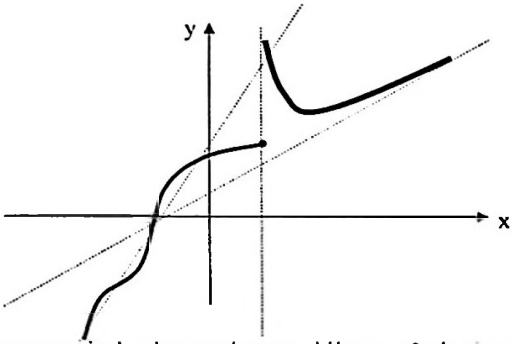
d) A curva a seguir não pode ser o gráfico de uma função com *domínio real*, já que a reta vertical que passa por $x = 2$ não a intersecta. Portanto, ocorreria uma exceção: um número real, no caso, 2, não possuiria imagem. Esta reta vertical que não é intersectada pelo gráfico de uma função, mas que está "cercada" (de um lado ou de outro) de retas verticais que cortam o gráfico, recebe o nome de **assíntota vertical** do gráfico da função. Assim, a reta $x = 2$ é uma assíntota vertical da curva abaixo.



É importante notar, no entanto, que a mesma curva pode muito bem ser o gráfico de uma função *com domínio* $\mathbb{R} - \{2\}$, pois a vertical $x = 2$, neste caso, não criaria uma exceção em $x = 2$, uma vez que tal valor não pertenceria ao domínio da função.

Por fim, vale ressaltar que a "definição" dada acima para assíntota não é formal, já que o estudo das assíntotas de uma curva (incluindo a definição mais precisa) é inerente ao Cálculo (mais uma vez!). Embora fuja ao escopo deste curso, é importante que se tenha a seguinte noção: uma *reta* é dita assíntota de uma curva quando um ponto da curva que se desloca em direção ao infinito (ou seja, que tem a sua abscissa ou a sua ordenada – ou as duas – "indo ao infinito") aproxima-se, cada vez mais, da reta. É como se imaginar "andando" sobre o gráfico. Andando sem parar, numa mesma direção, sobre uma curva, aproxima-se cada vez mais de suas *eventuais* assíntotas. Em certas ocasiões, a assíntota corta a curva, mas isto não interessa. O que interessa é o comportamento "ao longe", como se a curva tendesse a se confundir com sua assíntota, no infinito. Desta forma, além da assíntota vertical citada, o gráfico acima possui, também, uma assíntota horizontal, $y = -1$, a qual, em tempo, não influencia no fato de a curva poder ou não ser o gráfico de uma função.

e) Apenas para informar que, em certos casos (não elementares, contudo), assíntotas podem intersectar a curva, bem como não serem horizontais ou verticais (são ditas *oblíquas*). Note-se que a função com este gráfico pode ter domínio real, mesmo com uma assíntota vertical, bastando observar o ponto cheio destacado.



Uma assíntota vertical e duas assíntotas oblíquas, não horizontais.
Todas intersectam a curva em um ou mais pontos.

2.5. IMAGEM DIRETA e IMAGEM INVERSA

Considere-se uma função **qualquer** $f: A \to B$.

Seja X um subconjunto qualquer do domínio: $X \subset A$. Denomina-se **imagem direta de X por** f, ou apenas **imagem de X**, o conjunto das imagens de todos os elementos de X. Representa-se tal conjunto por $f(X)$. Em símbolos:

$$f(X) = \{y \in B: \exists\, x \in X, y = f(x)\}, \text{ ou mais simplesmente,}$$

$$\boxed{f(X) = \{f(x): x \in X\}}$$

É importante perceber, desde já, a distinção entre os símbolos $f(X)$ e $f(x)$ nas notações precedentes. Enquanto o já conhecido $f(x)$ indica a imagem *do elemento* x do domínio, o símbolo $f(X)$ significa a imagem (direta) do *subconjunto* X do domínio.

Note-se também que, para todo subconjunto X do domínio, $f(X) \subset B$, em conformidade com a definição apresentada. No caso em que $X = A$, obtém-se o denominado **conjunto imagem da função** f. Às vezes, o conjunto imagem de f é simplesmente denominado a **imagem de** f, ou ainda o **conjunto dos valores de** f, sendo eventualmente representado por $\mathbf{Im}\, f = f(A)$.

Exemplos:

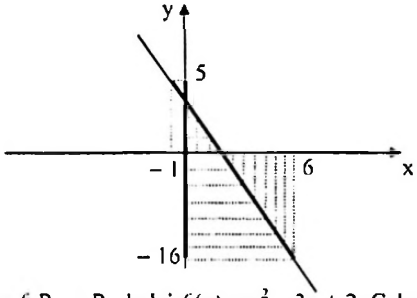
a) Dada a função f: {1, 3, 4} → N, definida por $f(x) = 20 - 3x^2$, tem-se que $f(\{1, 4\}) = \{f(1), f(4)\} = \{17, -28\}$, bem como $f(\{1, 3\}) = \{f(1), f(3)\} = \{17, -7\}$. A imagem da função é o conjunto $f(\{1, 3, 4\}) = \{f(1), f(3), f(4)\} = \{17, -7, -28\}$. Como não podia deixar de ser, todas estas imagens estão contidas no contradomínio, N. Enfim, vale destacar a diferença formal entre $f(x)$ e $f(X)$. A rigor, $f(4)$ é uma coisa, e $f(\{4\})$ é outra, embora esta diferença não tenha muitos fins práticos. Com efeito, $f(4) = -28$, enquanto $f(\{4\}) = \{-28\}$. Como já se sabe, $-28 \neq \{-28\}$. Por conseguinte, $f(4) \neq f(\{4\})$.

b) Considere-se a função f: R → R, definida por $f(x) = 2 - 3x$. Determine-se a imagem direta do intervalo [− 1, 6). Para tanto, podem ser utilizadas propriedades básicas das desigualdades.

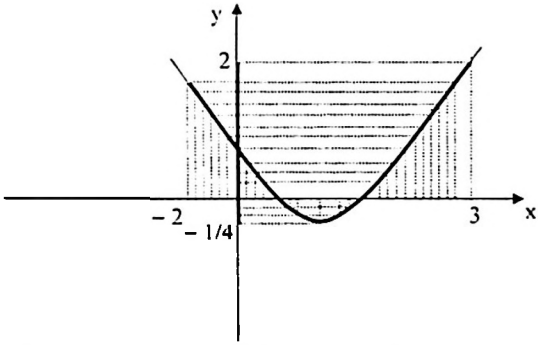
$-1 \leq x < 6 \Leftrightarrow -18 < -3x \leq 3 \Leftrightarrow -16 < 2 - 3x \leq 5 \Leftrightarrow -16 < f(x) \leq 5$.

Portanto, conclui-se que $f([-1, 6)) = (-16, 5]$.

Outro procedimento muito útil para determinar imagens diretas (e, mais tarde, inversas) é o gráfico. Suponha-se conhecido o gráfico da função. Para obter a imagem direta de um subconjunto qualquer do domínio, traçam-se retas verticais (que criam uma faixa vertical) pelos pontos do dito subconjunto. Tal faixa intersecta o gráfico em um determinado trecho, o qual, projetado no eixo das ordenadas, fornece a imagem desejada.



c) Considere-se a função f: R → R, de lei $f(x) = x^2 - 3x + 2$. Calcule-se a imagem do intervalo [− 2, 3]. O melhor procedimento é determinar $f([-2, 3])$ através do gráfico da função. Suponha-se que ele seja conhecido. Neste exemplo:



Assim, fica fácil concluir que $f([-2, 3]) = [-1/4, 2]$. Naturalmente, existe a via algébrica para a determinação da imagem direta encontrada. Deve ser ressalvado, entretanto, que a simplicidade da obtenção da imagem direta normalmente é menor que via gráfico e que é muito útil um conhecimento mais aprofundado da função em estudo (quadrática, no caso). Esta análise, portanto, é melhor realizada após o estudo das funções quadráticas.

Seja, agora, Y um subconjunto qualquer do contradomínio: $Y \subset B$. Chama-se **imagem inversa** de Y por f o conjunto de todos os elementos do domínio que têm imagem em Y. Representa-se a imagem inversa descrita por $f^{-1}(Y)$. Em símbolos, a definição fica:

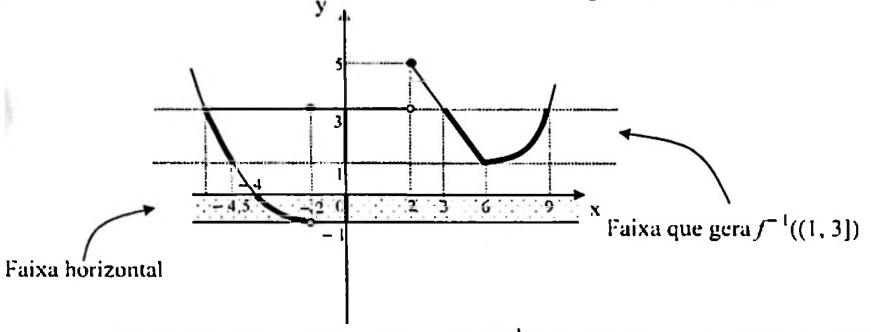
$$f^{-1}(Y) = \{x : f(x) \in Y\}$$

Como é trivial, para todo $Y \subset B$, tem-se necessariamente $f^{-1}(Y) \subset A$. É perfeitamente possível, também, que $f^{-1}(Y) = \varnothing$, bastando para tanto que $Y \cap f(A) = \varnothing$, isto é, que Y não tenha pontos na imagem da função.

Exemplos:

a) Dada a função f: $\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\} \to N$, definida por $f(x) = 2x^2 - 3$, tem-se que $f^{-1}(\{5, 15\}) = \{-2, 2, 3\}$, que são os únicos elementos do domínio a possuir imagens em $\{5, 15\}$. Também $f^{-1}(\{5, 10, 15\}) = f^{-1}(\{5, 15\}) = \{-2, 2, 3\}$, pois nenhum elemento do domínio tem imagem igual a 10. Tem-se que $f^{-1}(\{-3, -2, -1, 0\}) = f^{-1}(\{-3, -1\}) = \{0, 1, -1\}$, pois $f(0) = -3$, $f(1) = -1 = f(-1)$ e nenhum elemento do domínio possui imagem igual a -2 ou a 0. Deste modo, vê-se claramente que $f^{-1}(\{-2, 0\}) = \varnothing$. Note-se que o conjunto imagem de f é $f(\{-2, -1, 0, 1, 2, 3\}) = \{-3, -1, 5, 15\}$.

b) Para encontrar imagens inversas graficamente, o procedimento é análogo ao da obtenção de imagens diretas. A única diferença é que ser começa traçando retas *horizontais* pelos pontos do contradomínio dos quais está se obtendo a imagem inversa, criando assim uma faixa *horizontal*, que intersecta eventualmente o gráfico da função num certo trecho. A imagem inversa é, finalmente, a projeção deste trecho sobre o eixo das abscissas. Desta forma, considere-se o gráfico da função f abaixo.



De acordo com o gráfico, tem-se que $f^{-1}([-1, 0]) = [-4, -2)$, obtida a partir da projeção no eixo das abscissas do trecho em negrito do gráfico. Por sua vez, tal trecho é a interseção da faixa horizontal destacada na figura com o gráfico da função. Muitas outras informações podem ser extraídas do gráfico acima, como o fato de $f^{-1}(\{3\}) = \{-5, 9\} \cup [-2, 2)$. Perceba-se que 2 foi excluído da imagem inversa de $\{3\}$ devido ao fato de $f(2) = 5$ (portanto, não pertencente a $\{3\}$). Tem-se também que $f^{-1}((1, 3]) = [-5; -4,5) \cup [-2, 2) \cup [3, 6) \cup (6, 9]$, como é possível concluir através da faixa horizontal com extremos nas verticais $y = 1$ (margem excluída) e $y = 3$ (margem incluída). Importante notar o porquê de os pontos $-4,5$; 2 e 6 estarem excluídos de $f^{-1}((1, 3])$: suas imagens são, respectivamente, 1, 5 e 1, todas fora de $(1, 3]$.

c) Dada a função f: $R - \{3\} \to R$, de lei $f(x) = \dfrac{2+x}{x-3}$, como obter a imagem inversa de $\{-6, 0, 1\}$? Como se trata de um conjunto finito, não há necessidade de conhecer o comportamento global da função. Basta encontrar os valores do domínio que, eventualmente, têm imagem -6, 0 ou 1.

Inicialmente, para descobrir qual elemento do domínio possui imagem -6, basta encontrar x tal que $f(x) = -6$. Daí, é só impor $\dfrac{2+x}{x-3} = -6 \Leftrightarrow -6x + 18 = 2 + x \Leftrightarrow x = \dfrac{16}{7}$. Ou seja, $f^{-1}(\{-6\}) = \{\dfrac{16}{7}\}$. Analogamente, obtém-se que $f^{-1}(\{0\}) = \{-2\}$ e que $f^{-1}(\{1\}) = \varnothing$, sendo que esta última igualdade

significa que nenhum elemento do domínio possui imagem 1 (ou ainda que 1 não está na imagem de f).
Finalmente, tem-se $f^{-1}(\{-6, 0, 1\}) = \{\frac{16}{7}, -2\}$.

Vale também ressaltar que o símbolo $f^{-1}(\{-6\})$ faz sentido qualquer que seja a função f que possua o elemento -6 em seu contradomínio. Está errado escrever $f^{-1}(-6)$ com o significado de $f^{-1}(\{6\})$. O símbolo $f^{-1}(-6)$ *só faz sentido* para uma classe muito específica de funções: as *que possuem inversa*. Resumindo, como será estudado depois, **nem toda função admite função inversa, mas qualquer função possui imagem inversa.**

2.6. TIPOLOGIA

As funções podem ser classificadas em três tipos principais:

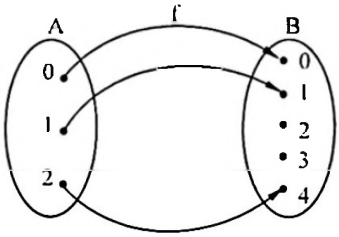
I. Função Injetora (ou Função Injetiva ou Injeção ou Função Biunívoca)

Quando elementos distintos do domínio têm imagens diferentes. Em símbolos:

$$f: A \to B \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall\, x_1, x_2 \in A;\ x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq (x_2))$$

Exemplos:

a) Sendo A = {0, 1, 2} e B = {0, 1, 2, 3, 4}, a função f que associa os elementos de A aos respectivos quadrados em B é injetora.
De fato: $f(0) \neq f(1)$, $f(0) \neq f(2)$ e $f(1) \neq f(2)$.



b) A função que associa a cada distância entre duas massas dadas o módulo da força gravitacional existente entre elas (F x d) é uma injeção, pois a distâncias diferentes os módulos das forças gravitacionais também são distintos.

c) A função que associa cada triângulo à sua área **não** é uma injeção, já que existem triângulos distintos (ainda que não congruentes) com mesma área.

d) Seja g: R→ R, definida por $g(x) = ax + b$, para a e b reais, sendo a não nulo. Tal função é dita *afim*.
É fácil ver que g é injetiva. Com efeito, sendo x_1 e x_2 reais distintos:
$x_1 \neq x_2 \underset{a \neq 0}{\Rightarrow} ax_1 \neq ax_2 \Leftrightarrow ax_1 + b \neq ax_2 + b \Leftrightarrow g(x_1) \neq g(x_2)$

e) A função h: R → R, dada por $h(x) = x^2$, **não** é uma injeção. Em verdade, basta notar que para qualquer $x > 0$: $x \neq -x$, mas $h(x) = x^2 = (-x)^2 = h(-x)$. Assim, por exemplo, apesar de $3 \neq -3$, as imagens de ambos são iguais a 9.

É fundamental perceber que perguntas do tipo "a função $f(x) = x^2$ é injetora?" carecem de significado, bastando comparar o primeiro exemplo com o quinto. Entretanto, como já foi ressaltado previamente, devem ser considerados, em casos análogos, os mais amplos subconjuntos de R possíveis para o domínio e para o contradomínio.

Em muitos casos, é mais eficiente a utilização da contra-recíproca (ou contra-positiva) da definição. Ou seja:

$$f: A \to B \text{ é injetora} \Leftrightarrow (\forall\, x_1, x_2 \in A;\ f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2)$$

f) A função $f: R - \{-\frac{d}{c}\} \Rightarrow R$, definida por $f(x) = \frac{ax + b}{cx + d}$ é injetiva se, e somente se, $ad \neq bc$ (isto é, a, b, c, d não formarem uma proporção, nessa ordem), apesar de não ser simples verificar isso pela definição original (experimenta!). Já pela contra-recíproca, a tarefa torna-se bem mais simples. Em verdade, sendo x_1 e x_2 reais diferentes entre si e de $-\frac{d}{c}$:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow \frac{ax_1 + b}{cx_1 + d} = \frac{ax_2 + b}{cx_2 + d} \overset{cx_1+d\neq 0}{\underset{cx_2+d\neq 0}{\Leftrightarrow}} (ax_1 + b)(cx_2 + d) = (ax_2 + b)(cx_1 + d) \Leftrightarrow$$

$$acx_1x_2 + adx_1 + bcx_2 + bd = acx_1x_2 + adx_2 + bcx_1 + bd \Leftrightarrow (ad - bc)(x_1 - x_2) = 0 \overset{ad\neq bc}{\Leftrightarrow} x_1 = x_2.$$

Como exercício, deve-se verificar o que ocorre se a, b, c, d formarem uma proporção, nessa ordem.

g) A função *quadrática* geral, $f: R \to R$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$, para reais a, b, c, com a não nulo, não é injetora. De fato:

$$f(x_1) = f(x_2) \Leftrightarrow ax_1^2 + bx_1 + c = ax_2^2 + bx_2 + c \Leftrightarrow a(x_1^2 - x_2^2) + b(x_1 - x_2) = 0 \Leftrightarrow$$
$$(x_1 - x_2)[a(x_1 + x_2) + b] = 0$$

Perceba-se que $x_1 = x_2$ ou $x_1 + x_2 = -\frac{b}{a}$. Isso significa que elementos distintos (simétricos em relação à reta $x = -\frac{b}{a}$, denominada *eixo de* simetria) têm mesma imagem. Logo, f não é injetiva. Pode-se, entretanto, restringir o domínio de f, para $(-\infty, -\frac{b}{a}]$ ou para $[-\frac{b}{a}, +\infty)$ por exemplo, a fim de obter restrições quadráticas injetoras.

TEOREMA (Identificação Gráfica de Funções Injetoras)

Uma função real de variável real (isto é, cujo domínio e cujo contradomínio são subconjuntos de R) é injetora se, e somente se, qualquer reta horizontal (ou seja, paralela ao eixo da variável independente) intersectar seu gráfico em, no máximo, um ponto.

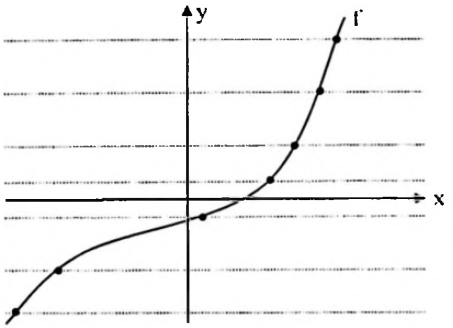
Demonstração

Se uma reta horizontal qualquer, isto é, $y = k$ (constante real), cortar o gráfico de uma função f nos pontos genéricos P(a, f(a)) e Q(b, f(b)), então:

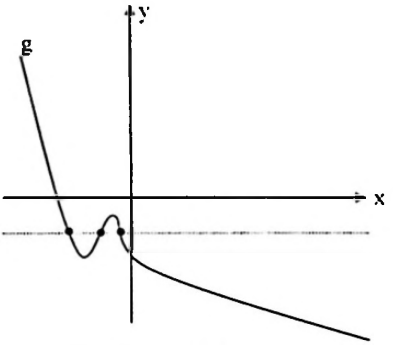
a) se f for injetora, como $k = f(a) = f(b)$, deve-se ter $a = b$, ou seja, os pontos P e Q coincidem. Noutros termos, se uma reta horizontal intersecta o gráfico de uma função injetora, o faz segundo um só ponto;

b) reciprocamente, se qualquer reta horizontal cortar o gráfico de f em no máximo um ponto, então P = Q. Daí, jamais aconteceria f(a) = f(b) juntamente com a ≠ b, quaisquer que fossem a e b do domínio de f, o que significa que f não pode deixar de ser injetora. Outro modo de pensar é por absurdo. Supondo que f não fosse injetora, haveria pelo menos dois valores, distintos, a e b do seu domínio para os quais f(a) = f(b). Mas, assim, os pontos distintos P(a, f(a)) e Q(b, f(b)) estariam numa mesma horizontal, o que é uma contradição. Logo, f deve ser injetora.
Obviamente, é possível que haja retas horizontais que não cortem o gráfico de f.

Exemplos:



f:R→R é injetora



g:R→R não é injetora

II. Função Sobrejetiva (ou Função Sobrejetora ou Sobrejeção)

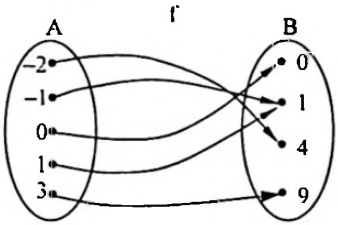
Quando o conjunto imagem da função coincide com o contradomínio. Noutras palavras, que, embora pareçam mais complicadas, são mais úteis, uma função é sobrejetora quando todo elemento do contradomínio for imagem de algum (pelo menos um) elemento do domínio. Em símbolos:

$$f: A \to B \text{ é sobrejetora} \Leftrightarrow f(A) = \text{Im } f = B \Leftrightarrow \forall\, y \in B, \exists\, x \in A: y = f(x)$$

Lembrando que, por definição, $f(A) \subset B$, qualquer que seja a função f, para mostrar que f é sobrejetiva, na prática deve-se provar apenas que $B \subset f(A)$, ou seja, que $\forall\, y \in B, \exists\, x \in A: y = f(x)$.

Exemplos:

a) Sendo A = {–2, –1, –0, 1, 3} e B = {0, 1, 4, 9}, a função f que associa os elementos de A aos respectivos quadrados em B é sobrejetora.



Em verdade, todos os elementos de B são imagens de *pelo menos* um elemento de A: 0 = f(0), 1 = f(–1) = f(1), 4 = f(–2) e 9 = f(3).

b) Sendo T o conjunto dos triângulos, a função g: $T \to \mathbb{R}^+$ que transforma cada triângulo em sua área, apesar de não ser injetora, é sobrejetora, visto que todo número real positivo S pode ser visto como a área de uma infinidade de triângulos, como daqueles de base unitária e altura 2S, ou daqueles de base $2\sqrt{S}$ e altura $\sqrt{S}$, etc.

c) A função afim h: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $h(x) = ax + b$, $a \neq 0$, é sobrejetiva. Com efeito, dado *qualquer real* y (elemento genérico do contradomínio), sempre existe um número real x no domínio (que, *por acaso*, é único) possuindo y por imagem. É importante que se note que não basta afirmar tal existência: deve-se exibir (pelo menos) um x do domínio para o qual $h(x) = y$. Além disso, **x deve ser função de y**. Neste caso, tal x é dado por $x = \frac{y-b}{a}$, que é sempre um número real, por y, b e a serem reais e $a \neq 0$. Além disso, o fato interessante nesse valor particular de x é que:

$h(x) = h\left(\frac{y-b}{a}\right) = a\left(\frac{y-b}{a}\right) + b = y$, ou seja, qualquer que seja $y \in \mathbb{R}$, existe um $x \in \mathbb{R}$, para o qual $y = h(x)$. Isso quer dizer que h é uma sobrejeção.

d) A função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida pela correspondência $f(x) = 5x^3 - 2$ é sobrejetora. De fato, dado qualquer número real y (elemento genérico do contradomínio), existe sempre um real x (neste caso, novamente, único), que é igual a $\sqrt[3]{\frac{y+2}{5}}$, para o qual $f(x) = y$. Verdadeiramente:

$$f(x) = f\left(\sqrt[3]{\frac{y+2}{5}}\right) = 5\left(\sqrt[3]{\frac{y+2}{5}}\right)^3 - 2 = 5\left(\frac{y+2}{5}\right) - 2 = y.$$

Logo, $\forall\, y \in \mathbb{R}$ (contra - domínio), $\exists\, x \in \mathbb{R}$ (domínio) : $y = f(x)$. Assim, f é sobrejetiva.

e) Uma função quadrática convencional, como $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, em que $f(x) = x^2 - 7x + 12$, **não é sobrejetora**. Em verdade, basta notar que, por exemplo, embora -1 pertença ao contradomínio de f, nenhum valor x no domínio o tem como imagem, isto é, não existe real x para o qual $f(x) = -1$. De fato: $f(x) = -1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 12 = -1 \Leftrightarrow x^2 - 7x + 13 = 0$, cujo discriminante é $\Delta = 49 - 52 < 0$, o que significa que a equação não apresenta raízes reais.

De um modo geral, na verificação da sobrejetividade ou não de uma certa função, o usual é determinar a imagem direta do domínio, como se segue:

- procurar explicitar x como "função" de y (quando possível, mesmo que não se trate de uma função no sentido da definição);
- verificar eventuais restrições para os valores de x, comparando com os possíveis valores que podem ser tomados no domínio.

Assim, para a função quadrática em questão, uma vez que $y = x^2 - 7x + 12$, tem-se que $x^2 - 7x + 12 - y = 0$. Como se trata de uma equação polinomial do segundo grau, é fácil encontrar suas raízes:

$$x = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 4(12 - y)}}{2} = \frac{7 \pm \sqrt{1 + 4y}}{2}$$

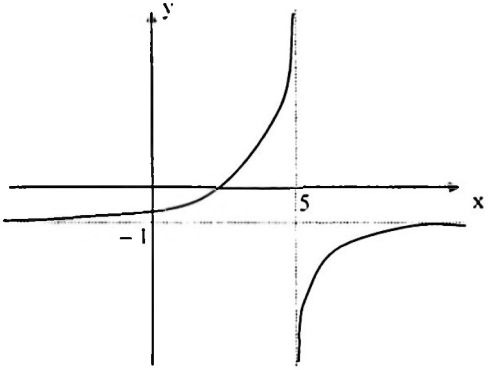
Uma vez explicito(s) o(s) valor(es) de x em "função" de y, a saber $\frac{7 + \sqrt{1+4y}}{2}$ e $\frac{7 - \sqrt{1+4y}}{2}$, é trivial notar que a condição necessária é suficiente para que x, em qualquer dos casos, seja real é $y \geq -\frac{1}{4}$. Dessa forma, **não é para qualquer valor de y no contradomínio de f, qual seja, R, que existe** algum valor real de x para o qual $y = f(x)$, como o que acontece para $y = -1$ ou para qualquer valor menor que $-\frac{1}{4}$. Ou seja, nem todo elemento do contradomínio de f é imagem de algum elemento do domínio. Ou, ainda: $f(\mathbb{R}) = [-\frac{1}{4}, +\infty) \neq \mathbb{R}$ (contradomínio de f). Logo, **f não é uma sobrejeção.**

f) Verificar se a função $g: \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R}$ dada por $g(x) = \frac{2-x}{x-5}$ é uma sobrejeção.

Para x diferente de 5, sendo $g(x) = y$, pode-se escrever:

$y = \frac{2-x}{x-5} \overset{x \neq 5}{\Leftrightarrow} y(x-5) = 2-x \Leftrightarrow yx - 5y = 2 - x \Leftrightarrow x + yx = 5y + 2 \Leftrightarrow x(y+1) = 5y + 2 \overset{y \neq -1}{\Leftrightarrow} x = \frac{5y+2}{y+1}$ Qu

al o conjunto dos valores do contradomínio que são imagens de algum elemento no domínio (quem é $g(R - \{5\})$?)? Noutras palavras, para quais valores de y há algum x, diferente de 5, para o qual $y = g(x)$. Já que x foi posto como função explícita de y, percebe-se que $R - \{-1\}$ é o mais amplo subconjunto de R (contradomínio) que permite utilização de valores de y para geração de valores correspondentes em x. Como $g(R - \{5\}) = \text{Im } g = R - \{-1\} \neq R$ (contradomínio de g), é imediato que g não é sobrejetora. *Quase* todos os valores do contradomínio são imagens de algum valor no domínio, exceto – 1. Como complemento, um esboço do gráfico de g é o que segue



g) Quais devem ser os conjuntos A e B, de modo que a função real de variável real $f: A \to B$ de lei $f(x) = 3x^2 + 7x - 5$ seja injetora e sobrejetora, simultaneamente?

Como já foi visto, valores simétricos em relação à reta $x = -\frac{7}{6}$ $\left(-\frac{b}{2a}\right)$ têm mesma imagem por f. Com efeito, sendo a e b reais tais que f(a) = f(b), tem-se que: $3a^2 + 7a - 5 = 3b^2 + 7b - 5 \Leftrightarrow 3(a^2 - b^2) + 7(a - b) = 0 \Leftrightarrow (a - b)[3(a + b) + 7] = 0 \Leftrightarrow a = b$ ou $a + b = -\frac{7}{3}$.

A fim de que f seja injetora, deve-se impor que ocorra somente a possibilidade a = b. Logo, não pode haver a e b para os quais $a + b = -\frac{7}{3}$, ou, ainda, $\frac{a+b}{2} = -\frac{7}{6}$. Isso significa que as coordenadas de a e de b não podem ter ponto médio em $-\frac{7}{6}$. Portanto, é suficiente escolher qualquer A que seja ou subconjunto de $\left(-\infty, -\frac{7}{6}\right]$ ou subconjunto de $\left[-\frac{7}{6}, +\infty\right)$, pois assim tomando dois elementos distintos quaisquer em A o ponto médio deles jamais será $-\frac{7}{6}$ e, portanto, suas imagens serão distintas.

Em seguida, para que f seja sobrejetiva, isolando x, obtém-se:

$$3x^2 + 7x - 5 - y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-7 \pm \sqrt{49 - 4.3.(-5-y)}}{2.3} = \frac{-7 \pm \sqrt{11 + 12y}}{6},$$

o qual é real se, e somente se, $y \geq -\frac{11}{12}$. Assim, deve-se impor que $B \subseteq \left[-\frac{11}{12}, +\infty\right)$, para que f seja uma sobrejeção.

Apenas como observação complementar, é interessante perceber que sendo $x = \frac{-7 \pm \sqrt{11+12y}}{6} = -\frac{7}{6} \pm \frac{\sqrt{11+12y}}{6}$, para que f seja injetora deve-se impor que qualquer x seja maior que ou igual a $-\frac{7}{6}$ ou, ainda, menor que ou igual a $-\frac{7}{6}$, uma vez que, caso x possa oscilar entre uma opção e outra, há a possibilidade de dois valores distintos de x possuírem mesma imagem.

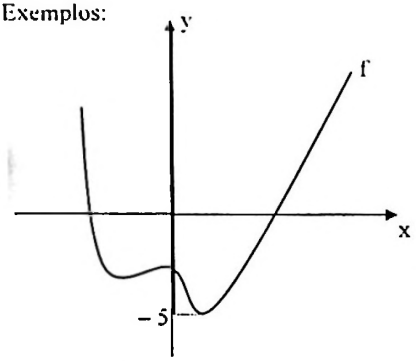
Novamente, deve ficar claro que perguntas do tipo "a função $f(x) = x^2$ é sobrejetora?" não fazem sentido, devendo ser interpretadas da mesma forma que nos casos de injetividade.

TEOREMA (Identificação Gráfica de Funções Sobrejetoras)

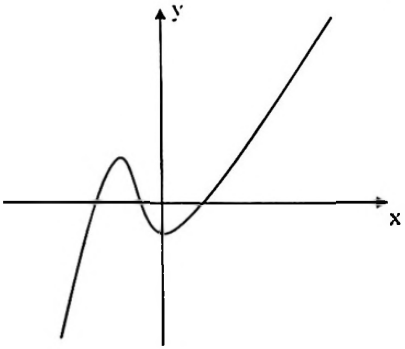
Uma função real de variável real é sobrejetora se, e somente se, qualquer reta horizontal passando pelos pontos do contradomínio intersectar seu gráfico em, no mínimo, um ponto. Sob outro aspecto, a projeção do gráfico sobre o eixo ordenado (imagem da função) coincide com o contradomínio.

A demonstração deste teorema é simples e fica como exercício.

Exemplos:



Sendo f: R → R, f não é sobrejetora.
Mas, se f: [– 5, +∞)→ R, então f é sobrejetora.
Em negrito, a imagem de f.



f: R → R é sobrejetora.

III. Função Bijetiva (ou Função Bijetora ou Bijeção ou Correspondência Biunívoca)

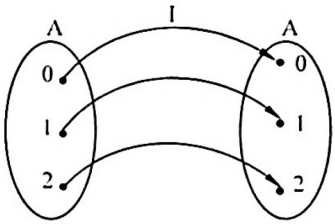
Quando a função for injetora e sobrejetora, simultaneamente. Isso significa que, a todo elemento do contradomínio, corresponde um único elemento (do qual o primeiro é imagem) no domínio. Em símbolos:

$$f: A \to B \text{ é bijetora} \Leftrightarrow \forall\, y \in B, \exists!\, x \in A: y = f(x)$$

Exemplos:

a) Um exemplo importante de bijeção é a função **identidade**. Dado um conjunto A qualquer, denomina-se *função identidade em A* (ou simplesmente função identidade) à função $I_A: A \to A$ que leva cada elemento de A a si próprio, isto é, $I_A(x) = x$.

É óbvio que I_A é bijetiva, uma vez que todo elemento x do contradomínio é imagem de si próprio (e somente de si), no domínio.



b) A função $f:R - \{2\} \to R - \{1\}$ definida pela lei $f(x) = \dfrac{x+1}{x-2}$ é bijetora. Com efeito, sendo $y = f(x)$, nota-se que:

$$y = \frac{x+1}{x-2} \overset{x\neq 2}{\Leftrightarrow} yx - 2y = x + 1 \Leftrightarrow yx - x = 2y + 1 \Leftrightarrow x(y-1) = 2y + 1 \overset{y\neq 1}{\Leftrightarrow} x = \frac{2y+1}{y-1},$$

resultado o qual quer dizer que, **qualquer que seja y real, diferente de 1** (sobrejetividade), **há um só valor correspondente de x** (injetividade), unicamente determinado por $\dfrac{2y+1}{y-1}$, o qual com certeza não é 2, mas que tem a peculiaridade de fazer com que $y = f(x)$. De fato:

$$f(x) = f\left(\frac{2y+1}{y-1}\right) = \frac{\dfrac{2y+1}{y-1}+1}{\dfrac{2y+1}{y-1}-2} = \frac{\dfrac{2y+1+y-1}{y-1}}{\dfrac{2y+1-2y+2}{y-1}} = \frac{\dfrac{3y}{y-1}}{\dfrac{3}{y-1}} = y.$$

c) A restrição de função quadrática $h:\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right] \to \left[-\dfrac{9}{2},+\infty\right)$ cuja lei é $h(x) = 2x^2 + 2x - 4$ é uma correspondência biunívoca. Com efeito, fazendo $y = h(x)$:

$$y = 2x^2 + 2x - 4 \Leftrightarrow 2x^2 + 2x - 4 - y = 0 \Leftrightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 4.2.(-4-y)}}{2.2} = \frac{-1 \pm \sqrt{9+2y}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{9+2y}}{2}$$

Pode parecer, a princípio, que h, embora seja uma sobrejeção (pois para todo y não inferior a $-\dfrac{9}{2}$, há um x real correspondente), não seja uma injeção (pois a cada y correspondem dois valores de x). No entanto, essa aparente contrariedade desaparece ao analisar-se o domínio de h: somente podem ser usados valores de x não superiores a $-\dfrac{1}{2}$. Como uma raiz quadrada real é sempre não negativa, observa-se que:

$$\sqrt{9+2y} \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} -\dfrac{1}{2} + \dfrac{\sqrt{9+2y}}{2} \geq -\dfrac{1}{2} \\ -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{9+2y}}{2} \leq -\dfrac{1}{2} \end{cases}$$

, o que significa que o único valor de x que é conveniente é $x = -\dfrac{1}{2} - \dfrac{\sqrt{9+2y}}{2}$, pois x pertence ao intervalo $\left(-\infty,-\dfrac{1}{2}\right]$.

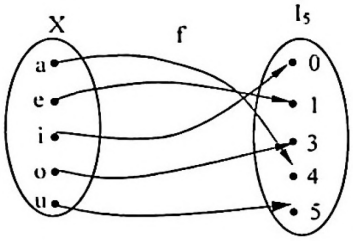
d) Sendo N o conjunto dos inteiros positivos, a função $f: N \to N$, dada por $f(n) = 2n$ é uma bijeção (em verdade, como qualquer função afim, ou restrições). De fato, qualquer que seja o natural par m, sempre existe um único natural n para o qual $m = 2n = f(n)$. O interessante é que essa bijeção, já

ressaltada por Galileu Galilei aproximadamente no século XVII, indica que é possível associar os inteiros positivos com os naturais pares, um a um, como se houvesse tantos inteiros positivos quanto números naturais pares.

$$1 \rightarrow 2;\ 2 \rightarrow 4;\ 3 \rightarrow 6;\ 4 \rightarrow 8;\ 5 \rightarrow 10;...$$

Inicialmente, parece contraditório que um conjunto (N) possa ter "tantos elementos quanto" um de seus subconjuntos próprios (no caso, $P = \{n \in N;\ n \text{ é par}\}$). Este fato só foi completamente elucidado no século XIX, por Georg Cantor, que desenvolveu a teoria formal dos conjuntos. Cantor caracterizou como propriedade intrínseca aos conjuntos infinitos a existência de uma correspondência biunívoca entre um conjunto infinito e um de seus subconjuntos próprios.

Por definição, dados dois conjuntos, diz-se que eles têm mesma **cardinalidade** quando for possível estabelecer uma correspondência biunívoca entre eles. Assim, os conjuntos $X = \{a, e, i, o, u\}$ e $I_5 = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ podem formar várias funções bijetoras (5!=120), como a que segue:



Daí é que surge a idéia fundamental de *número de elementos*, para conjuntos finitos: $n(X) = \text{card}(X) = 5$. A propósito, sendo n um número natural e $I_n = \{1, 2, 3,..., n\}$, um conjunto é finito quando existir uma bijeção entre ele e I_n, para algum natural n. Neste caso, diz-se que o conjunto tem n elementos.

O raciocínio é generalizar esse conceito. Um conjunto A é dito infinito quando é impossível encontrar um natural n para o qual exista uma correspondência biunívoca entre A e I_n. Prova-se (de modo não trivial) a propriedade citada acima relativamente a conjuntos infinitos e subconjuntos próprios. Daí, surgem diferentes "tipos" de infinitos, uma espécie de hierarquia do infinito. Dois conjuntos que estejam em correspondência biunívoca são ditos *equivalentes* (infinitos de mesmo "nível"). Os "menores" infinitos são os equivalentes a N, como o conjunto P, dos números pares, ou o dos números ímpares (basta notar a correspondência $n \rightarrow 2n - 1$). É curioso que Z e Q também sejam infinitos equivalentes a N (novamente, fatos não tão triviais). Por sua vez, o conjunto dos números reais e mesmo o dos irracionais possuem infinitos "maiores" que o de N. Cantor provou que a própria escala de infinitos é infinita.

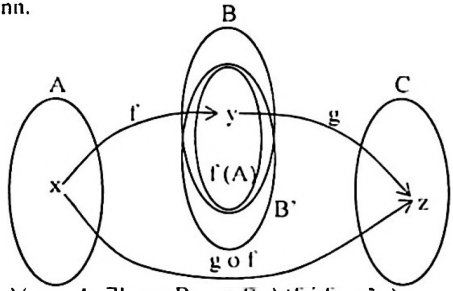
Apenas para ter-se uma idéia do alcance desses conceitos, é fácil notar que os intervalos [0,1] e [24, 69] têm a mesma potência (mesma "quantidade de elementos", ou antes, mesma cardinalidade). Em verdade, basta perceber que a função $f: [0,1] \rightarrow [24, 69]$ de lei $f(x) = 24 + 45x$ é uma bijeção. Logo, esses intervalos são equivalentes.

2.7. COMPOSIÇÃO DE FUNÇÕES

2.7.1. DEFINIÇÃO

Considerem-se as funções f: A → B e g: B' → C, tais que f (A) ⊂ B', isto é, de modo que a imagem de f esteja contida no domínio de g. Dessa forma, para cada x em A, existe um único y em B, para o qual y = f(x) (pois f é uma função). Concomitantemente, qualquer que seja y' em B', *inclusive os valores y precedentes* (desde que f (A) ⊂ B'), possui um único elemento z em C, tal que z = g(y'). Assim, está bem definida a função h: A → C, tal que h(x) = z = g(y) = g(f(x)). Tal função h é denominada **a função composta de g com f**, sendo comumente representada por g o f ("g composta com f", "g bola f" ou, simplesmente, "g o f").

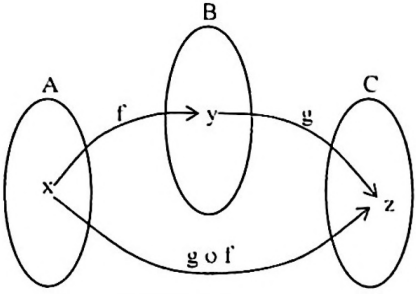
É muito útil visualizar (ainda que estaticamente) o seguinte esquema da definição dada por meio de diagramas de Venn.



∀ x ∈ A, ∃! y ∈ B: y = f(x) (f é função)
∀ y' ∈ B', ∃! z ∈ C: z = g(y') (g é função)
y = f(x) ∈ B ⇒ y ∈ B' (f(A) ⊂ B')
Daí: ∀ x ∈ A, ∃! z ∈ C: z = g(y) = g(f(x)).

Muitos autores, para simplificar o entendimento da definição, consideram nos parágrafos anteriores o caso particular em que B = B'. Note-se, assim, que a definição fica automaticamente satisfeita, já que f (A) está contida em B, por definição. É fundamental perceber, contudo, que a definição fornecida não exige tamanha restrição. Não é necessário (embora seja suficiente) que o domínio de g coincida com o contradomínio de f para que se defina perfeitamente g o f. Basta que g seja capaz de transformar qualquer f(x) ∈ B em algum z ∈ C, o que será possível toda vez em que f (A) ⊂ B'.

Ainda assim, é conveniente visualizar o que ocorre quando ocorre f: A → B e g: B → C, condição que, de fato, simplifica bastante a representação esquemática da composição de funções.



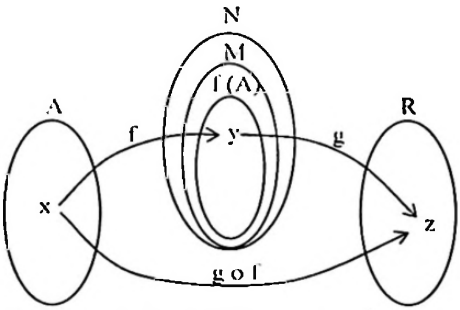
Pode-se entender a composição de funções como sendo um "encurtamento" do caminho de transformações sucessivas x → y → z. A composta transforma, diretamente, x em z, sem preocupar-se com a transformação intermediária de y em z.

Portanto, por definição, dadas as funções f: A → B e g: B' → C, tais que f(A) ⊂ B', denomina-se função composta de g com f a função definida por:

g o f: A → C, com (g o f)(x) = g(f(x)).

Exemplos:

a) Sejam os conjuntos: A dos alunos do Ideal Militar; N dos números naturais; M dos números de matrícula dos alunos do Grupo Educacional Ideal; R dos números reais. Considerem-se agora as funções: f, de A em N, que transforma cada aluno no número de matrícula correspondente (que é natural); g, de M em R, que associa cada número de matrícula à mensalidade correspondente, em R$. Inicialmente, note-se que obviamente N ≠ M (pois nem todo número natural é a matrícula de algum aluno do GEI), mas f(A) ⊂ M, isto é, a imagem de f está contida em M (porque todo aluno do Ideal Militar também é aluno do GEI). Dessa maneira, está perfeitamente definida uma função h, de A em R, que faz corresponder a cada aluno do Ideal militar o valor de sua mensalidade, em reais (que pode, também, ser nula). Portanto, h = g o f.



O aluno x do Ideal Militar tem o número de matrícula y e paga a mensalidade z.

b) Sejam f, g: R → R funções definidas por f(x) = 2x² – 5 e g(x) = 3x + 1. Tanto f o g quanto g o f, ambas de R em R, estão bem definidas e são tais que:

(f o g)(x) = f(g(x)) = 2 [g(x)]² – 5 = 2.(3x + 1)² – 5 = 18x² + 12x – 3.

(g o f)(x) = g(f(x)) = g(2x² – 5) = 3.(2x² – 5) + 1 = 6x² – 14.

Note-se que, embora ambas as composições existam, tem-se f o g ≠ g o f, ou seja, já é possível perceber que **a composição de funções não goza da propriedade comutativa**.

É importante observar que o procedimento que se utiliza para efetuar a composição de duas funções é um tanto arbitrário, no seguinte sentido: para calcular, por exemplo, (f o g)(x) pode-se, inicialmente, utilizar tanto f quanto g. Assim, poder-se-ia obter (f o g)(x) "atacando" primeiramente g:

(f o g)(x) = f(g(x)) = f(3x + 1) = 2.(3x + 1)² – 5 = 18x² + 12x – 3.

Analogamente, seria possível encontrar (g o f)(x) olhando para g, antes de f:

(g o f)(x) = g(f(x)) = 3.(f(x)) + 1 = 3.(2x² – 5) + 1 = 6x² – 14.

c) Sendo f: R* → R dada por $f(x) = \frac{1}{x}$ e g: R → R definida por g(x) = x², é fácil concluir que está definida a função g o f: R* → R, visto que a imagem de f (R*, por sinal) está contida no domínio de g. Assim:

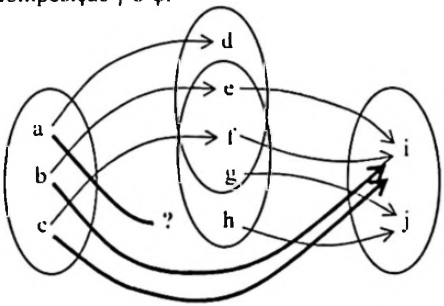
$$(g \circ f)(x) = g(f(x)) = [f(x)]^2 = \left(\frac{1}{x}\right)^2 = \frac{1}{x^2}.$$

É crucial perceber que o domínio de f passa a ser o domínio de g o f e que o contradomínio de g o f é o contradomínio de g.

Também é imperioso notar que não faz sentido falar em f o g, uma vez que *a imagem de g* (R_+) *não está contida no domínio de f* (R*). Considerando, porém, a restrição de g definida por h: R* → R,

com $h(x) = x^2$, pode-se, agora, definir a composta f o h: $R^* \to R$, em que: $(f \circ h)(x) = f(h(x)) = \frac{1}{h(x)} = \frac{1}{x^2}$.

d) Sejam φ: {a, b, c} → {d, e, f, g} e γ: {e, f, g, h} → {i, j} definidas respectivamente por: $\begin{cases} \varphi(a) = d \\ \varphi(b) = e \\ \varphi(c) = f \end{cases}$ e $\begin{cases} \gamma(e) = i \\ \gamma(f) = i \\ \gamma(g) = j \\ \gamma(h) = j \end{cases}$. Note-se que, como a imagem de φ ({d, e, f}) não está contida no domínio de γ, não está definida a composição $\gamma \circ \varphi$.



e) Sabendo que f: R → R é dada por f(x) = 2x + 7 e que f o g: R → R é definida por $(f \circ g)(x) = x^2 - 2x + 3$, como determinar a lei da função g? A resposta é simples. Por definição: $(f \circ g)(x) = f(g(x)) = 2.g(x) + 7$. Logo: $2.g(x) + 7 = x^2 - 2x + 3$, do que: $g(x) = \frac{x^2}{2} - x - 2$.

f) Sendo as funções reais g, definida por g(x) = 2x + 3, para todo x real, e f o g, dada por $(f \circ g)(x) = \frac{2x+5}{x+1}$, para todo $x \neq -1$, obter a lei da função f.

Novamente, de acordo com a definição de composição:

$(fog)(x) = f(g(x)) = f(2x+3)$. Com uma mudança de variáveis, pode-se afirmar que $f(2t + 3) = \frac{2t+5}{t+1}$. Seja, agora, $x = 2t + 3$. Deve-se impor $t = \frac{x-3}{2}$. Daí:

$$f(x) = \frac{2\left(\frac{x-3}{2}\right)+5}{\frac{x-3}{2}+1} = \frac{x-3+5}{\frac{x-3+2}{2}} \Leftrightarrow f(x) = \frac{2x+4}{x-1}, \text{ definida } \forall\, x \neq 1.$$

2.7.2. PRINCIPAIS PROPRIEDADES

I. ASSOCIATIVIDADE

Dadas as funções f: A → B, g: B' → C e h: C'' → D, tais que $f(A) \subset B'$ e $g(B') \subset C''$. Nestas condições, está bem determinada a função composta h o g o f: A → D, e se tem:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$$

DEMONSTRAÇÃO

Inicialmente, já que:

a) $\forall\, x \in A, \exists!\, y \in B$: y = f(x) (pois f é função);

b) $\forall y \in B'$ (inclusive com $y = f(x)$, uma vez que $f'(A) \subset B'$), $\exists! z \in C: z = g(y)$ (pois g é função);
c) $\forall z \in C'$ (inclusive com $z = g(y)$, uma vez que $g(B') \subset C'$), $\exists! w \in D: w = h(z)$ (pois h é função), pode-se garantir que, para cada x em A existe um único w em D, de modo que:
$w = h(z) = h(g(y)) = h(g(f(x)))$, ou seja, a relação $h \circ g \circ f: A \to D$ é funcional.
Além disso, por definição de composição de funções:
$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ g)(f(x)) = (h \circ g)(y) = h(g(y)) = h(z) = w$, bem como, $(h \circ (g \circ f))(x) = h((g \circ f)(x)) = h(g(f(x))) = h(g(y)) = h(z) = w$. Como o w é único, tem-se que:
$((h \circ g) \circ f)(x) = (h \circ (g \circ f))(x)$. $\forall x \in A$. Portanto:

$$(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f) \text{ (c.q.d.)}$$

II. EXISTÊNCIA DO ELEMENTO NEUTRO (IDENTIDADE), À ESQUERDA E À DIREITA

Seja $f: A \to B$ uma função qualquer. Então, existem funções $I_A: A \to A$ e $I_B: B \to B$, ambas definidas por $I_A(x) = x$ e por $I_B(y) = y$ (note-se que a correspondência é a mesma), de modo que:

$$f \circ I_A = f \text{ e } I_B \circ f = f$$

DEMONSTRAÇÃO

Inicialmente, perceba-se que tanto $f \circ I_A: A \to B$ e $I_B \circ f: A \to B$ estão bem definidas, uma vez que, como é óbvio, $I_A(A) = A \subset A$ (e, assim, existe $f \circ I_A$) e $f'(A) \subset B$ (o que garante a existência de $I_B \circ f$).

Além disso, como também é trivial, para todo x em A, tem-se:
$(f \circ I_A)(x) = f(I_A(x)) = f(x)$ e
$(I_B \circ f)(x) = I_B(f(x)) = I_B(y) = y = f(x)$, significando que $f \circ I_A = f$ e $I_B \circ f = f$.

III. COMPOSIÇÃO DE INJEÇÕES

Sejam $f: A \to B$ e $g: B' \to C$ funções tais que $f'(A) \subset B'$. Se f e g são injetivas, então $g \circ f$ também é injetiva.

DEMONSTRAÇÃO

Sejam x_1 e x_2 elementos quaisquer de A. Então:
$(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Leftrightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Rightarrow f(x_1) = f(x_2)$ (pois g é injetiva) $\Rightarrow x_1 = x_2$ (pois f é injetiva).

Portanto, como $(g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$, tem-se que $g \circ f$ é injetiva.

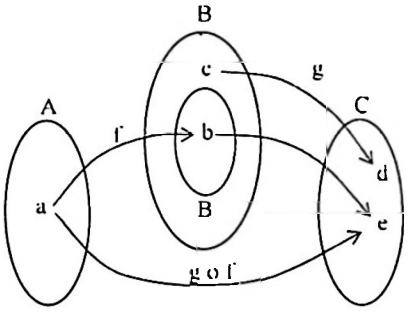
IV. COMPOSTA DE SOBREJEÇÕES

Sejam as funções $f: A \to B$ e $g: B \to C$ funções sobrejetivas. Então, a composta $g \circ f$ é, também, sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO

Como g é sobrejetora, tem-se:
a) $\forall z \in C, \exists y \in B: z = g(y)$.
Devido à sobrejetividade de f:
b) $\forall y \in B, \exists x \in A: y = f(x)$.
Desse modo, para cada elemento z em C, pode-se escolher algum y correspondente em B, por "a". E, *para tal y*, é possível escolher algum x correspondente em A, graças a "b". Desse modo, é correto afirmar que:
$\forall z \in C, (\exists y \in B \text{ e}) \exists x \in A: z = g(y) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$, ou seja, que $g \circ f$ é uma sobrejeção.

OBSERVAÇÃO: Deve-se ressaltar que, para que este teorema seja válido, o contradomínio de f deve coincidir com o domínio de g. No caso mais geral (o da definição dada), o resultado pode não ser verdadeiro, como indica o seguinte contra-exemplo.



Embora f: A → B e g: B' → C sejam, ambas, sobrejetivas, e g o f: A → C esteja definida, esta não é sobrejetiva.

V. COMPOSIÇÃO DE BIJEÇÕES

Sendo f: A → B e g: B → C duas funções bijetivas, a sua composta, g o f também é bijetiva. A demonstração é trivial, a partir dos dois teoremas precedentes.

VI. Sejam f: A → B e g: B' → C funções tais que f'(A) ⊂ B'. Se g o f: A → C é injetiva, então f também é injetiva.

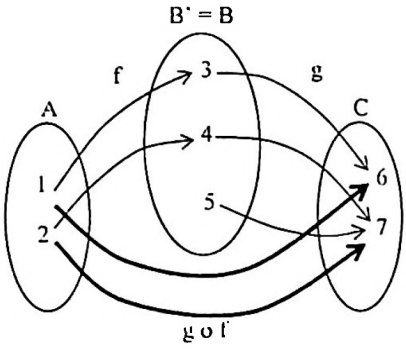
DEMONSTRAÇÃO

Suponha-se que x_1 e x_2 sejam dois elementos de A. Pode-se afirmar que:

$f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) = g(f(x_2))$ (pois g é uma função *qualquer* e f'(A) ⊂ B'). Uma vez que g o f é injetiva, tem-se:

$g(f(x_1)) = g(f(x_2)) \Leftrightarrow (g \circ f)(x_1) = (g \circ f)(x_2)$ (por definição) $\Rightarrow x_1 = x_2$. Por conseguinte, f é uma injeção.

OBSERVAÇÃO: É muito importante notar que a injetividade da composta g o f implica, tão somente, a injetividade da função f ("interna" à composição). Não necessariamente a função g deve ser injetora, como indica o exemplo a seguir.



g o f é injetora, f também (como não poderia deixar de ser), mas g não.

VII. Sejam $f: A \to B$ e $g: B' \to C$ funções tais que $f(A) \subset B'$. Se $g \circ f: A \to C$ é sobrejetiva, então g também é sobrejetiva.

DEMONSTRAÇÃO

Como $g \circ f$ é uma sobrejeção, pode-se afirmar que, qualquer que seja o elemento z em C, existe um elemento x em A, para o qual:

$$z = (g \circ f)(x) = g(f(x)) \quad (I)$$

Desde que f é uma função (*qualquer*) de A em B, pode-se garantir que, para cada x em A (inclusive o x acima), existe um (*único*) y correspondente em B, tal que:

$$y = f(x) \quad (II)$$

Finalmente, como $f(A) \subset B'$, tal y pertence a B'. Assim, (I) e (II) permitem concluir que:

$\forall z \in C, (\exists x \in A \text{ e}) \exists y \in B' : z = g(f(x)) = g(y)$, ou seja, que g é uma sobrejeção.

OBSERVAÇÃO: Novamente, faz-se mister destacar que a sobrejetividade da composta $g \circ f$ acarreta, apenas, a sobrejetividade da função g ("externa" à composição). A função f não deve ser, obrigatoriamente, uma função sobrejetiva, como atesta o exemplo do teorema precedente.

2.8. INVERSÃO DE FUNÇÕES

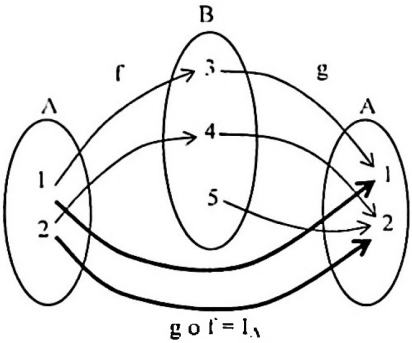
2.8.1. INVERSA À ESQUERDA

Seja $f: A \to B$ uma função. Diz-se que $g: B \to A$ é uma **função inversa à esquerda de f** quando:

$$g \circ f = I_A.$$

Nestas condições, diz-se ainda que f é **invertível (ou inversível) à esquerda.**

EXEMPLO.



Note-se que g é **uma** inversa à esquerda de f. O artigo indefinido está ressaltado devido ao fato de tal função não ser a única inversa à esquerda de f. Em verdade, basta observar que, por exemplo, a função $g^*: B \to A$, definida por $g^*(3) = 1$, $g^*(4) = 2$ e $g^*(5) = 1$ é, também, uma outra inversa à esquerda de f, como é muito fácil verificar.

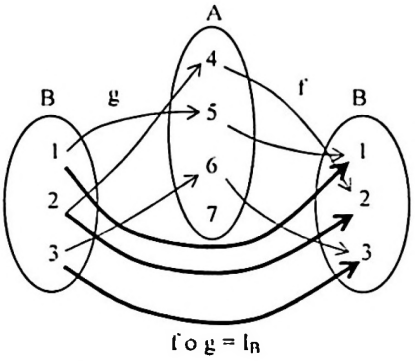
2.8.2. INVERSA À DIREITA

Dada a função $f: A \to B$, uma função $g: B \to A$ é dita **inversa à direita de f** quando:

$$f \circ g = I_B.$$

Sob tais hipóteses, f é dita **invertível (ou inversível) à direita.**

EXEMPLO:



$f \circ g = I_B$

De novo é importante perceber que é possível haver mais de uma inversa à direita para uma dada função. Assim, no exemplo acima, fazendo $g': B \to A$ definida por:

$g'(x) = \begin{cases} g(x), \text{ se } x \in \{1,3\} \\ 7, \text{ se } x = 2 \end{cases}$, tem-se outra inversa à direita de f, distinta de g (verificar tal fato!).

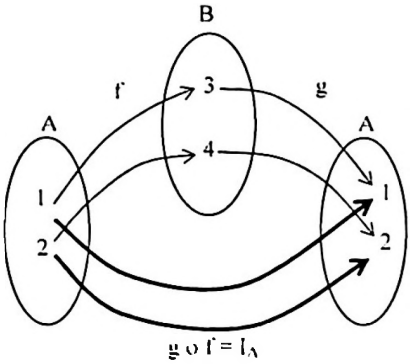
2.8.3. FUNÇÃO INVERSA

Considere-se uma função $f: A \to B$. Diz-se que uma função $g: B \to A$ é **inversa de f** quando g é **inversa à esquerda e à direita de f**. Assim: **g é inversa de f** $\Leftrightarrow g \circ f = I_A$ e $f \circ g = I_B$.

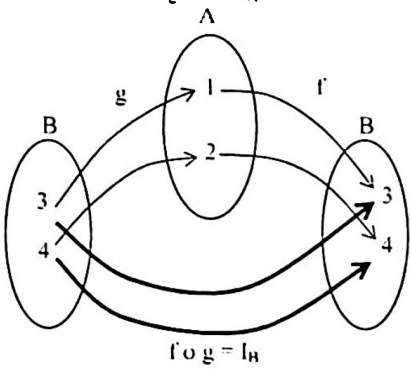
Quando isto ocorre, diz-se que f é **invertível** (ou inversível).

Note-se que, trivialmente, caso g seja inversa de f, tem-se que f também é inversa de g. Por isso, f e g são ainda denominadas **inversas entre si.**

EXEMPLO:



$g \circ f = I_A$



$f \circ g = I_B$

2.8.4. PRINCIPAIS PROPRIEDADES

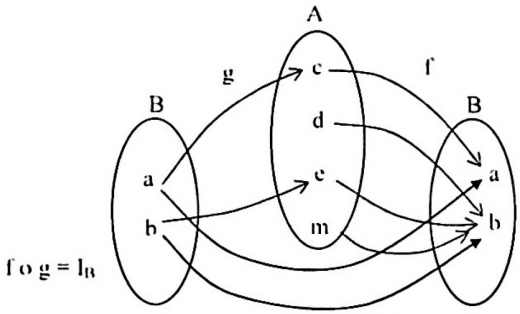
I. Uma função admite inversa à direita se, e somente se, é sobrejetora.

DEMONSTRAÇÃO

Suponha-se, a princípio, que $f: A \rightarrow B$ seja uma função invertível à direita, isto é, que exista uma função $g: B \rightarrow A$, tal que: $f \circ g = I_B$. Como uma função identidade é sempre *bijetiva* (por quê?), tem-se uma composição bijetiva. Particularmente, $f \circ g$ é sobrejetora e, de acordo com o teorema VII do item 1.2, f também deve ser sobrejetora.

Reciprocamente, seja agora $f: A \rightarrow B$ uma função sobrejetora qualquer. Então, qualquer que seja o y em B, é sempre possível escolher (pelo menos) um x em A, de forma que $y = f(x)$. É possível fixar um determinado x^* (*arbitrariamente escolhido*) para cada y em B. Defina-se a função $g: B \rightarrow A$ da seguinte maneira: $g(y) = x^*$, tal que $f(x^*) = y$ (isto significa que x^* foi o valor correspondente a um certo y, previamente). Tem-se que:
$(f \circ g)(y) = f(g(y)) = f(x^*) = y$, ou seja, que $f \circ g = I_B$. Logo, f é invertível à direita.

EXEMPLO:



Dado qualquer elemento y de B, é possível obter algum elemento x em A (no caso, exatamente um para a e exatamente três para b), de tal modo que $y = f(x)$. Para cada y, fixe-se um x^* correspondente. Aqui, para $y = a$, fixou-se $x^* = c$ (o único permitido). Para $y = b$, utilizou-se $x^* = e$ (poderia ser d ou m, também). Assim, criou-se uma inversa g à direita de f.

OBSERVAÇÃO: Como é fácil notar, a inversa à direita *não está unicamente determinada*, a não ser que f seja, ao mesmo tempo injetora (e, daí, bijetora).

II. Uma função admite inversa à esquerda se, e somente se, é injetora.

DEMONSTRAÇÃO

Supondo que f: A → B seja invertível à esquerda, existirá uma função g: B → A, tal que: g o f = I_A. Daí, g o f será bijetiva e, particularmente, injetiva. Em conformidade com o teorema VI do item 1.2, concluir-se-á que f também será injetora.

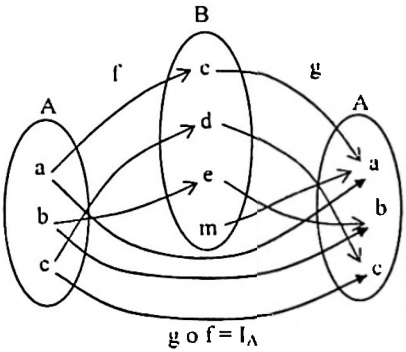
Considere-se, agora, que f: A → B seja uma função injetora. Definindo a função g: B → A tal que:

$g(y) = \begin{cases} x, \text{ se } y \in f(A) (\text{com } y = f(x)) \\ \text{qualquer valor, se } y \notin f(A) \end{cases}$, tem-se que g é uma inversa de f, uma vez que:

(g o f)(x) = g(f(x)) = g(y) = x, ou seja, g o f = I_A.

Naturalmente, o "qualquer valor" ao qual se refere a definição de g, consiste em um elemento arbitrariamente escolhido em A, que é o contradomínio de g, isto é, o conjunto em que g toma valores.

EXEMPLO:



g o f = I_A

Já que c, d, e pertencem à imagem de f (f(A)), tais elementos já têm "destino certo" em A, por g: devem ser os correspondentes valores dos quais cada um é imagem. É fundamental notar que m, no entanto, pode ter *qualquer imagem* por g, o que não afetará o fato de ser g o f = I_A.

OBSERVAÇÃO: Mais uma vez, a inversa à esquerda *não está unicamente determinada*, a não ser que f seja, ao mesmo tempo sobrejetora (e, conseqüentemente, bijetora).

III. Uma função é invertível se, e somente se, é bijetora.

Com efeito, basta notar que f é invertível se, e somente se, é invertível à esquerda e à direita, o que ocorre se, e somente se, ela é injetiva e sobrejetiva, de acordo com os dois últimos resultados obtidos.

Conforme já é de esperar-se, quando uma função for bijetora, sua inversa será **única**. Nesta situação, pode-se representar a inversa de uma função f pelo símbolo f^{-1}, uma vez que tal inversa está bem determinada quando f for uma correspondência biunívoca. Ressalte-se que $(f^{-1})^{-1} = f$, o que é imediato de provar a partir da definição, o que justifica a terminologia **funções inversas entre si**.

É também possível provar a unicidade da função inversa assim: caso g_1 e g_2 sejam duas funções inversas de f, deve-se impor que: $g_2 = I_A \circ g_2 = (g_1 \circ f) \circ g_2 = g_1 \circ (f \circ g_2) = g_1 \circ I_B = g_1$.

2.9. ÁLGEBRA DE FUNÇÕES

Sejam as funções $f_1: A_1 \to B_1$ e $f_2: A_2 \to B$, dadas respectivamente por $y = f_1(x)$ e $y = f_2(x)$. Suponha-se que $A_1, A_2, B_1, B_2 \subset R$.

Denomina-se domínio comum a f_1 e a f_2 o conjunto $A = A_1 \cap A_2$. O contradomínio comum a f_1 e a f_2 é o conjunto $B = B_1 \cup B_2$. Nestas condições é possível definir as seguintes operações algébricas entre as funções dadas:

I. ADIÇÃO E SUBTRAÇÃO

$(f_1 \pm f_2) : A \to B$, dada por $(f_1 \pm f_2)(x) = f_1(x) = f_2(x)$

II. MULTIPLICAÇÃO

$(f_1 \cdot f_2) : A \to B$, dada por $(f_1 \cdot f_2)(x) = f_1(x) \cdot f_2(x)$

III. DIVISÃO

$\left(\frac{f_1}{f_2}\right) : A_* \to B$, definida por $\left(\frac{f_1}{f_2}\right)(x) = \frac{f_1(x)}{f_2(x)}$, em que: $A_* = \{x \in A : g(x) \neq 0\}$

Exemplos:

a) Sendo $f : R - \{-1\} \to R$ e $g : R - \{2\} \to R$ definidas, respectivamente, por $f(x) = \frac{x+2}{x-1}$ e $g(x) = \frac{5-x}{x-2}$. Então:

$(f_1 + f_2) : R - \{-1, 2\} \to R$ é dada por:

$$(f_1 + f_2)(x) = \frac{x+2}{x-1} + \frac{5-x}{x-2} = \frac{x^2 - 4 + 6x - 5 - x^2}{(x-1)(x-2)}$$

Logo: $(f_1 + f_2)(x) = \frac{6x-9}{(x-1)(x-2)}$

Analogamente:

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = [f_1(x) \cdot f_2(x)] = \left(\frac{x+2}{x-1}\right)\left(\frac{5-x}{x-2}\right) \Rightarrow$$

$$(f_1 \cdot f_2)(x) = \frac{10 + 3x - x^2}{x^2 - 3x + 2}$$

b) Sendo $f : R_+ \to R_+$ dada por $f(x) = x$ e $g : R \to R_+$ dada por $g(x) = x^2$, tem-se:

$\left(\frac{f}{g}\right) : R_+^* \to R_+$, tal que $\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{x}{x^2} = \frac{1}{x}$

É também possível definir outras operações funcionais de modo análogo, como potenciação, radiciação (desde que façam sentido em R). Assim por exemplo, modular uma função $f : A \to B$ consiste em definir outra função, designada por $|f|$, da seguinte forma:

$|f| : A \to B$, com $(|f|)(x) = |f(x)|$

2.10. MONOTONICIDADE

2.10.1. DEFINIÇÕES

Sejam $f : A \to B$ uma função e X um subconjunto não vazio qualquer de A. Diz-se que f é uma função monótona em X quando ocorrer algum dos casos a seguir:

a) f é (estritamente) crescente

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$$

b) f é (estritamente) decrescente

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$$

c) f é não decrescente

$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \leq f(x_2)$$

d) f é não crescente

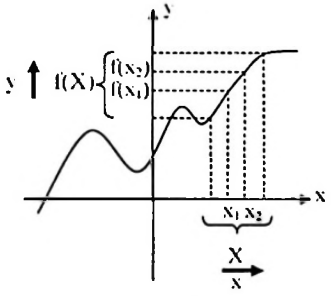
$$\forall x_1, x_2 \in X, x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) \geq f(x_2)$$

Em cada um dos dois primeiros casos, a função é também denominada estritamente monótona.

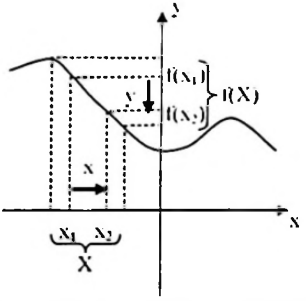
Como $a < b \Rightarrow a \leq b$, é fácil notar que as definições precedentes não se excluem mutuamente. Ou seja:

TODA FUNÇÃO CRESCENTE É NÃO DECRESCENTE.
TODA FUNÇÃO DECRESCENTE É NÃO CRESCENTE.

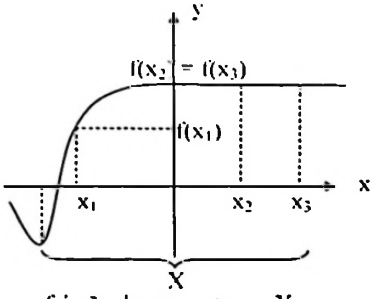
A seguir, os gráficos indicam exemplos de cada um dos quatro tipos de funções.



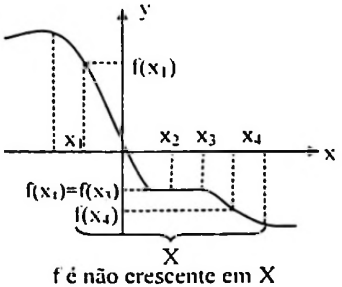
Aumentos em x produzem aumentos correspondentes em y : f é crescente em X.



Aumentos em x produzem decréscimo correspondentes em y : f é decrescente em X.



f é não decrescente em X



f é não crescente em X

Exemplos:

a) Seja a função $f: R \to R$, dada por $f(x) = 5 - 3x$. Então, f é decrescente e todo R. De fato:

$\forall x_1, x_2 \in R$

$x_1 < x_2 \Rightarrow -3x_1 > -3x_2 \Rightarrow 5 - 3x_1 > 5 - 3x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$

b) De um modo mais geral, é fácil estudar a monotonicidade de qualquer função afim. Sendo $f: R \to R$ definida por $f(x) = ax + b$, com $a \in R^*$ e $b \in R$, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} ax_1 < ax_2, \text{ se } a > 0 \\ ax_1 > ax_2, \text{ se } a < 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} ax_1 + b < ax_2 + b, \text{ se } a > 0 \\ ax_1 + b > ax_2 + b, \text{ se } a < 0 \end{cases}$$

$$x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) < f(x_2), \text{ se } a > 0 \\ f(x_1) > f(x_2), \text{ se } a < 0 \end{cases}$$, isto é:

Daí:

f é crescente $\Leftrightarrow a > 0$ e f é decrescente $\Leftrightarrow a < 0$

c) Considere-se $f: R \to R$ dada por $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$.

Como determinar a monotonicidade de f? Suponha-se, inicialmente, que $x_1 < x_2$. A idéia é estudar o sinal de $f(x_1) - f(x_2)$. Neste caso:

$f(x_1) - f(x_2) =$

$(2x_2^2 - 3x_1 + 1) - (2x_2^2 - 3x_1 + 1) = 2(x_1^2 - x_2^2) - 3(x_1 - x_2) =$

$= 2(x_1 - x_2)(x_1 + x_2) - 3(x_1 - x_2) = (x_1 - x_2).[2(x_1 + x_2) - 3]$

Já que, por hipótese, $x_1 < x_2$ tem-se que $x_1 - x_2$ é necessário. Portanto, o sinal de $f(x_1) - f(x_2)$ depende, exclusivamente, do sinal de $2(x_1 + x_2) - 3$, se:

I. $x_1 + x_2 < \frac{3}{2}$, então $f(x_1) - f(x_2) > 0$, ou seja, $f(x_1) > f(x_2)$, e a função f é decrescente (pois $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$). Notando que $x_1 + x_2 < \frac{3}{2} \Leftrightarrow \frac{x_1 + x_2}{2} < \frac{3}{4}$ e lembrando que $\frac{x_1 + x_2}{2}$ é o ponto médio de $[x_1, x_2]$, tem-se, portanto, que a função quadrática $f: R \to R$ de lei $f(x) = 2x^2 - 3x + 1$ é decrescente apenas

quando o ponto médio do intervalo considerado encontra-se antes de $\frac{3}{4}$. Noutros termos, f é decrescente no intervalo: $(-\infty, 3/4]$.

II. $x_1 + x_2 > \frac{3}{2}$, então $f(x_1) - f(x_2) < 0$, de que $f(x_1) < f(x_2)$. Logo, de modo inteiramente análogo ao que se concluiu anteriormente, é fácil ver que f é crescente no intervalo $[3/4, +\infty)$.

d) Similarmente ao procedimento utilizado no item anterior, é possível afirmar que uma função quadrática qualquer $f : R \to R$, com $f(x) = ax^2 + bx + c$, em que $a \neq 0$, é:

$$\text{crescente em } \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right), \text{ se } a > 0$$

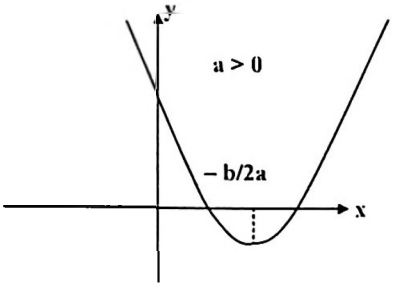
$$\text{decrescente em } \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right], \text{ se } a > 0$$

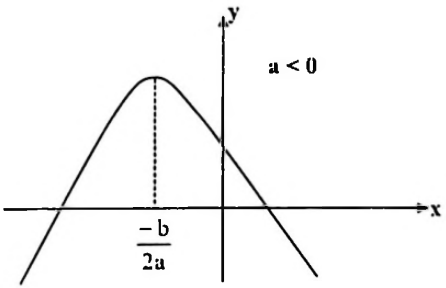
ou

$$\text{decrescente em } \left[-\frac{b}{2a}, +\infty\right), \text{ se } a < 0$$

$$\text{crescente em } \left(-\infty, -\frac{b}{2a}\right], \text{ se } a < 0$$

Tudo isso confirma os gráficos de uma função quadrática.



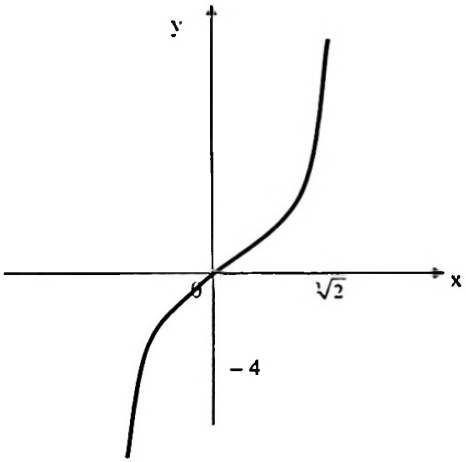


Um bom treino é verificar todos esses fatos. Basta notar que:
$f(x_1) - f(x_2) = (ax_1^2 + bx_1 + c) - (ax_2^2 + bx_2 + c) = (x_1 - x_2).[a(x_1 - x_2) - b]$, e seguir os raciocínios do exemplo anterior.

c) A função $f : R \to R$, definida por $f(x) = 2x^3 - 4$ é crescente em todo seu domínio. Com efeito, supondo $x_1 < x_2$, tem-se que:
$f(x_1) - f(x_2) = (2x_1^3 - 4) - (2x_2^3 - 4) = 2(x_1^3 - x_2^3) = 2(x_1 - x_2)(x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2)$.

Olhando para $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2$ como um trinômio quadrático em x_1, obtém-se um discriminante $\Delta = x_2^2 - 4x_2^2 = -3x_2^2$ que, para $x_2 \neq 0$, é sempre negativo. Assim, $x_1^2 + x_1x_2 + x_2^2 > 0, \forall x_1 \in R$ e $\forall x_2 \in R^*$. Daí, $f(x_1) - f(x_2) < 0$, do que $f(x_1) < f(x_2)$, e é crescente.

O caso em que $x_2 = 0$ é imediato, pois: $x_1 < x_2 = 0 \Leftrightarrow x_1 < 0$ e : $f(x_1) - f(0) < 0 \Rightarrow f(x_1) < f(0)$. Ainda assim, f é crescente. A propósito, um esboço para o gráfico de f é:



f) Seja a função $f : R - \{-2\} \to R$, definida pela lei $f(x) = \dfrac{2-3x}{x+2}$, determine-se a monotonicidade de f.

Para tanto, suponha-se, a princípio, $x_1 < x_2$ (e, naturalmente, $x_1, x_2 \neq -2$.

Daí: $f(x_1) - f(x_2) = \dfrac{2-3x_1}{x_1+2} - \dfrac{2-3x_2}{x_2+2} = \dfrac{8(x_1 - x_2)}{(x_1+2).(x_2+2)}$

A pergunta é: Qual o sinal dessa última expressão? Ou seja, quem é o maior: $f(x_1)$ ou $f(x_2)$?

A resposta deve ser analisada segundo os seguintes casos:

I. $\boxed{x_1 < x_2 < -2}$ Aqui, têm-se: $\begin{cases} x_1 + 2 < 0 \\ x_2 + 2 < 0 \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$f(x+1) > f(x_2)$, isto é, f é decrescente em $(-\infty, -2)$.

II. $\boxed{x_2 > x_1 > -2}$ Nessa situação $\begin{cases} x_1 + 2 > 0 \\ x_2 + 2 > 0 \\ x_1 - x_2 < 0 \end{cases} \Rightarrow$

$f(x+1) > f(x_2)$. Novamente, f é crescente em $(-2, +\infty)$

Neste ponto, deve-se questionar: a função de f é decrescente em todo seu domínio? Noutros termos, é correto afirmar que f é decrescente em
$(-2, +\infty) \cup (-2, +\infty) = R - \{-2\}$?

A resposta é gritante: NÃO! Basta verificar que, embora $-3 < 0$,tem-se $f(-3) = -11 < 1 = f(0)$. Isso significa que, apesar de ocorrer um acréscimo em x, há também um autônomo em y, portanto, f(x) não cresceu de -3 para 0.

Dessa forma, o que é possível afirmar é, apenas, que:
Em $(-\infty, -2)$, f é decrescente.
Em $(-2, -\infty)$, f é decrescente.

Acerca do terceiro caso, III, em que $x_1 < -2 < x_2$, nada se pode afirmar sobre a monotonicidade de f, a não ser no caso trivial em que se tomo um único elemento $x_1 < -2$ e um único elemento $x_2 > -2$. Por exemplo, no conjunto $x = \{-3, 0\}$, f é crescente. Já em $x = \{-3, 0, 1\}$, f não é monótona.

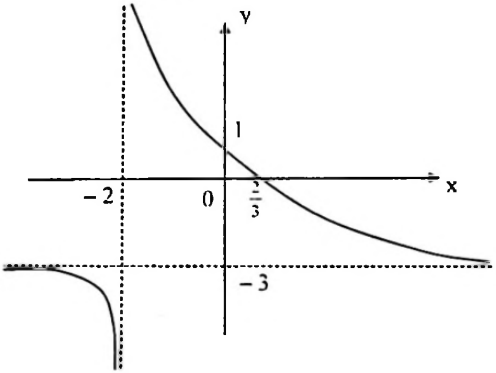
Quando se consegue esboçar o gráfico de f, toda a análise feita anteriormente fica mais inteligível. Para tanto, alguns procedimentos ajudam, tais como observar que:

- O domínio de f é $R - \{-2\}$. Assim, qualquer reta vertical intersecta G(f), com exceção da que passa por -2.
- A imagem de f é $R - \{-3\}$. É possível obter este resultado perguntando-se o seguinte: para quais valore de y existe um $x \in R - \{-2\}$, tal que $y = f(x)$? A idéia é isolar o x na lei de f, verificando quais as restrições obtidas para y, dessa forma:

$$y = \frac{2-3x}{x+z} \Leftrightarrow yx + 2y = 2 - 3x \Leftrightarrow yx + 3x = 2 - 2y \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow x(y+3) = 2 - 2y \Leftrightarrow x = \frac{2-2y}{y+3}, \text{ desde que } y \neq -3$$

f intersecta os eixos cartesianos em (0,1) e $\left(\frac{2}{3}, 0\right)$. Assim, um esboço do gráfico de f é:



2.10.2. ALGUNS RESULTADOS IMPORTANTES

2.10.2.1. Se uma função $f : A \to B$ é estritamente monótona em um conjunto $X \subset A$, então ela é injetiva em tal conjunto.

DEMONSTRAÇÃO

Para fixar idéias, suponha-se que f seja estritamente decrescente em X. Assim, caso $x_1 \neq x_2$, podem ocorrer dois casos:

I. $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.
II. $x_1 > x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

Em qualquer situação: $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$, ou seja, f é injetiva. O caso em que f é estritamente crescente é análogo.

Por isso, costuma-se trocar a expressão estritamente monótona por monótona injetiva.

2.10.2.2. Se $f_1 : A_1 \to B_1$ e $f_2 : A_2 \to B_2$ são monótonas de mesmo tipo, então $f_1 + f_2 : A_1 \cap A_2 \to B_1 \cup B_2$ é também monótona do mesmo gênero.

DEMONSTRAÇÃO

Sem perda de generalidade, suponha-se que f_1 e f_2 sejam não decrescentes. Daí:

$$\forall x_1, x_2 \in A_1 \cap A_2, x_1 < x_2 \Rightarrow \begin{cases} f(x_1) \leq f(x_2) \\ g(x_1) \leq g(x_2) \end{cases} \Rightarrow f(x_1) + g(x_1) \leq f(x_2) + g(x_2) \Rightarrow (f+g)(x_1) \leq (f+g)(x_2)$$

Portanto, f + g é, também, não decrescente.

2.10.2.3. Sejam as funções $f: A \to B$ e $g: B' \to C$, tais que $f(A) \subset B'$.

a) Se f e g são crescentes, então g o f também é crescente.

b) Se f e g são decrescentes, então g o f também é decrescente.

c) Se f é crescente e g é decrescente (ou vice-versa), então g o f é decrescente.

DEMONSTRAÇÃO

a) Por hipótese, para quaisquer x_1 e x_2 de A e quaisquer y_1 e y_2 de B', tem-se que:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (pois f é crescente).

$y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2)$ (pois g é crescente). Uma vez que $f(x_1)$ e $f(x_2)$ pertencem a B' (pois $f(A) \subset B'$), basta utilizar as implicações acima em seqüência.

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) < g(f(x_2))$. Logo:

$x_1 < x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) < (g \circ f)(x_2)$, ou seja, g o f é crescente.

b) Fica como exercício (inteiramente análogo ao item anterior).

c) Nesta situação, tem-se, por exemplo, que:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (pois f é crescente).

$y_1 < y_2 \Rightarrow g(y_1) < g(y_2)$ (pois g é decrescente).

Portanto, já que $f(x_1), f(x_2) \in B'$, pode-se garantir, sucessivamente, que:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2) \Rightarrow g(f(x_1)) > g(f(x_2))$. Assim:

$x_1 < x_2 \Rightarrow (g \circ f)(x_1) > (g \circ f)(x_2)$, ou seja, g o f é decrescente.

2.10.2.4. Suponha-se que $f: A \to B$ seja uma função bijetiva. Então, f^{-1} mantém a monotonicidade de f.

DEMONSTRAÇÃO

Como f é uma bijeção e monótona, deve ser monótona injetiva. Sem perda de generalidade, suponha-se que f seja estritamente decrescente. Assim, quaisquer que sejam x_1 e x_2 em A, tem-se:

$$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2).$$

Deve-se provar que, para todos y_1 e y_2 em B:

$$y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2).$$

Em verdade, como f é bijetiva, existem (únicos) x_1 e x_2 em A, tais que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$. Equivalentemente, pode-se escrever $x_1 = f^{-1}(y_1)$ e $x_2 = f^{-1}(y_2)$. Desse modo, supondo que $y_1 < y_2$, não é possível admitir que $x_1 < x_2$, pois, como f é decrescente:

$x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2) \Leftrightarrow y_1 > y_2$ (absurdo). Logo, $y_1 < y_2 \Rightarrow f^{-1}(y_1) > f^{-1}(y_2)$, e f^{-1} é decrescente.

2.11. PARIDADE

2.11.1. DEFINIÇÕES INICIAIS

Diz-se que um conjunto X é simétrico quando:

$$\forall x \in X \Rightarrow (-x) \in X$$

Assim, por exemplo, os conjuntos $A = \{-5, -2, -1, 0, 1, 2, 5\}$ e $B = [-7, 7]$, $C = (-1, 1) - \left\{-\frac{4}{5}, \frac{4}{5}\right\}$ são simétricos, enquanto $M = \{-2, -1, 0, 2\}$ e $N = [-7, 7)$ não.

Seja uma função f: A → B, definida num domínio simétrico. Denomina-se função par a função que satisfaz a seguinte condição:

$$\boxed{\forall x \in A, f(-x) = f(x).}$$

A função f é dita ímpar quando:

$$\boxed{\forall x \in A, f(-x) = -f(x).}$$

Exemplos:

a) f: {−1, 0, 1} → R, definida por f(−1) = 5, f(0) = 7 e f(1) = 5 é par.

b) f: {−2, −1, 0, 1, 2} → R, definida por f(−2) = 7, f(−1) = −3, f(0) = π, f(1) = 3 e f(2) = −7 é ímpar.

c) f: R* → R, dada por $f(x) = 3x^4 - \ln(x^2) - 5$ é par. Com efeito, qualquer que seja o real não nulo x, tem-se que:

$f(-x) = 3(-x)^4 - \ln[(-x)^2] - 5 = 3x^4 - \ln(x^2) - 5 = f(x)$.

d) g: R − {−1, 1} → R, definida por $g(x) = \dfrac{5x^3 - 2x}{1 - x^{24}}$ é ímpar. Com efeito, tem-se:

$$g(-x) = \frac{5(-x)^3 - 2(-x)}{1 - (-x)^{24}} = \frac{-5x^3 + 2x}{1 - x^{24}} = \frac{-(5x^3 - 2x)}{1 - x^{24}} = -g(x),\ \forall x \in R - \{-1, 1\}.$$

e) A função afim f: R → R, dada por f(x) = 3 − 4x não é par, pois, por exemplo, embora f(2) = −5, f(−2) = 11. Assim, *não é verdade* que ∀ x ∈ R, f(−x) = f(x). Além disso, como também é óbvio que f(−2) ≠ f(2) *é falso que* ∀ x ∈ R, f(−x) = −f(x). Portanto, f também não é ímpar.

Poder-se-ia chegar às mesmas conclusões notando o que ocorre com a expressão f(−x) em comparação a f(x). Dessa forma:

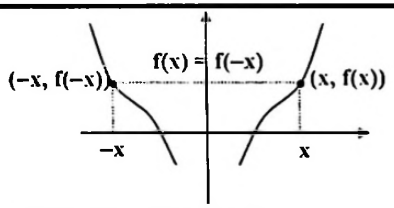
f(−x) = 3 − 4.(−x) = 3 + 4x, que naturalmente não é nem idêntica a f(x) (e, por conseguinte, *não é par*), nem simétrica a f(x) (logo, deixando de ser ímpar).

2.11.2. PRINCIPAIS PROPRIEDADES

I. Uma função real de variável real f: A → B, com A simétrico, é par se, e somente se, o gráfico de f é simétrico em relação ao eixo y.

DEMONSTRAÇÃO

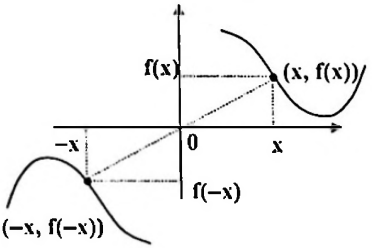
Basta notar que, sendo (x, f(x)) um ponto qualquer de G(f), f é par se, e somente se, f(−x) = f(x), ∀ x ∈ A. Isso é equivalente a dizer que a existência do ponto (x, f(x)) em G(f) acarreta a ocorrência do ponto (−x, f(−x)) no mesmo gráfico. Dessa forma, já que os pontos (x, f(x)) e (−x, f(−x)) = (−x, f(x)) são simétricos em relação ao eixo y (ou seja, o eixo y é a *mediatriz* do segmento de extremidades naqueles pontos), dado qualquer ponto de G(f) deve-se garantir também que o seu simétrico relativamente ao eixo das ordenadas pertença ainda a G(f), a fim de que f seja par, e reciprocamente.



II. Uma função real de variável real f: A → B, definida num domínio simétrico, é ímpar se, e somente se, o gráfico de f é simétrico em relação à origem, o que é equivalente a afirmar que o gráfico de f possui os dois eixos ordenados como eixo de simetria. Ou, ainda, que a origem é um centro de simetria do gráfico de f.

DEMONSTRAÇÃO

A demonstração é análoga à do teorema anterior, bastando apenas notar que a origem (0, 0) é o *ponto médio* do segmento de extremidades nos pontos (x, f(x)) e (−x, f(−x)) = (−x, −f(x)), como é imediato. Assim, pode-se garantir que a função f é ímpar se, e somente se, a ocorrência do ponto (x, f(x)) em G(f) implica o surgimento do ponto (−x, − f(x)) no mesmo gráfico.

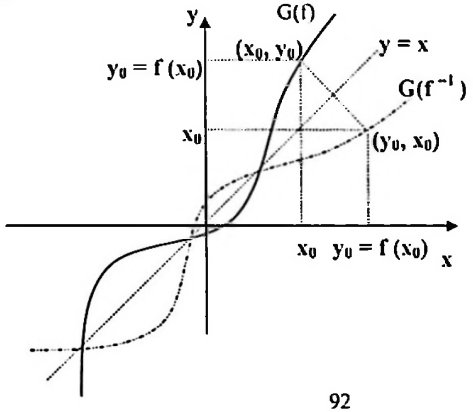


OBSERVAÇÃO

De maneira similar é possível demonstrar o seguinte resultado para funções inversas.

Seja f uma função real de variável real bijetiva. Se os gráficos de f e de sua inversa são traçados num mesmo sistema cartesiano, então um é o simétrico do outro em relação à bissetriz dos quadrantes ímpares.

Para a demonstração, é só notar que, dado qualquer ponto (x, f(x)) = (x, y) de G(f), o ponto (y, x) = (y, f^{-1} (y)) = (f(x), x) pertencerá ao gráfico de f^{-1}. Dessa forma, já que a reta y = x (*bissetriz dos quadrantes ímpares*) é a mediatriz do segmento de extremidades nos pontos (x, f(x)) e (f(x), x), as curvas G(f) e G(f^{-1}) são simétricas em relação àquela bissetriz, quando representadas num mesmo sistema cartesiano.



III. Suponha-se que f_1 e f_2 sejam funções pares e que g_1 e g_2 sejam funções ímpares, todas reais de variável real. Sendo possível definir as operações funcionais a seguir em domínios convenientes (comuns e simétricos), então:

a) $f_1 + f_2$, $f_1.f_2$, $g_1.g_2$, $\frac{f_1}{f_2}$ e $\frac{g_1}{g_2}$ são pares.

b) $g_1 + g_2$, $f_1.g_1$ e $\frac{f_1}{g_1}$ são ímpares.

DEMONSTRAÇÃO

Apenas para exemplificar, prove-se que $f_1 + f_2$ e $g_1.g_2$ são pares, assim como $g_1 + g_2$ e $\frac{f_1}{g_1}$ são ímpares. Com efeito:

$(f_1 + f_2)(-x) = f_1(-x) + f_2(-x) = f_1(x) + f_2(x) = (f_1 + f_2)(x)$, ou seja, $f_1 + f_2$ é par.

$(g_1.g_2)(-x) = g_1(-x).g_2(-x) = [-g_1(x)].[-g_2(x)] = g_1(x).g_2(x) = (g_1.g_2)(x)$, isto é, $g_1.g_2$ é par.

Analogamente:

$(g_1 + g_2)(-x) = g_1(-x) + g_2(-x) = [-g_1(x)] + [-g_2(x)] = -[g_1(x) + g_2(x)] = -(g_1 + g_2)(x)$, ou seja, $g_1 + g_2$ é ímpar.

$$\left(\frac{f_1}{g_1}\right)(-x) = \frac{f_1(-x)}{g_1(-x)} = \frac{f_1(x)}{-g_1(x)} = -\frac{f_1(x)}{g_1(x)} = -\left(\frac{f_1}{g_1}\right)(x)$$

As demonstrações restantes são similares e ficam como exercício.

É importante notar que nada pode afirmar-se sobre a diferença entre uma função par e uma função ímpar, como $f_1 - g_1$, por exemplo. Com efeito:

$(f_1 - g_1)(-x) = f_1(-x) - g_1(-x) = f_1(x) + g_1(x)$, que não é obrigatoriamente idêntica nem a $(f_1 - g_1)(x)$, nem a $-(f_1 - g_1)(x)$, portanto, nem par, nem ímpar, necessariamente. De modo análogo, a paridade da soma de uma função par com uma função ímpar, como $f_1 + g_1$ é inconclusiva, conforme é fácil notar (inclusive com contra-exemplos).

IV. Com as mesmas notações da propriedade anterior, supondo que as seguintes composições estejam bem definidas, pode-se garantir que:

a) $f_1 \circ f_2$ e $g_1 \circ g_2$ são pares (isto é, a composta de duas funções com a mesma paridade é par).

b) $f_1 \circ g_1$ e $g_2 \circ f_2$ são ímpares (ou seja, a composta de duas funções de paridades distintas é ímpar).

DEMONSTRAÇÃO

Apenas para exemplificar, tem-se que:

$(g_1 \circ g_2)(-x) = g_1(g_2(-x)) = g_1(-g_2(x)) = -[-g_1(g_2(x))] = g_1(g_2(x)) = (g_1 \circ g_2)(x)$, ou seja, a composta de duas funções ímpares é uma função par.

Os demais casos são análogos e ficam como exercício.

2.12. FUNÇÕES PERIÓDICAS

2.12.1. DEFINIÇÕES

Uma função é dita periódica quando existe um número real T, positivo, de modo que as imagens se repitam de T em T. Mais precisamente:

f: A → B é periódica ⇔ ∃ T > 0, f (x + T) = f (x), ∀ x ∈ A.

O número T é denominado período de f. Perceba-se que a definição exige que **T não dependa do particular valor de x escolhido em A** (pois f (x + T) = f (x) deve ser uma identidade, isto é, valer em qualquer x do domínio). Deve-se observar, também, a necessidade natural de não somente x, como também x + T serem ambos elementos do domínio de f.

Quando existe um número real positivo T_0 que é o menor dentre todos os demais períodos de f, T_0 é dito **período fundamental** de f. Em termos mais precisos, dada uma função periódica f: A → B:

T_0 é o período fundamental de f ⇔ f (x + T_0) = f (x) e 0 < T_0 ≤ T, ∀ T: f (x + T) = f (x).

Exemplos:

1. **Qualquer função constante pode ser considerada como uma função periódica, em que um período pode ser qualquer número real.** Com efeito, se f (x) = k, para qualquer x, tem-se inclusive que f (x + T) = k = f (x), ***independentemente do valor T escolhido.*** Note-se que, como não existe o menor número real positivo, nenhuma função constante (embora periódica) possui um período fundamental.

2. Considere-se uma função trigonométrica do tipo f: R → R, dada por f (x) = m + n.sen (a.x + b), em que n.a ≠ 0. Suponha-se que f seja periódica. Se isso de fato ocorrer, deve ser possível encontrar algum número real positivo T, de modo que: f (x + T) = f (x). Mas, então:
m + n.sen [a.(x + T) + b) = m + n.sen (a.x + b) ⇔ sen [a.(x + T) + b) = .sen (a.x + b) (*). Como se sabe, dois ângulos α e β têm o mesmo seno se, e somente se, α = β + 2kπ ou α = (π − β) + 2kπ, em que k é um número inteiro. Assim, a igualdade em (*) ocorre somente quando:
a.(x + T) + b = a.x + b + 2kπ (I) ou a.(x + T) + b = π − (a.x + b) + 2kπ (II). Portanto, a fim de que T seja um período de f, deve-se impor $T = \left|\frac{2k\pi}{a}\right|$ (por I) ou

$T = \left|\frac{\pi \ \ 2ax \ \ 2b+2k\pi}{a}\right|$ (por II). Neste ponto, deve-se notar que a segunda opção não convém, visto que T dependeria do valor de x escolhido. Portanto, qualquer período de f deve assumir a forma $T = \left|\frac{2k\pi}{a}\right|$, em que k ≠ 0. Mais ainda, o período fundamental de f é igual a $T = \left|\frac{2\pi}{a}\right|$.

OBSERVAÇÃO: Um argumento inteiramente análogo prova que as funções f: R → R, com f (x) = m + n.cos (a.x + b) são também periódicas, de período fundamental $T = \left|\frac{2\pi}{a}\right|$, bem como qualquer função f: R → R de lei f (x) = m + n.tg (a.x + b) possui período fundamental $T = \left|\frac{\pi}{a}\right|$.

3. Nenhuma função afim f: R → R, f (x) = ax + b, em que a ≠ 0, pode ser periódica. Em verdade, caso exista algum número real para o qual f (x + T) = f (x), então:
a(x + T) + b = ax + b ⇔ a.T = 0 ⇔ T = 0 (já que a ≠ 0).

4. Analogamente, nenhuma função quadrática f: R → R, f(x) = $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, pode ser periódica. Com efeito:

$f(x + T) = f(x) \Leftrightarrow a(x + T)^2 + b(x + T) + c = ax^2 + bx + c \Leftrightarrow 2axT + aT^2 + bT = 0 \Leftrightarrow 2ax + aT + b = 0$

(uma vez que $a \neq 0$). Daí, T deveria ser $\frac{2ax + b}{a}$, o que obviamente é conveniente, visto que T deve ser independente de x.

5. Denomina-se **maior (ou máximo) inteiro que não supera x** o (único) número inteiro k, tal que:

$$x - 1 < k \leq x.$$

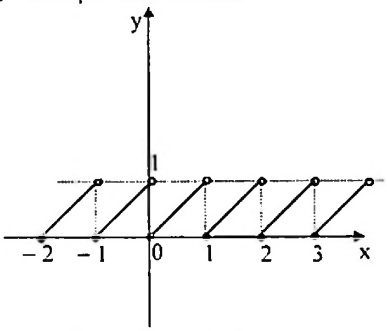
Utiliza-se a notação $k = [x]$. O inteiro k também recebe o nome de parte inteira de x.

Assim, por exemplo: $[5,7] = 5$; $[6] = 6$; $[-91] = -91$; $[-713,94] = -714$.

É fácil provar que, dentre várias outras propriedades:

- $[x] = x \Leftrightarrow x \in Z$ (pois não há mais que um inteiro no intervalo $(x - 1, x]$, de comprimento menor que 1; e, quando isso ocorre, o inteiro deve ser x).
- $0 \leq x - [x] < 1$. De fato: $x - 1 < k = [x] \leq x \Leftrightarrow -x \leq -[x] < 1 - x \Leftrightarrow 0 \leq x - [x] < 1$. O número $x - [x]$ é comumente representado por $\{x\}$ e recebe a denominação parte fracionária de x.
- $(x + 1) - [x + 1] = x - [x]$. Basta demonstrar que $[x + 1] - [x] = 1 = (x + 1) - x$. Com efeito, sendo $m = [x + 1]$ e $k = [x]$. Então, por definição, m e k são os inteiros que satisfazem: $(x + 1) - 1 < m \leq x + 1$ e $x - 1 < k \leq x$, do que segue $x < m \leq x + 1$ e $-x \leq -k < 1 - x$. Somando: $0 < m - k < 2$. É obvio que $m - k$ é inteiro. Logo, $m - k = 1$.

Defina-se, agora, a função f: R → R, por $f(x) = x - [x]$. De acordo com a última propriedade demonstrada acima, tem-se $f(x + 1) = f(x)$, $\forall x \in R$. Logo, f é periódica e *um* período de f é 1. Resta indagar se é *o* período de f, isto é, se 1 representa o período fundamental de f. A resposta é sim. Em verdade, supondo que houvesse um período T_0, tal que $0 < T_0 < 1$, então: $f(x + T_0) = f(x)$, $\forall x \in R$. Mas já que 1 é período de f: $f[(x + T_0) + 1] = f[(x + 1) - T_0] = f(x)$, $\forall x \in R$. Daí: $[(x + 1) + T_0] = [x]$ (*). Basta demonstrar que, se dois números têm mesma parte inteira, então eles diferem por um número menor que 1. De fato: $[a] = [b] = k \Leftrightarrow a - 1 < k \leq a$; $b - 1 < k \leq b$. Sem perda de generalidade, supondo $b \leq a$, vem que: $\begin{cases} -a \leq -k < 1 - a \\ b - 1 < k \leq b \end{cases} \Rightarrow b - a - 1 < 0 < 1 + b - a$. Somando $a - b$ a todos os membros das desigualdades: $-1 < a - b < 1$. De $b \leq a$, tem-se $0 \leq a - b < 1$. Portanto, de (*), conclui-se que: $(x + 1) + T_0 - x < 1 \Rightarrow T_0 < 0$, o que é um absurdo.



A propósito, tal função é também conhecida como "dente de serra", denominação facilmente justificável pelo gráfico, ilustrado acima.

6. Como saber se a função real de variável real de lei $f(x) = \cos\sqrt{x}$ (definida para todo real não negativo x) é periódica ou não? A idéia é, como já foi feito precedentemente, supor inicialmente que f seja periódica com período T. Caso isto ocorresse:

$f(x + T) = f(x) \Rightarrow \cos\sqrt{(x + T)} = \cos\sqrt{x}$. Lembrando que os ângulos α e β têm o mesmo co-seno se, e somente se, $\alpha = \pm\beta + 2k\pi$, em que k é um número inteiro, dever-se-ia impor que:

$\sqrt{x + T} = \pm\sqrt{x} + 2k\pi$. Quadrando:

$x + T = x + 4k^2\pi^2 \pm 2k\pi\sqrt{x}$, de que:

$T = 4k^2\pi^2 \pm 2k\pi\sqrt{x}$, o que não convém (T não pode depender de x).

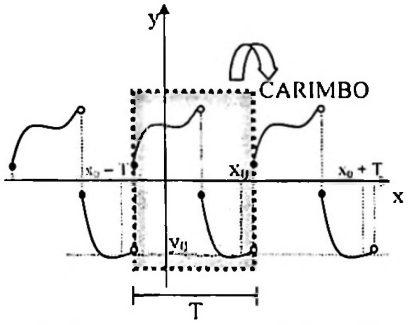
Por conseguinte, f não é periódica.

2.12.2. INTERPRETAÇÃO GRÁFICA

Graficamente, uma função é periódica de período T se, e somente se, seu gráfico pode ser inteiramente obtido através de translações horizontais de um trecho próprio qualquer, de comprimento T. Noutros termos: fixando uma parte "ininterrupta" (não interrompida) qualquer do gráfico de f, *com comprimento* (projeção do gráfico sobre o eixo x) T, todo o resto do gráfico nada mais é do que uma mera "cópia" de tal parte, podendo ser traçado a partir de *translações exclusivamente horizontais* do referido trecho.

Isto é uma conseqüência direta da definição. De fato, um ponto (x, f(x)) pertence ao gráfico de uma função periódica de período T se, e somente se, o ponto (x + T, f(x + T)) = (x + T, f(x)) também está em G(f). É só notar, então, que a distancia entre tais pontos é x + T − x = T (> 0). Como este raciocínio é válido para todo x do domínio de f

Para fixar idéias, pode-se usar uma metáfora bem útil. Imagine-se que seja destacada uma parte ininterrupta de G(f), com comprimento T. Caso se faça um carimbo de tal parte, para obter todo o gráfico de f é suficiente carimbá-lo, lado a lado, apenas deslizando esse carimbo na horizontal.



As imagens repetem-se de T em T:

$y_0 = f(x_0) = f(x_0 + T) = f(x_0 - T)$

2.12.3. ALGUMAS PROPRIEDADES

I. Se f: A → B é periódica de período T, então qualquer número da forma k.T, com k inteiro positivo, também é um período de f.

DEMONSTRAÇÃO

Por hipótese, $f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in A$. Note-se que, como é trivial, a propriedade é válida para T =1. Suponha-se que ela também seja válida para um inteiro positivo k, genérico, isto é, que $f(x + kT) = f(x)$, $\forall x \in A$. Daí, como T é um período de f:

$f[(x + kT) + T] = f(x)$. Mas: $f[(x + kT) + T] = f[x + (k + 1)T]$. Logo, $f[x + (k + 1)T] = f(x)$, $\forall x \in A$, ou seja, (k + 1)T também é um período de f. Assim, por indução finita, a propriedade é verdadeira para qualquer valor de k inteiro e positivo.

OBSERVAÇÃO: Deve-se notar que, mesmo quando k é um inteiro negativo (e mesmo quando k = 0, como é óbvio), a propriedade $f(x + kT) = f(x)$, $\forall x \in A$, continua válida. Assim, por exemplo, se T é um período de f, pode-se garantir que $f(x) = f(x + T) = f(x + 2T) = f(x + 2469T) = f(x - T) = f(x - 2T) = f(x - 11T) = ...$

Em verdade, supondo que k seja um inteiro negativo, tem-se que $m = -k > 0$. Desse modo, aplicando o resultado demonstrado anteriormente no ponto x + kT, tem-se que:
$f(x + kT) = f[(x + kT) + mT]$ (pois mT é um período de f). Desta feita:
$f(x + kT) = f[x + (k + m)T] = f(x)$, $\forall x \in A$.

Finalmente, é conveniente observar que esta propriedade formaliza a idéia do carimbo exposta anteriormente: deslocando-se a partir de x_0, de T em T, tanto para a direita ($x_0 + k.T$, com $k > 0$), quanto para a esquerda ($x_0 + k.T$, com $k < 0$), obtêm-se apenas repetições do que ocorre para x_0.

Conforme já foi visto, uma função constante é sempre periódica, possuindo como período qualquer número real positivo T. Conseqüentemente, não há um período fundamental, e os períodos não guardam relação especial entre si. É possível provar (usando argumentos de Análise Matemática, que não cabem num curso deste nível) que há três grandes grupos de funções contínuas reais de variável real, mutuamente exclusivos, e que englobam todos os tipos dessas funções:

a) **As funções não periódicas.**
b) **As funções constantes**, que não têm um período fundamental.
c) **As funções que possuem um (*único*) período fundamental.**

Ou seja, como é evidente, ou uma função é periódica ou não é periódica. O mais interessante (e não óbvio) é que uma função periódica ou possui um período fundamental ou é constante.

O teorema seguinte é uma espécie de recíproca do teorema I, aplicável às funções periódicas não constantes.

II. Suponha-se que $f: A \to B$ seja uma função periódica não constante. Se T_0 é o período fundamental de f, então qualquer período de f deve ser um "múltiplo inteiro" de T_0. Mais precisamente:
$f(x + T_0) = f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in A$, e $0 < T_0 \leq T$, $\forall T \Rightarrow \exists k \in N^*: T = k.T_0$.

DEMONSTRAÇÃO

Suponha-se, por absurdo, que, embora $f(x + T_0) = f(x + T) = f(x)$, $\forall x \in A$, $0 < T_0 \leq T$, $\forall T$ e $T = k.T_0$, não fosse k inteiro. Então, embora $k \notin Z$, [k] seria inteiro. Daí, $0 < k - [k] < 1$ (ver item 1.1, exemplo 5). Pela observação anterior, devido ao fato de que $[k].T_0$ seria também um período de f, deveria ocorrer:
$f(x + k.T_0) = f[(x + k.T_0) - [k].T_0] = f[x + (k - [k]).T_0] = f(x)$, $\forall x \in A$.

Mas então o número real positivo $(k - [k]).T_0$ seria também um período de f, o que é um absurdo, pois $(k - [k]).T_0 < T_0$, ou seja, haveria um período de f *menor que o fundamental*.

Portanto, qualquer que seja o período T de uma função periódica não constante de período fundamental T_0, deve haver algum inteiro positivo k, de modo que:

$$T = k.T_0.$$

Dessa forma, por exemplo, qualquer período da função $f: R \to R$, de lei $f(x) = \text{sen } x$, deve possuir a forma $2k\pi$, com k natural não nulo. Analogamente, a função dente de serra não pode possuir um número não inteiro como período. De acordo com o teorema em II, caso se deseje confeccionar um carimbo para reproduzir todo o gráfico $f(x) = x - [x]$, é permitido construir carimbos de comprimentos 1 (*o menor de todos*), 2, 7 ou 2005 unidades. Mas é impossível carimbar totalmente esse gráfico com carimbos de comprimento 5/3, 1/2 ou π, por exemplo.

Um corolário do teorema precedente consiste no seguinte resultado: Se T_1 e T_2 são períodos de uma mesma função periódica não constante, então a razão entre eles é um número racional.

De fato, supondo que o período fundamental seja T_0, existem naturais não nulos, p e q, de tal sorte que $T_1 = p.T_0$ e $T_2 = q.T_0$. Portanto: $\frac{T_1}{T_2} = \frac{p.T_0}{q.T_0} = \frac{p}{q}$, o qual é, obviamente, um racional.

III. Sejam f e g funções periódicas, reais de variável real, de períodos fundamentais T_1 e T_2. Supondo bem definidas as operações funcionais a seguir, sendo $\frac{T_1}{T_2} = \left|\frac{p}{q}\right|$, com p e q inteiros e mdc (p, q) = 1, então as funções $f \pm g$, f.g e f/g, caso não sejam constantes, são periódicas, com período $T = |q|.T_1 = |p|.T_2$.

DEMONSTRAÇÃO

Suponha-se que $f(x + T_1) = f(x)$, e que $g(x + T_2) = g(x)$, para todos os valores de x no domínio comum a f e a g.

Desse modo, por exemplo, tem-se que: $(f.g)(x + T) = f(x + T).g(x + T) = [f(x + |q|.T_1)].[g(x + |p|.T_2)]$. Como p e q são inteiros, pelo teorema 1 conclui-se que: $(f.g)(x + T) = f(x).g(x) = (f.g)(x)$, ou seja, $T = |q|.T_1 = |p|.T_2$ é um período de f.g..

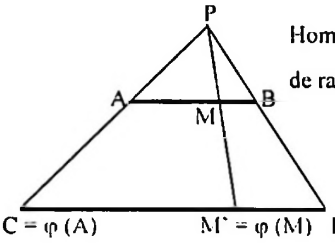
2.13. ALGUMAS TRANSFORMAÇÕES GEOMÉTRICAS BÁSICAS

2.13.1. DEFINIÇÕES INICIAIS

Assunto de grande relevância no estudo atual de geometria, as transformações geométricas podem ser estudadas sob dois pontos de vista complementares: puramente geométrico (sintético) ou algébrico (analítico). Nestas poucas linhas, procurar-se-á resumir o melhor que os dois métodos possuem, através de uma aplicação particular de tais transformações ao estudo das curvas planas, com mais ênfase nos gráficos de funções reais de variável real.

De um modo geral, qualquer transformação geométrica é uma função que transforma um ponto (do plano ou do espaço) noutro ponto, mediante uma regra bem determinada. Considerem-se X e Y dois *conjuntos de pontos*, que podem ser chamados genericamente de FIGURAS. Uma função $\varphi: X \to Y$, que leva o ponto P de X ao ponto P' de Y admite, como qualquer função, o conceito de imagem direta. Assim, por exemplo, quando se escreve $\varphi(\overline{PQ}) = \overline{P'Q'}$, deve-se entender que o segmento $\overline{PQ}$ foi transformado no segmento $\overline{P'Q'}$.

Exemplo:



Homotetia de centro P e de razão $\frac{PC}{PA} = \frac{PD}{PB} = k$.

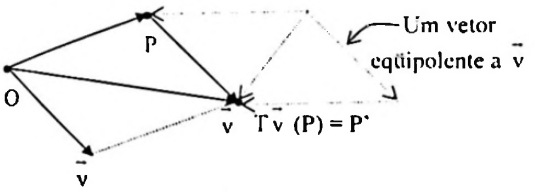
Sejam os segmentos paralelos e não congruentes $\overline{AB}$ e $\overline{CD}$, com $\overline{AC} \cap \overline{BD} = \{P\}$. φ é a transformação que leva os pontos de $\overline{AB}$ aos de $\overline{CD}$, tal que $\varphi(X) = \overline{PX} \cap \overline{CD}$. $\overline{AB}$ é transformado em $\overline{CD}$, por φ.

Um caso particularmente importante nas transformações geométricas é o das **ISOMETRIAS**, que são transformações geométricas que *preservam distâncias*. Mais precisamente, $\varphi: X \to Y$ é uma isometria quando $m(\overline{P'Q'}) = m(\overline{PQ})$, toda vez em que $\varphi(\overline{PQ}) = \overline{P'Q'}$. Conforme é possível provar a partir de suas definições, **reflexões** (ou **simetrias**), **translações** (as duas estudadas a seguir) e **rotações** (estudadas a parte, em geometria analítica ou em números complexos) são exemplos de isometrias.

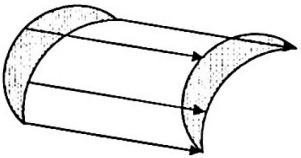
2.13.2. TRANSLAÇÕES

2.13.2.1. DEFINIÇÃO GERAL

Seja $\vec{v}$ um determinado vetor, de origem fixa, O. Chama-se *translação segundo a direção do vetor* $\vec{v}$ uma função $T_{\vec{v}}: X \to Y$, tal que $T_{\vec{v}}(P) = \overrightarrow{OP} + \vec{v}$. Aqui, há uma correspondência biunívoca entre um vetor de origem em O, $\overrightarrow{OP}$ e sua extremidade P.



Fazer o vetor $\vec{v}$ ter sua origem em O é pura simplificação, uma vez que qualquer vetor (livre) e equipolente a $\vec{v}$ também serviria para transladar P até o ponto P'. Tudo ocorre como se P fosse "arrastado" até P', segundo o segmento orientado $\vec{v}$. A mesma interpretação vale para qualquer figura F que sofra uma translação.



Uma figura transladada. Basta "arrastar" todos os pontos da figura, segundo um mesmo vetor, ou melhor, segundo um mesmo feixe de vetores equipolentes.

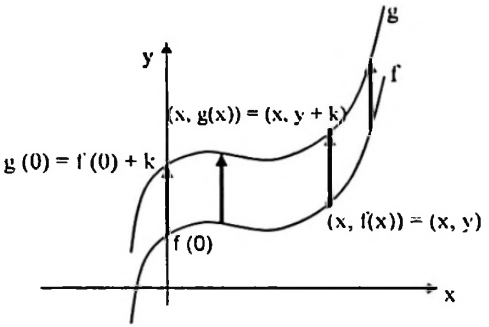
Como é imediato, uma translação é uma isometria. De fato, é só lembrar das regras de soma de vetores e que os lados opostos de qualquer paralelogramo são congruentes.

Algebricamente, é muito útil estudar dois tipos de translações particulares de uma curva: a horizontal e a vertical.

2.13.2.2. TRANSLAÇÃO VERTICAL

A partir deste ponto, $f: A \to B$ será uma função real de variável real, de lei $y = f(x)$.

Seja k uma constante real. A função $g: A \to B + k$, dada por $g(x) = f(x) + k$, em que $B + k = \{x + k: x \in B\}$, é denominada *translação vertical de f*, de k unidades (**"para cima", se $k > 0$, ou "para baixo", se $k < 0$**). Esta definição é natural e facilmente justificada pelo que ocorre com os gráficos de f e de g.

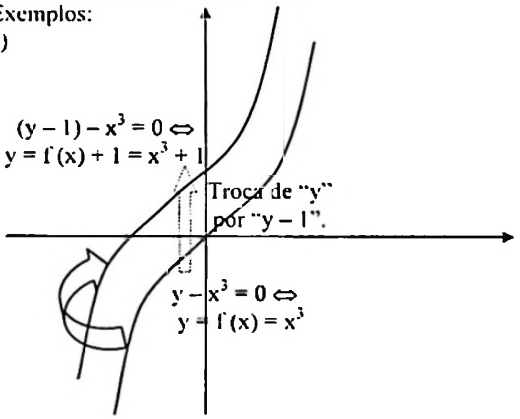


Note-se que os pontos (x, f(x)) e (x, f(x) + k) estão situados numa mesma vertical e afastados k unidades entre si, por um vetor k.j.

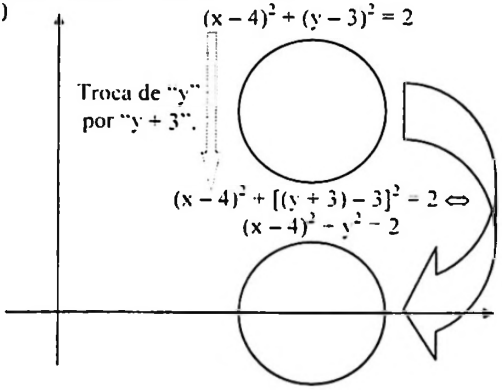
Em verdade, mesmo que não se trate de um gráfico funcional, toda vez em que no lugar da entrada "y" utilizar-se "y – k", com k constante, ocorrerá uma translação vertical. Sendo F (x, y) = 0 uma expressão envolvendo x e y e G (x, y) = 0, tal que G (x, y) = F (x, y – k), tem-se que a representação gráfica de G corresponde a uma translação vertical da curva representativa de F, de k unidades. Note-se que, no caso da função de lei y = f (x), a forma implícita fica f (x) – y = F (x, y) = 0. Daí, substituindo-se "y" por "y – k", obtém-se G (x, y) = F (x, y – k) = f (x) – (y – k) = 0 ⇒ y = f (x) + k = g (x), que corresponde à transformação funcional vista anteriormente. Isto explica por que ocorre translação de k unidades "para cima", ao trocar-se y por y – k, na *forma implícita* F (x, y) = 0, ou y por y + k, na *forma explícita* y = f (x).

Exemplos:

a)



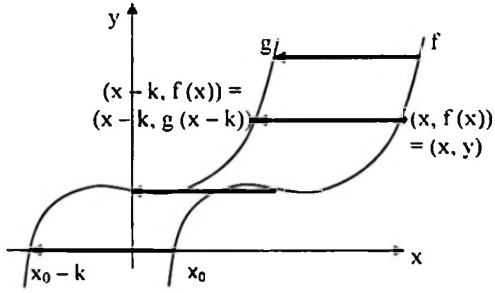
b)



2.13.2.3. TRANSLAÇÃO HORIZONTAL

A função g: A – k → B, definida por g (x) = f (x + k) é chamada uma *translação horizontal* de f, de k unidades (**"para a direita", se k < 0, ou "para a esquerda", se k > 0**).

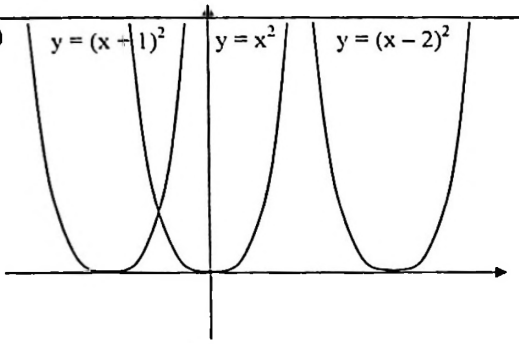
À primeira vista, quando comparado com a translação vertical, o fato de o gráfico ir "para a direita" quando se troca x por x + k com k *negativo* pode parecer estranho. Porém, basta levar em consideração que, de modo bastante geral, x é dado ***implicitamente*** nas leis funcionais. A partir daí, basta levar em consideração o último parágrafo do item anterior. Ou, ainda, verificar o que ocorre por meio da representação genérica abaixo.



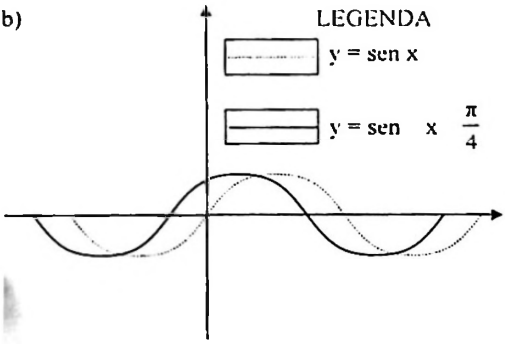
Perceba-se que os pontos (x, f (x)) e (x – k, g (x – k)) = (x – k, f (x)) estão numa mesma horizontal e afastados k unidades entre si, por um vetor k.i. Observe-se também que se x_0 é raiz de f (f (x_0) = 0) então $x_0 - k$ é uma raiz de g, pois g ($x_0 - k$) = f (($x_0 - k$) + k) = f (x_0) = 0.

Exemplos:

a)



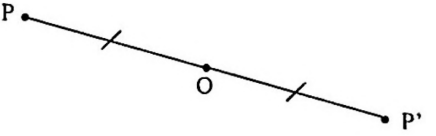
b)



2.13.3. REFLEXÕES (ou SIMETRIAS)

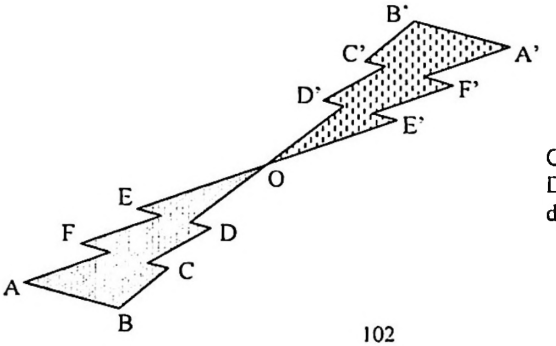
2.13.3.1. REFLEXÃO EM TORNO DE UM PONTO

Seja O um ponto fixado. Dado um ponto P qualquer denomina-se *simétrico de P em relação a O* o (único) ponto P', tal que O é **ponto médio** de $\overline{PP'}$.



Naturalmente, é possível simetrizar uma figura qualquer em relação a um ponto, bastando simetrizar cada um de seus pontos.

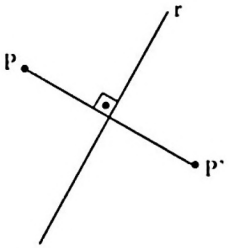
Como é imediato ver, por congruência de triângulos, a reflexão em torno de um ponto é uma isometria.



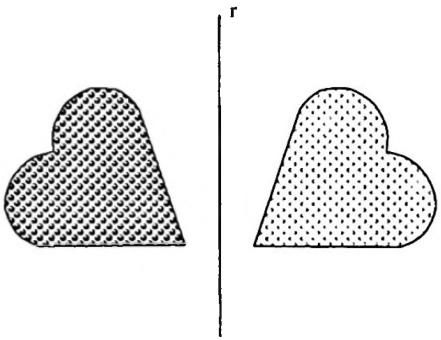
Como os triângulos DOE e D'OE' são congruentes (LAL), deve-se ter DE = D'E'.

2.13.3.2. REFLEXÃO EM TORNO DE UMA RETA

Dados uma reta fixa r e um ponto qualquer P, denomina-se *simétrico de P em relação à reta r* o (único) ponto P' tal que r seja **mediatriz** de $\overline{PP'}$.



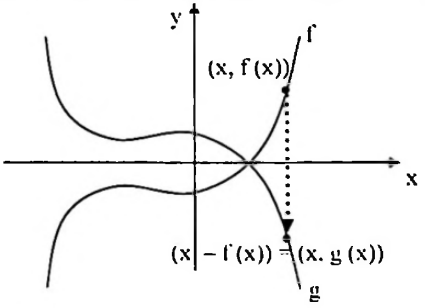
Novamente, o simétrico de uma figura F em relação a uma reta é a figura F' formada pelos simétricos dos pontos de F, em relação à reta. Também é óbvio que a simetria em relação a uma reta é uma isometria.



2.13.3.3. REFLEXÕES GRÁFICAS

2.13.3.3.1. REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO $\overline{Ox}$

Dada a função de lei $y = f(x)$, a função $g: A \to -B$, definida por $g(x) = -f(x)$ é chamada *reflexão de f em relação do eixo das abscissas*. Note-se que $-B = \{-x: x \in B\}$.

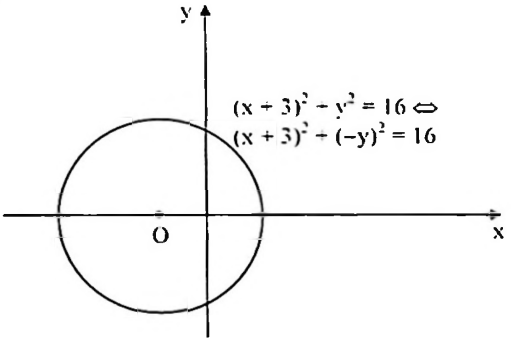


Os pontos $(x, f(x))$ e $(x, -f(x)) = (x, g(x))$ estão numa mesma vertical e são simétricos em relação ao eixo $\overline{Ox}$.

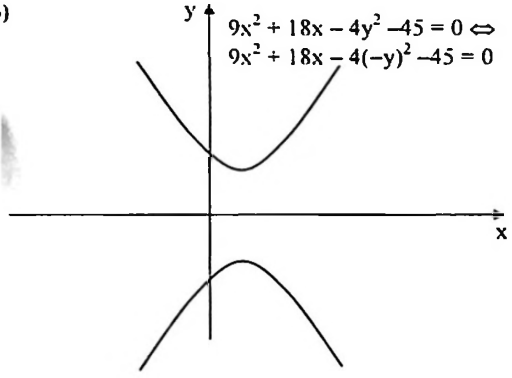
Note-se que uma figura é simétrica em relação ao eixo das abscissas se, e somente se, a substituição de y por – y não altera a sua lei de formação.

Exemplos:

a)

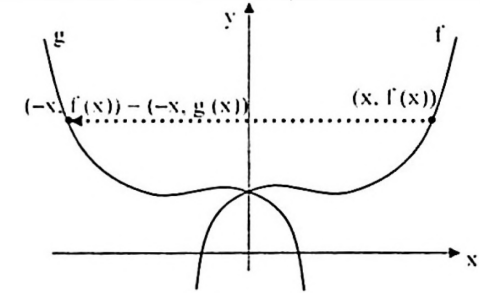


b)



2.13.3.3.2. REFLEXÃO EM TORNO DO EIXO $\overline{Oy}$

Considerando-se a função de lei $y = f(x)$, a função $g: -A \rightarrow B$, definida por $g(x) = f(-x)$ é chamada *reflexão de f em relação do eixo das ordenadas*.

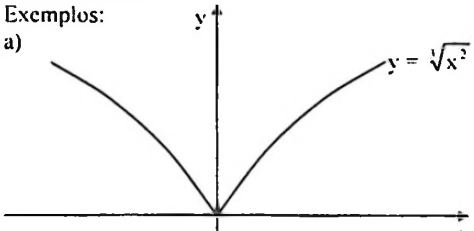


Os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, g(-x)) = (-x, f(x))$ est
numa mesma horizontal e são simétricos em relaç
ao eixo $\overline{Oy}$.

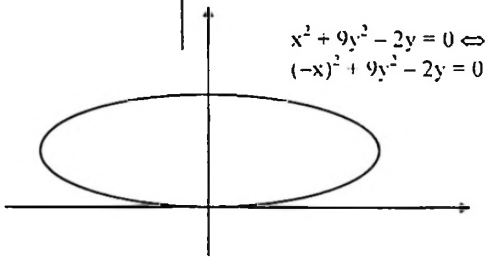
É imediato que uma figura é simétrica em relação ao eixo das ordenadas se, e somente se, a substituição de x por – x não modifica a lei da figura. No caso de tratar-se de uma curva funcional, a função será *par*.

Exemplos:

a)

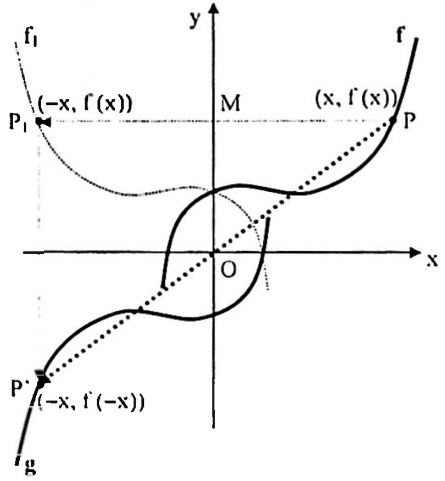


b)



2.13.3.3.3. REFLEXÃO EM TORNO DA ORIGEM

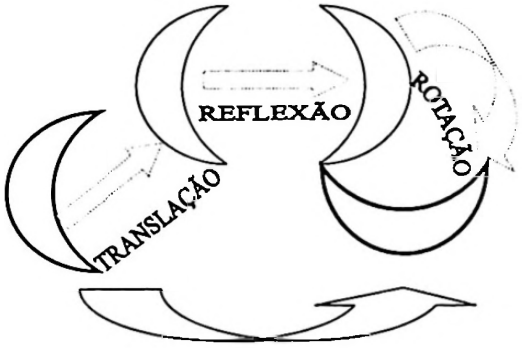
Substituindo-se x por – x e, em seguida, y por – y, o gráfico da função $y = f(x)$ sofre *duas transformações geométricas consecutivas*: inicialmente, é simetrizado em relação ao eixo das ordenadas ($x \to -x$) e depois é simetrizado em relação ao eixo das abscissas ($y \to -y$). Tal seqüência de reflexões pode ser interpretada como uma única simetria, em torno da origem do sistema cartesiano, conforme é fácil provar. Cria-se, assim, a função $g: -A \to -B$, dada por $g(x) = -f(-x)$, conhecida como *reflexão de f em torno da origem*.



Os pontos $(x, f(x))$ e $(-x, -f(-x)) = (-x, g(x))$ são simétricos em relação à origem, bastando notar que $\overline{OM}$ é base média do triângulo PP_1P'.

Novamente é fácil perceber que uma figura é simétrica em relação à origem se, e somente se, as respectivas trocas de x por – x e de y por – y não mudam a lei de formação da figura. Quando se tratar de um gráfico de função, a função será *ímpar*.

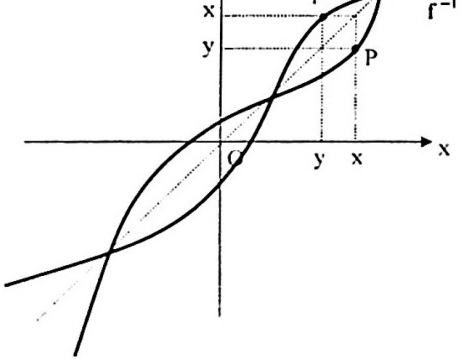
Neste ponto cabe destacar que, sendo funções, transformações geométricas podem admitir **composições**. Analogamente ao que ocorre com funções, uma composição de transformações corresponde à idéia (como a precedente, com as reflexões) de duas transformações geométricas *sucessivas*. Um resultado muito curioso (e fundamental), mas que não será demonstrado aqui, é que *qualquer isometria pode ser vista como a composição de um número finito de translações, reflexões ou rotações*, caracterizando perfeitamente o conceito de **congruência de figuras**.



2.13.3.3.4. REFLEXÃO EM TORNO DA DIAGONAL – INVERSÃO GRÁFICA DE FUNÇÕES

Quando se deseja representar os gráficos de uma função bijetiva f e de sua inversa, f^{-1}, **num mesmo sistema cartesiano**, convém trocar não somente as variáveis x e y "de papel", como também trocar de fato uma pela outra. Assim, sendo f: A → B uma função real de variável real bijetiva, com lei, $y = f(x)$, é mais conveniente visualizar a lei de sua inversa, $x = f^{-1}(y)$, sob a forma $y = f^{-1}(x)$.

Nestas condições, o que ocorre na passagem de uma curva para outra é, simplesmente, a transformação geométrica do ponto P(x, y) no ponto P'(y, x). Como é fácil perceber, os pontos P e P' são *simétricos em relação à reta y = x*, conhecida como diagonal (trata-se da bissetriz dos quadrantes ímpares ou, sob outro ponto de vista, do gráfico da função identidade).



Note-se que os pontos P e P' são (*sempre*) os vértices opostos de um quadrado, de lado medindo $|x - y|$. Portanto, P(x, y) e P'(y, x) devem ser simétricos em relação à diagonal do quadrado, que está contida na reta y = x.

2.13.3.3.5. MODULAÇÃO GRÁFICA

Sabe-se que, sendo x um número *real* qualquer, por definição:

$$|x| = \begin{cases} x, \text{ se } x \geq 0 \\ -x, \text{ se } x \leq 0 \end{cases}$$

Portanto, aplicando-se tal conceito, pode-se *modular uma função real de variável real* qualquer. Sendo f: A → B tal função, tem-se g = |f| : A → B, definida por:

$$g(x) = |f(x)| = \begin{cases} f(x), \text{ se } f(x) \geq 0 \\ -f(x), \text{ se } f(x) \leq 0 \end{cases}$$

Desta forma, modular uma função, graficamente, consiste em:

- **manter** a parte do gráfico localizada "acima" (ou antes, "não abaixo") do eixo x, isto é, cujos pontos têm ordenada não negativa (podem-se incluir as raízes);
- **refletir em relação ao eixo x** a parte do gráfico "sob" o eixo das abscissas, ou seja, cujos pontos possuem ordenada negativa.

2.14. FUNÇÃO AFIM

2.14.1. DEFINIÇÕES INICIAIS

Uma função f: R → R é dita **afim** quando existem constantes reais a e b, com a ≠ 0, tais que:

$$f(x) = ax + b, \forall x \in R.$$

No caso particular em que b = 0, tem-se f(x) = ax, e a função é denominada **linear**.

Exemplos:

1. Supondo que um táxi viaje a uma velocidade constante, não nula, sendo **P** o preço a pagar por x quilômetros rodados, a uma quantia fixa de a reais por km, pode-se afirmar que:

$$P(x) = ax + b,$$

em que **b** é um valor constante, em reais, chamado **bandeirada**. Assim o preço de uma corrida de táxi nas condições acima varia de modo afim com o número de quilômetros rodados, embora a função que associe cada x a um único P não seja, rigorosamente falando, afim (em verdade, trata-se de uma **restrição** de uma função afim, $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, já que $x \geq 0$). Dessa forma, por exemplo, quando se tem:

$$P(x) = 2{,}9 + 1{,}2x,$$

isto indica o fato de que (em "bandeira 1") é paga uma quantia constante de R$ 2,90, *apenas entrando no táxi* (isto é, com x = 0), mais uma quantia de R$ 1,20 por km, x, rodado.

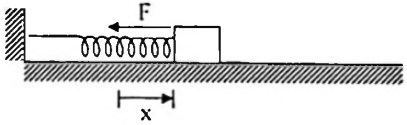
OBSERVAÇÃO: Na prática, porém, o que ocorre é que P é uma **função de duas variáveis**, dependendo não somente de x, como também da "hora parada", t, de tal sorte que P(x, t) = 2,9 + 1,2x + 10t, em que t representa o tempo parado em horas.

2. Quando um objeto se move em linha reta a uma velocidade constante **v**, partindo de uma posição s_0, medida num referencial fixo, pode-se determinar a sua posição s após qualquer intervalo de tempo **t**, contado a partir do início do movimento (ou seja, a partir de s_0), utilizando a *equação horária*, decorrente da definição de velocidade média (no caso constante):

$$s(t) = s_0 + vt,$$

que representa uma variação afim de s com t.

3. A lei de Hooke afirma que a força elástica **F** produzida pela elongação de uma mola ideal de x unidades a partir da posição de equilíbrio é dada por F = − k.x, em que k é a *constante elástica* da mola. Portanto, F é uma função afim de x. Mais especificamente, trata-se de uma **função linear** de x, uma vez que o termo independente da função afim é nulo.



4. A função **identidade** $I: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $I(x) = x$, é outro exemplo importante de função linear.

OBSERVAÇÃO: Alguns autores consideram ainda o caso em que $a = 0$ como uma função afim. Nesse contexto, qualquer **função constante**, de lei $f(x) = b$, seria também uma função afim. Isso, porém, não será feito aqui, uma vez que, por exemplo, é também comum denominar uma função afim como **função polinomial do primeiro grau**.

2.14.2. GRÁFICO

Conforme já foi provado anteriormente, já é sabido que QUALQUER FUNÇÃO AFIM É:

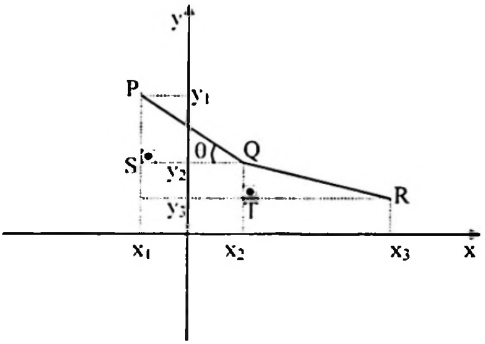
I. **BIJETIVA**. Com efeito, basta lembrar que, para todo $y \in \mathbb{R}$, há um único $x = \frac{y-b}{a}$, também real, para o qual $y = f(x) = ax + b$, desde que $a \neq 0$.

II. **CRESCENTE**, se $a > 0$; **DECRESCENTE**, se $a < 0$.

III. **NÃO PERIÓDICA**.

É conveniente provar que o gráfico de uma função afim é, sempre, **uma reta não horizontal** (nem vertical, pois não seria o gráfico de função, como é óbvio). Para tanto, pode-se utilizar o teorema de Tales, ou, mais precisamente, um caso simples de semelhança de triângulos.

Suponha-se que os pontos $P(x_1, ax_1 + b)$, $Q(x_2, ax_2 + b)$ e $R(x_3, ax_3 + b)$ pertençam a $G(f)$ e que, sem perda de generalidade, se tenha $x_1 < x_2 < x_3$. Uma vez que $\left|\frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1}\right| = \left|\frac{(ax_3+b)-(ax_2+b)}{x_3-x_2}\right| = |a|$, tem-se $\frac{PS}{SQ} = \frac{QT}{TR}$. Portanto, os triângulos retângulos PSQ e QTR são semelhantes, do que se conclui que os ângulos $\angle PQS$ e $\angle QRT$ são congruentes. Logo, os pontos genéricos P, Q e R de $G(f)$ estão alinhados, e o gráfico de qualquer função afim é uma reta oblíqua.



Reciprocamente, é possível também provar que qualquer reta não horizontal dada representa o gráfico de alguma (*exatamente uma*) função afim, o que será feito em Geometria Analítica.

O ponto $(0, b)$ do gráfico de qualquer função afim representa a interseção deste com o eixo das ordenadas. O valor $b = f(0)$ costuma ser chamado **coeficiente linear da reta** $y = ax + b$ ou, equivalentemente, **valor inicial da função** f. Por sua vez, o valor $\frac{\Delta f(x)}{\Delta x} = \frac{\Delta y}{\Delta x} = \frac{(ax_2+b)-(ax_1+b)}{x_2-x_1} = a$ representa o que se costuma chamar **taxa de variação da função** f, que, como se vê, é constante para funções afins. É uma espécie de *velocidade média* de crescimento ou decrescimento de uma função, a

qual é constante neste caso. Também é praxe utilizar a denominação **coeficiente angular da reta** $y = ax + b$, para o valor a. Tal valor é uma medida da *inclinação* (ou, ainda, da *declividade*) do gráfico da função afim em relação ao semieixo positivo das abscissas. É possível provar o seguinte resultado importante, mas básico sobre esse fato: **o coeficiente angular de uma reta representa a tangente do ângulo descrito acima se, e somente se, os eixos têm a mesma escala**, ou seja, as unidades utilizadas nos eixos cartesianos são iguais.

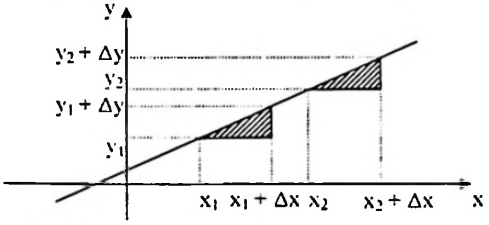
Em verdade, basta analisar separadamente os casos $a > 0$ e $a < 0$. A título de exemplo, analise-se a situação em que a função é decrescente, como no gráfico precedente. Ali, o ângulo $\angle PQS$, de medida θ representa o suplemento da declividade da reta $y = ax + b$. Isto é, a declividade é dada por $\alpha = \pi - \theta$. Portanto, $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}(\pi - \theta) = -\operatorname{tg}\theta$. Para calcular $\operatorname{tg}\theta$ pode-se utilizar o triângulo retângulo PQS. Para garantir, porém, que $\operatorname{tg}\theta = PS/QS$, deve-se ter os **eixos na mesma escala**, pois $\operatorname{tg}\theta$ é adimensional. Nessas condições, supondo $x_1 < x_2$ (sem perda de generalidade) e $a < 0$, conclui-se que:

$$a = \frac{y_1 - y_2}{x_1 - x_2} = \frac{PS}{QS} = \frac{PS}{QS} = \operatorname{tg}\theta = -\operatorname{tg}\alpha .$$

O caso em que $a > 0$ é inteiramente análogo, e fica como exercício.

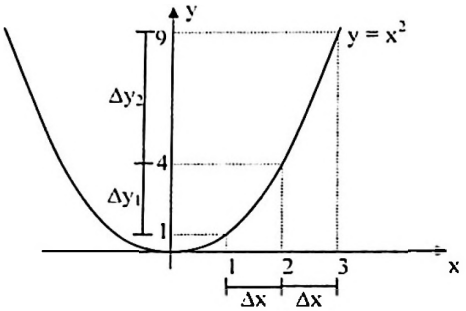
Vê-se, dessa forma, que quanto maior o valor de a, maior a inclinação da reta $y = ax + b$ relativamente ao semieixo x positivo, caso $a > 0$. Se $a < 0$, a afirmação acima deve levar em consideração o valor absoluto de a.

Outro fato muito importante de ser notado é que a variações (*acréscimos* ou *decréscimos*) iguais no domínio de uma função correspondem variações iguais no contradomínio (de mesma natureza – *acréscimos* ou *decréscimos* – que as variações sofridas no domínio, se a função é crescente, ou de natureza oposta, se a função é decrescente). Noutros termos, quando se passa de x para $x + \Delta x$ no domínio, ocorre uma passagem de $y = f(x)$ para $y + \Delta y = f(x + \Delta x)$, **em que Δy depende exclusivamente de Δx**. Ou, ainda, que as variações $x_1 \mapsto x_1 + \Delta x$ e $x_2 \mapsto x_2 + \Delta x$ implicam as respectivas transformações $y_1 \mapsto y_1 + \Delta y$ e $y_2 \mapsto y_2 + \Delta y$, independentemente de quem sejam os particulares valores x_1 e x_2. Isso é trivial, uma vez que $\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = [a(x + \Delta x) + b] - (ax + b) = a.\Delta x$, para uma função afim fixada, só depende de Δx.



Geometricamente, o fato de que a variações iguais em x correspondem variações iguais em y (mas não necessariamente iguais às sofridas em x) significa que os triângulos hachurados na figura são **congruentes** (devido ao caso conhecido como "ALA": ambos são retângulos, têm um cateto medindo $|\Delta x|$ e possuem o outro ângulo adjacente a tal cateto de mesma medida).

Dessa forma, como foi fácil provar, qualquer função afim possui a propriedade especial de que mudanças sofridas pelas imagens dependam unicamente das mudanças correspondentes no domínio, **mas não do ponto em que tais variações começaram a ser medidas**. Um exemplo muito simples mostra que, para funções bem "comportadas" (contínuas, monótonas, limitadas, etc.), isso parece ocorrer **apenas com funções afins**. Considerando a função quadrática $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, dada por $f(x) = x^2$, é imediato notar que a variação em y depende do ponto inicial, x, já que:
$\Delta y = f(x + \Delta x) - f(x) = (x + \Delta x)^2 - x = 2.x.\Delta x + \Delta x^2$.



Um acréscimo constante de $\Delta x = 1$ unidade no eixo x ocasiona um acréscimo de $\Delta y_1 = 3$ unidades, caso se parta de $x = 1$, ou um acréscimo de $\Delta y_2 = 5$ unidades, se o ponto inicial for $x = 2$.

Provar-se-á, em seguida, que esta é, para funções estritamente monótonas (crescentes ou decrescentes), uma propriedade exclusiva e característica das funções afins. Mais precisamente: se uma função monótona injetiva f tem a propriedade de que a função $\sigma(h) = f(x + h) - f(x)$ depende de h, mas não de x, então f **deve ser uma função afim**.

Antes, porém, caracterizar-se-ão as funções lineares, utilizando o importantíssimo conceito elementar de ***proporcionalidade***.

2.14.3. CARACTERIZAÇÃO DAS FUNÇÕES LINEARES – PROPORCIONALIDADE

Genericamente falando, *grandeza* (*escalar*) significa qualquer característica (física, química, biológica, geográfica, histórica, etc.) que pode ser medida por números reais, tais como a massa, o volume, a carga elétrica ou o número de partículas constituintes de uma porção bem definida do espaço (um corpo). São também grandezas a liberação ou a absorção de uma certa substância por um determinado ser vivo, bem como a densidade demográfica de um país atualmente ou a área ocupada por uma civilização específica num determinado momento histórico (admitindo-se estimativas).

Diz-se que duas grandezas são (***diretamente***) ***proporcionais*** quando existir uma correspondência (funcional) $f: \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, dada por $f(x) = y$, entre as medidas delas, x e y, de tal sorte que as duas condições a seguir sejam satisfeitas:

a) Aumentando-se o valor x de uma delas, aumenta-se o valor correspondente da outra. Noutros termos, a correspondência entre elas é estritamente crescente, isto é: $x_1 < x_2 \Rightarrow y_1 < y_2$, em que $y_1 = f(x_1)$ e $y_2 = f(x_2)$.

b) Dobrando-se, triplicando-se, ou mais genericamente, multiplicando-se o valor de uma delas por um número natural n, o valor correspondente da outra também fica dobrado, triplicado ou multiplicado pela mesma quantia n, respectivamente. Formalmente: $f(nx) = ny = nf(x)$, $\forall x \in \mathbb{R}_+$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Ou, ainda, caso $x \mapsto y$, deve-se impor $nx \mapsto ny$, para todo natural n.

Nestas condições, a função f é denominada uma **proporcionalidade** (direta) entre as grandezas medidas por x e por y. Observe-se que, nesta definição, as grandezas utilizadas podem assumir, apenas, valores não negativos. É possível abranger valores negativos adaptando a definição, mas isso não será feito aqui.

Exemplos:

1. Supondo que se tem uma certa porção de determinado líquido homogêneo, nota-se que sua massa, m, aumenta com o seu volume, V: quanto maior o volume de líquido, maior sua massa. E mais: dobrando-se o volume de líquido, dobra-se sua massa; triplicando-se seu volume, triplica-se sua massa. De um

modo geral, um líquido ocupando completamente um recipiente de volume n.V, em que n é natural, pode ser visto como a união (soma) de n recipientes de volume V contendo tal líquido. Portanto, a massa de um corpo com volume nV é igual à soma das massas de n corpos de volume V, isto é, **a massa de um corpo (nas condições iniciais) é diretamente proporcional ao seu volume**, pois:

a) $V_1 > V_2 \Rightarrow m_1 > m_2$

b) $V \mapsto m \Rightarrow n.V \mapsto n.m$, $\forall\, n \in N$ e $\forall\, V, m \in R$..

2. Experimentalmente, é fácil concluir que a quantidade Q de calor (medida em calorias, por exemplo) necessária para derreter um bloco de gelo (já na temperatura de fusão) aumenta com a massa m do bloco, isto é, quanto maior o bloco (sua massa), mais calor é preciso lhe fornecer para que sofra derretimento total. Ou seja, $m_1 > m_2$ implica $Q_1 > Q_2$. **Além disso**, é possível verificar que, dobrando-se a massa do bloco, dobra-se a quantidade de calor necessária para derretê-lo: triplicando-se a massa do bloco, triplica-se a quantidade de calor necessária para a fusão; mais geralmente, caso a quantidade de calor necessária para derreter x gramas seja sempre a mesma, Q, tem-se que a quantidade de calor necessária para fundir nm gramas, com n natural, pode ser vista como a soma das quantidades de calor necessárias para derreter n blocos de m gramas, separadamente, ou seja, nQ. Portanto, tem-se Q **diretamente proporcional** a m. Ou seja, é permitido, em tais condições, garantir que Q (nm) = nQ (m).

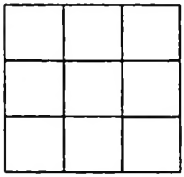
3. Suponha-se que se apliquem C reais numa caderneta de poupança, a uma taxa de juros constante. Pode-se afirmar que o total recebido após um **tempo determinado** de aplicação, M (comumente denominado *montante*) é uma função crescente de C, pois, como é óbvio, quanto mais se investe inicialmente, mais se recebe ao final da operação: $C_1 > C_2 \Rightarrow M_1 > M_2$. Além disso, quando uma pessoa põe um capital inicial de n.C reais na poupança (n natural qualquer) os rendimentos equivalem ao total ganho por n pessoas colocando individualmente C reais cada, a mesma taxa de juros, pelo mesmo período de tempo. Isto é: M(n.C) = n.M(C). Pode-se garantir assim que o montante é diretamente proporcional ao capital inicial investido.

OBSERVAÇÃO IMPORTANTE: É fundamental perceber que o montante **NÃO** é diretamente proporcional ao tempo de aplicação (nem mesmo no regime de capitalização simples). Aplicando C reais e recebendo M reais após um mês, por exemplo, não é verdade que aplicando C reais durante t meses se receba a quantia de t.M reais. Com efeito, ao fim de cada mês, os juros daquele período se agregam à quantia existente, fazendo com que os juros do próximo período incidam sobre uma quantia variável, tal qual cada mês tendo investimentos iniciais diferentes.

4. No primeiro exemplo dado nesta apostila, o preço P a pagar por uma corrida de táxi de x km é claramente uma função crescente de x, porque quanto maior o percurso, mais se paga. Entretanto, uma corrida de 2x quilômetros, **não** equivale a duas corridas sucessivas de x km cada (feitas por uma mesma pessoa, por exemplo), uma vez que na segunda situação paga-se a bandeirada duas vezes. Portanto, já que $P(2x) \neq 2.P(x)$. Logo, o preço P de uma corrida de táxi **não** é diretamente proporcional ao número x de quilômetros rodados.

5. O *módulo* da força elástica no exemplo do sistema massa-mola acima constitui uma proporcionalidade, sob as condições ideais de elasticidade. Em verdade, o módulo da força de restituição é função crescente da elongação (quanto maior o deslocamento em relação à posição de equilíbrio, maior a força elástica necessária para tentar restituir o corpo à posição original). Além disso, dobrando ou triplicando a elongação, por exemplo, verifica-se experimentalmente que a força elástica (medida por meio da aceleração) dobra ou triplica, respectivamente, seu módulo. Caso um deslocamento x a partir da posição de equilíbrio produza uma força elástica de módulo F, é possível concluir (experimentalmente) que um deslocamento n.x, com n natural, produz uma força de módulo n.F. Ou seja: F(n.x) = n.F(x).

6. Seja S a área de um quadrado de lado l, em concordância de unidades. Naturalmente, S é uma função crescente de l (quanto maior o lado do quadrado, maior será área correspondente). Apenas isso, porém, ***não basta para afirmar que S é proporcional a l***. De fato, por exemplo, triplicando-se a medida do lado de um quadrado, é imediato perceber que nele passam a caber exatamente nove quadrados congruentes ao original. Ou seja: $S(3l) = 9.S(l) \neq 3.S(l)$. Portanto, S **não** é diretamente proporcional a l.



7. Mantendo-se a altura h de um retângulo constante (deixando, por exemplo, dois lados opostos sempre sobre um mesmo par de retas paralelas), a área do retângulo é diretamente proporcional à sua base. Isto é extremamente evidente caso se olhe para a fórmula da área de um retângulo. A questão, porém, é que a proporcionalidade é quem implica tal fórmula nesta abordagem (ou seja, a fórmula da área é um resultado posterior). Como verificar então que a área de um retângulo é proporcional à base, mantida constante a altura? É fácil! Suponha-se que um retângulo de base b e de altura h possua área S. A princípio, é óbvio que quanto maior a base do retângulo, maior será sua área (de fato, um retângulo de base b_1 fica inteiramente contido num de base $b_2 > b_1$, caso possuam mesma altura). Além disso, um retângulo de base n.b e de altura h pode ser decomposto em n retângulos congruentes e justapostos, cada um de base b e com altura h (*desde que n seja natural*). Ou seja, S(n.b) = n.S(b), para todos n, natural, e b, real positivo.

OBSERVAÇÃO: Na definição dada de proporcionalidade direta, é possível permitir que a relação funcional entre as grandezas seja estritamente decrescente, desde que se permitam valores negativos para alguma das duas grandezas.

Note-se que, numa proporcionalidade, a condição b) da definição pede que f(n.x) = n.f(x) para qualquer valor real de x, mas apenas para valores naturais de n. No entanto, tal condição vale (numa proporcionalidade) **para qualquer valor real de n**. Este é o principal fato exibido no teorema seguinte.

2.14.3.1. TEOREMA FUNDAMENTAL DA PROPORCIONALIDADE

Seja $f: R \to R$ uma função estritamente crescente (monótona injetiva, no caso geral). Se f(n.x) = n.f(x), $\forall x \in R$ e $\forall n \in N$ (isto é, se f é uma proporcionalidade), então f(k.x) = k.f(x), $\forall x \in R$ e $\forall k \in R$.

Do ponto de vista prático (e do teórico também!), este teorema é de singular importância. Por exemplo, no caso do retângulo a argumentação fornecida não serve para ver que a área de um retângulo de base $b\sqrt{2}$ e de altura h tem área $S\sqrt{2}$ (como construir $\sqrt{2}$ retângulos justapostos?). Em verdade, casos com n racional não inteiro já costumam dar certo trabalho de verificação genérica, embora ainda sejam facílimos, quando comparados com as situações de n irracional. Além disso, o fato de uma proporcionalidade satisfazer tal propriedade tem conseqüências importantes, a serem vistas em seguida.

DEMONSTRAÇÃO

Inicialmente, será provado que:

$$\begin{cases} x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2) \\ f(n.x) = n.f(x),\ \forall x \in R_+ \text{ e } \forall n \in N \end{cases}$$
$$\Rightarrow f(r.x) = r.f(x),\ \forall x \in R_+ \text{ e } \forall r \in Q_+$$

Seja $r = \frac{m}{n}$, com m e n naturais. Então:

n.r.x = m.x $\Rightarrow$ f(n.r.x) = f(m.x) $\Rightarrow$ n.f(r.x) = m.f(x).

Logo:

$f(r.x) = \frac{m}{n}.f(x) \Rightarrow f(r.x) = r.f(x)$, quaisquer que sejam r, racional, e x, real, não negativos. É curioso notar que, para k racional, utilizou-se apenas o fato de f ser uma proporcionalidade, mas não o de f ser monótona injetiva. Essa outra parte da hipótese vai servir para o caso em que k é irracional.

Suponha-se que houvesse um k real positivo para o qual $f(k.x) \neq k.f(x)$, para algum x real positivo. Necessariamente, este k deveria ser irracional, uma vez que o teorema já foi demonstrado para todo k racional. Haveria então duas possibilidades: $f(k.x) > k.f(x)$ ou $f(k.x) < k.f(x)$. Se ocorresse $f(k.x) < k.f(x)$, então $(0 <) \frac{f(k.x)}{f(x)} < k$. Como Q é denso em R, isto é, entre dois reais distintos quaisquer há sempre um racional, pode-se escolher um número racional não negativo, r, tal que: $\frac{f(k.x)}{f(x)} < r < k$. Daí, $f(k.x) < r.f(x) = f(r.x)$ (*). Mas como f é crescente e x é positivo:

$r < k \Rightarrow r.x < k.x \Rightarrow f(r.x) < f(k.x)$, que contradiz (*). Logo, não pode ser $f(k.x) < k.f(x)$. Caso $f(k.x) > k.f(x)$, seria possível escolher, de maneira análoga, um racional r tal que $\frac{f(k.x)}{f(x)} > r > k$, o que levaria a uma contradição de modo também similar. Portanto, necessariamente deve ocorrer $f(k.x) = k.f(x)$, para todos k e x reais não negativos, caso f seja uma proporcionalidade.

Apenas para complementar, observe-se que, em qualquer proporcionalidade f, vale $f(0) = f(0.x) = 0.f(x) = 0$, para todo x real.

É imediato ver que qualquer função linear $f: R \rightarrow R$, dada por $f(x) = y = ax$, induz uma proporcionalidade, bastando restringir tal função a R. Com efeito, supondo $a > 0$, tem-se:

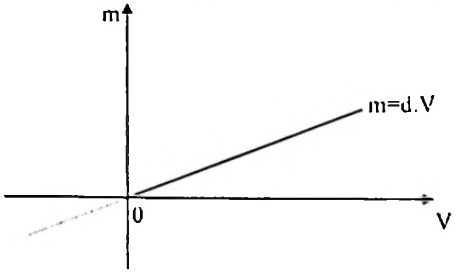
a) f é crescente, isto é: $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$;

b) $f(kx) = a(kx) = k(ax) = kf(x), \forall x, k \in R$,.

Reciprocamente, trocando k por x e x por k em $f(k.x) = k.f(x)$, bem como tomando $k = 1$, tem-se que: $f(x) = f(1).x$, qualquer que seja x real não negativo numa proporcionalidade f dada. Sendo f conhecida, conhece-se automaticamente também o valor $f(1)$. Fazendo $f(1) = a$, tem-se que ***uma função monótona injetiva $f: R_+ \rightarrow R_+$ é uma proporcionalidade se, e somente se, f é uma restrição a R_- de uma função linear $f: R \rightarrow R$, definida por $f(x) = ax$***. O valor a é denominado **constante ou fator de proporcionalidade**, entre x e y. É muito importante, portanto, observar que a constante de proporcionalidade representa o valor de uma das grandezas quando a outra é unitária.

Dessa forma, o gráfico que relaciona duas grandezas diretamente proporcionais deve ser sempre uma reta que passa pela origem (mais precisamente, uma semi-reta de tal reta, caso as grandezas admitam apenas valores não negativos).

Assim, por exemplo, o gráfico que representa a massa m dum líquido homogêneo em função do volume V ocupado por esse líquido deve ter a aparência que segue.



Perceba-se que a lei da função representada acima é $m = m(V) = dV$. Ou seja, a constante de proporcionalidade é d.

Em certos casos, o fator de proporcionalidade tem grande relevância na interpretação relacional entre as grandezas, apesar de, eventualmente, a sua determinação não ser tão simples. Na situação acima (correspondente ao exemplo 1 do item anterior), o fator de proporcionalidade representa um conceito físico-químico fundamental, sendo chamado de **massa específica** (ou **densidade**, de modo menos preciso) do líquido. A constância da densidade é que define a homogeneidade do líquido. Portanto, *a massa específica de um líquido representa a massa ocupada por uma unidade de volume do líquido.*

Já no exemplo 2, escreve-se Q = m.L, em que o fator de proporcionalidade, L, é comumente denominado *calor latente de fusão* (do gelo), representando a quantidade de calor necessária para fundir completamente 1 g (ou uma unidade de massa) de gelo.

No exemplo 3, tem-se M = k.C é o montante recebido por uma aplicação a partir de um capital inicial C, durante um certo tempo, fixado. A constante de proporcionalidade representa o montante oriundo de um capital unitário. Mas não é só isso. Supondo que a poupança foi feita por 1 mês, por exemplo, a uma taxa de i% ao mês, já que neste período acumularam-se juros de i reais, tem-se M = 1 + i = k (C = 1). Demonstra-se que, para um período de t meses qualquer, deve-se ter $k = (1+i)^t$. Ou seja, o fator de proporcionalidade (constante, caso t seja fixo) tem uma interpretação não tão simples de ser obtida, embora bastante útil.

No exemplo 5, a lei de Hooke fica F = kx. A constante de proporcionalidade, k, é denominada **constante elástica** (da mola), significando o módulo da força necessária para elongar a mola de uma unidade de comprimento.

Finalmente, no exemplo 7 pode-se escrever que S = k.b, para indicar que, dentre todos os retângulos de altura h, a área é diretamente proporcional à base b. Como proceder para obter o valor da constante de proporcionalidade k (sem utilizar a fórmula, é claro!)? Inicialmente, perceba-se que k deve representar a área de um retângulo de altura h e de base 1. Em seguida, note-se que a área de retângulos com a mesma base deve ser proporcional à altura, de modo inteiramente análogo ao que ocorre no exemplo 7. Agora, basta considerar k = k'.h, em que se tem a área de um retângulo com altura h e base 1. Então, k' deve ser a área de um retângulo com base e altura iguais a 1. Ora, por definição, a área de um tal retângulo (que é um quadrado de lado unitário) é 1. Assim, k' = 1, k = h, e, conseqüentemente, S = **b.h**, ou seja, a área de um retângulo é igual ao produto de suas dimensões. Note-se, assim, que a constante de proporcionalidade relacionando a área S dos retângulos de mesma altura com a base de cada um deles é aquela **altura**, h, constante.

Vale a pena, neste ponto, tecer comentários breves sobre o que se conhece por **regra de três**. A idéia é bem simples (e conhecida, embora muitas vezes utilizada cega ou erroneamente). Suponha-se que duas grandezas x e y = f(x) sejam **proporcionais** e que se conheçam um par de valores (não nulos) correspondentes, x_1 e $y_1 = f(x_1)$. É possível, conhecendo um terceiro valor (x_2, por exemplo), determinar o quarto valor, correspondente ao anterior. Com efeito, **uma vez que f defina uma proporcionalidade entre x e y**, deve-se ter:

$f(x_1) = y_1 = a.x_1 \Leftrightarrow \frac{y_1}{x_1} = a$. Caso $x_2 = 0$, deve-se ter $y_2 = 0$. Senão, de modo análogo, deve-se ter: $\frac{y_2}{x_2} = a$. Por conseguinte, $\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} \Leftrightarrow y_2 = \frac{x_2 y_1}{x_1}$, que é a conhecida regra de três (*simples*, por envolver apenas *duas* grandezas variáveis). Note-se que, em geral, numa regra de três não se dá muita importância para o fator de proporcionalidade, que é mais um elo de ligação entre os valores desejados.

Deve-se ressaltar mais uma vez que uma regra de três só deve ser utilizada caso se tenha certeza que as grandezas são, de fato, proporcionais. Assim, no exemplo da corrida de táxi, caso se pague R$ 26,90 por uma corrida de 20 km, NÃO é conveniente afirmar que o preço a pagar em reais, P, por uma corrida de 60 km pode ser obtido por meio da proporção:

$\frac{26,9}{20} = \frac{P}{60} \Leftrightarrow P = 86,7$, uma vez que P não é proporcional à quilometragem percorrida nas condições admitidas.

Além disso, vale a pena também destacar quais hipóteses se utilizam (ainda que um tanto inverossímeis) para garantir a proporcionalidade entre duas grandezas.

Exemplos:

1. Alguém consegue digitar 5 páginas em 15 minutos. Quantas páginas essa pessoa consegue digitar em 1 hora? Embora seja uma pergunta simples, é importante saber porque se utiliza a proporção: $\frac{5}{15} = \frac{x}{60} \Leftrightarrow x = 20$. Uma maneira tradicional (e útil) de analisar o que foi feito é a denominada "redução à unidade". Quando se usa a proporcionalidade entre as grandezas "quantidade de páginas digitadas" e "tempo (mínimo) necessário à digitação", o que se faz na realidade é SUPOR que a pessoa mantém constante a sua *taxa de digitação* (por unidade de tempo). Assim, encara-se a afirmação "alguém consegue digitar 5 páginas em 15 minutos" como "a cada minuto a pessoa faz SEMPRE 1/3 de página", ou equivalentemente "cada página é SEMPRE digitada em 3 minutos". Caso isto seja admitido, é válida a proporcionalidade entre as grandezas envolvidas, apesar de ser um tanto improvável que alguém (humano) consiga, a qualquer instante de sua vida, manter sempre o mesmo ritmo de digitação. É interessante também notar que tanto faz pôr o número de páginas digitadas, P, em função do tempo, t, quanto o contrário, uma vez que uma função linear (ou uma afim, de modo mais geral) é sempre invertível. Assim, é possível escrever: $P = \frac{1}{3}t$ ou, de modo equivalente, $t = 3P$.

2. Quando se diz que o preço de um quilo de frango é de R$ 3,50 já se está fazendo, automaticamente, a redução à unidade entre as grandezas "massa de frango (K)" e "preço a pagar (P)": reduziu-se o preço à massa unitária (1 kg). A própria representação mais formal deste fato já explicita a redução: $3{,}5\ ^{R\$}/_{kg}$.

Para garantir a proporcionalidade, porém, deve-se notar ainda que a relação entre as grandezas P e K é linear. De fato: P = 3,5.K, pois levando 0 kg de frango, não se paga real algum (pelo frango). Ou então, notando que:

- Quanto mais frango se leva, mais se paga;
- Quando a quantidade de frango inicial é multiplicada por um número natural qualquer (por 4, por exemplo), o preço original a pagar fica multiplicado pela mesma constante (4)

3. Suponha-se que o preço de um imóvel na planta (imediatamente antes de começar a ser construído) seja de R$20.000,00 e que, a cada mês (durante o tempo de construção) esse preço suba R$300,00. Observe-se que já foi feita uma redução à unidade entre as grandezas "preço (P)" e "número de meses de construção (N)": a taxa de variação de preços é suposta constante e igual a 300 $^{R\$}/_{mês}$. Contudo, não há proporcionalidade entre essas grandezas. Basta notar que, após um mês de construção (N = 1), o preço do imóvel é de R$ 20.300,00. Dobrando o número de meses, porém (N = 2), o valor do imóvel não dobra, pois passa a R$ 20.600,00. Isto se deve ao fato de o preço de planta não ser nulo. Como é fácil perceber (e será demonstrado em seguida), a função que relaciona as duas grandezas não é linear, embora seja afim. Sua lei é P = 26000 + 300N. Ou seja, não há proporcionalidade, não cabendo, portanto, uma regra de três para obter relações entre P e N.

4. Uma primeira torneira enche um certo tanque em 8 minutos, enquanto uma segunda torneira enche o mesmo tanque em 12 minutos. Abertas juntas, em quanto tempo o tanque estará cheio?

Apesar de não necessariamente utilizar os conceitos de proporcionalidade, muitas vezes é conveniente usar a redução à unidade. A 1ª torneira enche 1/8 do tanque em 1 minuto, ao passo que a 2ª enche 1/12 do tanque, no mesmo tempo (unitário). Aqui, é crucial notar que há uma hipótese que está sendo feita tacitamente: cada uma das duas torneiras possui uma **vazão constante** (volume de água por unidade de tempo). Não se permite, por exemplo, que haja aberturas variáveis das torneiras, que a pressão da água mude (nem que falte água!). Embora sejam óbvias, é importante vislumbrar tais hipóteses. Finalmente, uma última hipótese (bastante simples, mas também fundamental): pode-se imaginar uma única (terceira) torneira com vazão constante e igual à soma das vazões das duas primeiras, enchendo o tanque em T minutos (tempo procurado). Tal torneira encheria 1/T do tanque por minuto. Logo:

$$\frac{1}{T} = \frac{1}{8} + \frac{1}{12} \Leftrightarrow T = \frac{8.12}{8+12} = 4{,}8 = 4\ \text{min}48\ \text{s}.$$

2.15. FUNÇÕES QUADRÁTICAS

2.15.1. DEFINIÇÃO

Uma função $f: R \to R$ é denominada quadrática (ou *polinomial do 2º grau*) quando existem constantes reais a, b e c, com $a \neq 0$, tais que:

$$f(x) = ax^2 + bx + c, \forall x \in R.$$

É usual denominar a expressão $ax^2 + bx + c$, com a não nulo, *trinômio do 2º grau*.

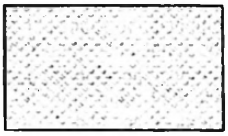
Exemplos:

a) Calculadoras científicas em geral possuem uma tecla que traz consigo uma função quadrática: $\boxed{x^2}$, que representa a função $f: R \to R$, de lei $f(x) = x^2$.

Assim, é possível, por exemplo, entrar com um número real positivo que representa a medida do lado de um quadrado. A saída obtida por meio de tal tecla funcional representará a *área* do quadrado.

b) Deseja-se construir um cercado retangular, que limitará um certo terreno, destinado à plantação de açaí, por exemplo. Por motivos de economia, o perímetro do terreno *deve* ser de 800 metros. Assim, há diversas (em teoria, infinitas) formas diferentes de fazer isto. Podem ser limitados terrenos de 100 metros de frente por 300 metros de fundo, ou de 50 metros de frente por 350 metros de fundo, terrenos de 10 x 390, 1 x 399, etc. Obviamente, alguns terrenos são muito estreitos, outros compridos em demasia, e assim por diante. A grande questão é a seguinte: qual a área de cada um desses terrenos? A primeira coisa trivial a ser notada é que a área não é uma constante para todos os terrenos, como os descritos acima.

30000 m²



37500 m²

Sabe-se que a área S do terreno varia em função da largura "u" e do comprimento "v": $S = u.v$. Pode-se notar, então, que S é uma função de duas variáveis, a princípio (ou seja, sem informações adicionais). Porém, é dado que $2u + 2v = 800 \Leftrightarrow u + v = 400$, uma vez que o perímetro do terreno deve ser de 800 m, supondo-se que as medidas a e b são dadas em metros. Logo, deve-se impor $v = 400 - u$, do que se conclui:

$$S = u.(400 - u) = 400u - u^2,$$

que representa uma função quadrática, ou, com um tanto de rigor, uma *restrição* de uma função quadrática, $S: R_+^* \to R$, definida pela lei acima. Em verdade, aplicando-se a regra do domínio máximo, percebe-se uma restrição de cunho prático: não pode haver dimensões com medidas negativas.

c) Nas proximidades da Terra, em que se pode considerar a aceleração da gravidade constante e igual a "g", um corpo puntiforme lançado do chão com uma velocidade conhecida, "v_0" sobe desacelerado pela gravidade. Suponha-se desprezível a resistência do ar. Após um certo tempo "t", contado a partir do lançamento, o corpo atingiu uma altura "h" dada por:

$$h = v_0 t - \frac{g}{2} t^2.$$

Como g é uma constante, percebe-se que h é dado em função do t. Tal função pode ser considerada quadrática, embora, com o mesmo rigor (pedante) do exemplo anterior, seja em verdade uma restrição de uma função quadratica. Assim, a função é h: R. → R. definida pela equação precedente.

Supondo, par exemplificar, g = 10 m/s^2 e considerando v = 30 m/s, tem-se que h = 30t – 5t^2. Logo, por exemplo, após 1 s do lançamento, o corpo está a uma altura de 25 m do solo. 2 s depois de lançado, o corpo está a 40 m do ponto de lançamento. Após 3 s do lançamento, o corpo está a uma altura de 45 m. E aos 4 s, o corpo está a uma altura de 40 m, significando que ele já se encontra em queda livre, tendo atingido sua altura máxima. Quando ele atingiu esta altura notável? Esta pergunta será respondida em seguida, com o estudo do extremo de uma função quadrática.

d) Como se sabe da Geometria, o número "d" de diagonais de um polígono de "n" lados é dado por:

$$d = \frac{n(n-3)}{2} = \frac{n^2}{2} - \frac{3n}{2},$$

que claramente define uma função quadrática, desconsiderando-se as restrições óbvias de n ser um natural maior que ou igual a 3, bem como d ≥ 0.

e) Suponha-se que, após alguns meses de observação, um empresário percebeu que a quantidade de camisetas vendidas diminui com o preço da seguinte forma: a um preço unitário de R$ 100,00 ninguém comprava uma camiseta sequer; a cada real aumentado no preço de uma única camiseta, 2 clientes deixavam de comprar a mercadoria. Deste modo, o lucro mensal "L", devido às vendas desta mercadoria, varia em função do preço "P" unitário. Sabe-se que o custo para produzir uma única camiseta é de R$ 30,00. Será possível "prever" o lucro num determinado mês, em que o preço de uma camiseta foi fixado? A resposta é SIM, desde que se mantenha o modelo em questão.

Seja "*l*" o lucro líquido obtido com uma única camiseta. Tem-se que *l* = P – 30 **(I)**, descontando o custo do preço de venda. Quantas camisetas são vendidas ao preço P? Sendo Q esta quantidade, nota-se que Q é uma função *decrescente* de P (portanto, monótona injetiva). Além disso, sabe-se que a variações iguais de P correspondem variações iguais de Q. Por conseguinte, Q é uma função *afim* de P. Logo, Q = aP + b. Como ΔP = 1 (aumento de R$ 1,00) provoca ΔQ = – 2 (queda de 2 unidades vendidas), conclui-se facilmente que $a = \frac{\Delta Q}{\Delta P} = -2$. Assim, uma vez que, quando P = 100, tem-se Q = 0, obtém-se b = 200. Daí, Q = – 2P + 200 **(II)**.

Finalmente, é óbvio que quanto maior a quantidade Q vendida, maior o lucro total L. Além disso, dobrando-se o número de camisetas vendidas, dobra-se o lucro total; triplicando-se Q, triplica-se L; e assim sucessivamente, significando que L é proporcional a Q. Se Q = 1, tem-se *l*, isto é, o lucro unitário. Portanto, L = Q.*l* (*). Substituindo os resultados **(I)** e **(II)** em (*), conclui-se que:

$$L = (-2P + 200).(P - 30) = -2P^2 + 260P - 6000,$$

mostrando que, neste exemplo, o lucro mensal é uma *função quadrática* do preço unitário praticado.

Se, por exemplo, P = 30 reais, o lucro obtido será nulo. Se P = 40 reais, o empresário terá um lucro de R$ 1200,00 naquele mês. Caso P seja R$ 60,00, tem-se lucro de R$ 2400,00. Note-se que se P = 70 reais, o lucro também será de R$ 2400,00, embora o preço unitário seja mais "assustador". Já se cada camiseta for vendida por 80 reais o lucro cai para R$ 2000,00. A R$ 95,00 a unidade, o lucro é de apenas R$ 650,00, e a R$ 100,00 o empresário amarga um lucro nulo. E se resolver distribuir seu estoque mensal gratuitamente (P = 0), gastará 6000 para isto.

2.15.2. A FORMA CANÔNICA DO TRINÔMIO DO 2º GRAU

Existe uma maneira muito útil de visualizar um trinômio quadrático qualquer, conhecida como *forma canônica*. Para obtê-la, utiliza-se o que se costuma chamar **completamento do quadrado**. A idéia original é a observação do produto notável:

$$(x \pm y)^2 = x^2 \pm 2xy + y^2 .$$

O segundo membro da identidade acima é conhecido como (*trinômio*) *quadrado perfeito*. O raciocínio é obter um trinômio quadrado perfeito, ou seja, conseguir escrever o "quadrado de um termo, mais o quadrado de outro termo, mais o dobro do produtos destes termos", fatorando-se o trinômio em seguida. Observe-se a seguir no que consiste o método.

Exemplos:

a) O trinômio $x^2 - 12x + 36$ é quadrado perfeito, pois: $x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2.x.6 + 6^2$. Assim, $x^2 - 12x + 36 = (x - 6)^2$.

b) O trinômio $9t^2 + 21tu + 49u^2$ também é quadrado perfeito: $9t^2 + 42tu + 49u^2 = (3t)^2 + 2.3t.7u + (7u)^2$. Logo, $9t^2 + 21tu + 49u^2 = (3t + 7u)^2$.

c) $y^6 + y^3 + \frac{1}{4} = \left(y^3\right)^2 + 2.y^3.\frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \left(y^3 + \frac{1}{2}\right)^2$.

d) O trinômio $x^2 - 12x + 29$ **não é quadrado perfeito**. Mas, como visto no exemplo a, $x^2 - 12x + 36$ o é. Assim, pode-se escrever $x^2 - 12x + 29 = x^2 - 12x + 36 - 7 = (x - 6)^2 - 7$. Pronto! Isto é completar o quadrado do trinômio $x^2 - 12x + 29$: separar uma parte (formada por algumas parcelas) do trinômio dado que compõem um quadrado perfeito. O principal ganho é a possibilidade de *isolar* uma variável, no caso "x", como será mais bem explorado adiante. A expressão $(x - 6)^2 - 7$ é a **forma canônica** de $x^2 - 12x + 29$.

e) O trinômio $u^2 + 3u + 1$ não é um quadrado perfeito. Mas, $u^2 + 3u + 1 = u^2 + 2.u\frac{3}{2} + 1$. Assim, fica fácil ver que o "quadrado do primeiro" pode ser o termo "u^2", ao mesmo tempo em que "o dobro do primeiro pelo segundo" deve corresponder ao termo $2.u.\frac{3}{2}$, explicitando o fato de o "segundo termo" ter que ser $\frac{3}{2}$. Deste modo, a fim de obter um trinômio quadrado perfeito em que apareça o quadrado do termo "u", bem como o quadrado do termo $\frac{3}{2}$, deve-se pôr:

$$u^2 + 3u + 1 = u^2 + 2.u\frac{3}{2} + 1 = \left(u^2 + 2.u\frac{3}{2} + \frac{9}{4}\right) - \frac{9}{4} + 1 = \left(u + \frac{3}{2}\right)^2 - \frac{5}{4}.$$

É bom perceber que, apesar de 1 poderia ter sido considerado também como o "quadrado do primeiro" (a ordem das parcelas não interessa), mas *não é esse o objetivo*: deseja-se isolar a variável, que, no caso, é "x".

f) $3x^2 - 8x - 3 = 3\left(x^2 - \frac{8}{3}x - 1\right) = 3\left(x^2 - 2.x.\frac{4}{3} + \frac{16}{9} - \frac{16}{9} - 1\right) = 3\left(x - \frac{4}{3}\right)^2 - \frac{25}{3}$.

No caso geral, em que se tem o trinômio $ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, o procedimento de completar o quadrado pode ficar assim:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x\right) + c = a\left(x^2 + 2.\frac{b}{2a}x + \frac{b^2}{4a^2} - \frac{b^2}{4a^2}\right) + c =$$

$$a\left[\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a^2}\right] + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{4a} + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2 - 4ac}{4a}.$$

Portanto, utilizando-se a forma canônica do trinômio geral do 2° grau a uma variável, pode-se escrever a importante identidade:

$$\boxed{ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}},$$

em que $\Delta = b^2 - 4ac$ é denominado o *discriminante* do trinômio.

Como deve ficar claro, toda função quadrática pode ter sua lei escrita, assim, sob a forma canônica.

2.15.3. RAÍZES

A forma canônica do trinômio do 2° grau permite que se encontrem facilmente as suas raízes. Assim, basta notar que as raízes do trinômio $ax^2 + bx + c$, x_1 e x_2, podem ser calculadas como segue.

$$ax^2 + bx + c = 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = 0 \Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2}.$$

Neste ponto, podem ocorrer *três* casos importantes a analisar (ressaltando-se que a^2 é sempre positivo):

- $\Delta = 0$. Nesta situação, $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x = -\frac{b}{2a} = x_1 = x_2$. Deve-se notar que há **duas raízes reais** (supondo a, b $\in$ R) e **iguais** entre si. Diz-se que o trinômio possui uma **raiz dupla**, ou ainda de **multiplicidade 2**.
- $\Delta > 0$. Pode-se, então, extrair a raiz quadrada real do valor $\frac{\Delta}{4a^2}$.

$$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{\Delta}{4a^2} \Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\sqrt{\frac{\Delta}{4a^2}} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a}.$$

Assim, as raízes do trinômio quadrático são dadas por $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ (a ordem é irrelevante).

- $\Delta < 0$. Neste caso, a expressão $\sqrt{\Delta}$ não representa real algum. Estendendo o significado deste símbolo a (qualquer) uma das *raízes quadradas* <u>*complexas*</u> do número negativo Δ, pode-se concluir facilmente que haverá **duas raízes imaginárias** (complexas, mas não reais), naturalmente <u>distintas</u>.

Costuma-se generalizar o que foi dito afirmando-se tão somente que as raízes da função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c$ são dadas pela seguinte fórmula:

$$\boxed{x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}}, \text{ em que } \Delta = b^2 - 4ac.$$

A expressão anterior é, portanto, a *fórmula de resolução de uma equação polinomial do 2° grau*, $ax^2 + bx + c = 0$. No Brasil, é também conhecida como "fórmula de Bhaskara", o qual foi um matemático hindu, que viveu aproximadamente pelo século XI. Atribui-se-lhe este resultado milenar, embora o próprio matemático indiano tenha creditado o também matemático hindu Sridara, pelo menos um século antes.

Quando b = 0 ou c = 0 na equação $ax^2 + bx + c = 0$, lembrando que $a \neq 0$, a equação é dita *incompleta*. Nestes casos, não há necessidade de empregar a fórmula acima, bastando empregar ferramentas algébricas elementares.

Exemplos:

a) Considere-se a equação $4x^2 - 9 = 0$. Como b = 0, a equação é incompleta. É possível aplicar a fórmula resolutiva: $\Delta = 0^2 - 4.4.(-9) = 144$. Já que o discriminante é positivo, deve haver duas raízes reais distintas. Tais raízes podem se calculadas por meio da fórmula: $x = \frac{-0 \pm \sqrt{144}}{2.4} = \pm\frac{12}{8} = \pm\frac{3}{2}$. Porém, não há necessidade deste resultado. Basta notar, sucessivamente, que:

$$4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow (2x)^2 - 3^2 = 0 \Leftrightarrow (2x+3)(2x-3) = 0 \Leftrightarrow x = \frac{3}{2} \text{ ou } x = -\frac{3}{2}.$$

Ou, ainda, que:

$$4x^2 - 9 = 0 \Leftrightarrow 4x^2 = 9 \Leftrightarrow x^2 = \frac{9}{4} \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{\frac{9}{4}} \Leftrightarrow x = \pm\frac{3}{2}.$$

b) Seja a equação $-3x^2 + 7x = 0$. Agora, tem-se c = 0. Usando a fórmula, $\Delta = 7^2 - 4.(-3).0 = 49$. Portanto, deve haver duas raízes reais distintas. Daí: $x = \frac{-7 \pm \sqrt{49}}{2.3} = \frac{-7 \pm 7}{6}$. Assim, as raízes são $x_1 = 0$ e $x_2 = -\frac{7}{3}$. Novamente, seria possível obter as raízes sem utilizar a fórmula. Com efeito:

$$-3x^2 + 7x = 0 \Leftrightarrow x.(-3x + 7) = 0 \Leftrightarrow x = 0 \text{ ou } x = -\frac{7}{3}.$$

c) Considere-se a equação $-2x^2 + x + 1 = 0$. O discriminante é $\Delta = 1^2 - 4.(-2).1 = 9 > 0$. Assim, existem duas raízes reais distintas. Aqui, é conveniente aplicar a fórmula de resolução (ou completar o quadrado). Assim, as raízes são dadas por:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{9}}{2.2} = \frac{-1 \pm 3}{4} \Rightarrow x = -1 \text{ ou } x = \frac{1}{2}.$$

d) A equação $x^2 + x + 1 = 0$ possui $\Delta = 1^2 - 4.1.1 = -3$. Portanto, não há raízes reais. Nada impede, porém, que a fórmula seja utilizada corretamente para obter as raízes complexas, desde que com a devida interpretação do símbolo $\sqrt{\ }$. Desta forma, as raízes são tais que:

$$x = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2} \Leftrightarrow x_1 = -\frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} \text{ ou } x_2 = -\frac{1}{2} - i\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

2.15.4. RELAÇÕES ENTRE OS COEFICIENTES E AS RAÍZES

É útil, em alguns casos, obter relações entre os coeficientes de uma equação polinomial do 2º grau e suas raízes, geralmente *quando não há necessidade de obtê-las*.

Tais relações são generalizadas durante o estudo das equações polinomiais. São também conhecidas como relações de Girard.

Seja a equação $ax^2 + bx + c = 0$, em que $a \neq 0$, com raízes x_1 e x_2. Suponha-se, sem perda de generalidade, que $x_1 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ e que $x_2 = \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$. Deste modo, tem-se:

$$x_1 + x_2 = \frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a} + \frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a} = \frac{-2b}{2a} = -\frac{b}{a}.$$

$$x_1 x_2 = \left(\frac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(\frac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right) = \frac{(-b)^2 - \left(\sqrt{\Delta}\right)^2}{4a^2} = \frac{b^2 - \Delta}{4a^2} = \frac{b^2 - \left(b^2 - 4ac\right)}{4a^2} = \frac{4ac}{4a^2} = \frac{c}{a}.$$

Resumindo:

$$\begin{cases} x_1 + x_2 = -\dfrac{b}{a} \\ x_1 x_2 = \dfrac{c}{a} \end{cases}.$$

2.15.5. FORMA FATORADA

Dado o trinômio quadrático $ax^2 + bx + c$, de raízes x_1 e x_2, nota-se (não tão facilmente) que:

$$ax^2 + bx + c = a\left(x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a}\right) = a\left[x^2 - \left(-\frac{b}{a}\right)x + \frac{c}{a}\right] = a\left[x^2 - (x_1 + x_2)x + x_1x_2\right] =$$

$$a\left(x^2 - x_1x - x_2x + x_1x_2\right) = a\left[(x - x_1)x - (x - x_1)x_2\right] = a(x - x_1)(x - x_1).$$

Portanto, pode-se escrever que

$$ax^2 + bx + c = a(x - x_1)(x - x_2).$$

2.15.6. MÁXIMOS E MÍNIMOS

Considere-se a função quadrática f, definida por $f(x) = ax^2 - bx + c$. Na forma canônica, a lei fica $f(x) = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Percebe-se que, para qualquer x real, tem-se:

$\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0$ (*), com igualdade apenas quando $x = -\frac{b}{2a}$. Analisem-se dois casos possíveis:

I. $a > 0$. Neste caso, a inequação em (*) fica $a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 \geq 0 \Leftrightarrow a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \geq -\frac{\Delta}{4a}$. Assim: $f(x) \geq -\frac{\Delta}{4a}$, $\forall x \in \mathbb{R}$. Quando $a > 0$, portanto, a função (a rigor, o conjunto das imagens da função) assume um **valor mínimo**, dado por $y = -\frac{\Delta}{4a}$. Tal valor é alcançado exclusivamente para $x = -\frac{b}{2a}$.

II. $a < 0$. A única mudança consiste em alterar o sinal da inequação, visto que (*) fica com ambos os membros multiplicados por um número negativo. Desta forma, $f(x) \leq -\frac{\Delta}{4a}$, $\forall x \in \mathbb{R}$, havendo um **valor máximo** assumido por $f(x)$, exatamente quando $x = -\frac{b}{2a}$.

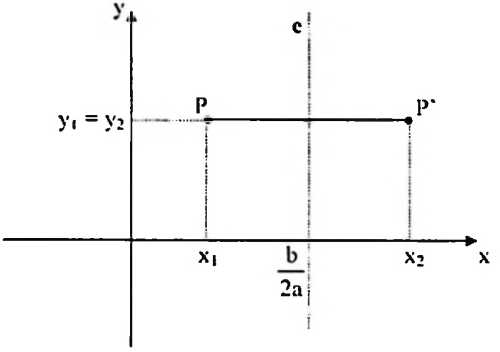
Resumindo, qualquer função quadrática possui um **valor extremo: mínimo**, se $a > 0$, **máximo**, se $a < 0$. O ponto de coordenadas $\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a}\right)$ é denominado **vértice** da função quadrática, representando o ponto extremo do gráfico de f.

2.15.6. EIXO DE SIMETRIA

A reta vertical $x = -\frac{b}{2a}$ é denominada **eixo de simetria** do gráfico da função quadrática de lei $f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$. Isso significa que, se um ponto $P(x_1, y_1)$ pertence ao gráfico da função, necessariamente o simétrico de tal ponto em relação ao eixo de simetria deverá pertencer ao gráfico também. De fato, seja $P'(x_2, y_2)$ o simétrico de P. Por hipótese, $y_1 = a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}$, visto que P está no gráfico de *f*. Para que P e P' sejam simétricos em relação à reta $x = -\frac{b}{2a}$, deve-se impor que:

I. $\frac{x_1 + x_2}{2} = -\frac{b}{2a}$, isto é, que o ponto médio do segmento $\overline{PP'}$ esteja no eixo de simetria. Logo, deve-se ter $x_2 = -\frac{b}{a} - x_1$.

II. $y_1 = y_2$. Com isto, P e P' ficam numa mesma horizontal e $\overline{PP'}$ fica perpendicular ao eixo de simetria, que é vertical.



Para que os pontos P e P' sejam simétricos em relação à reta e, tal reta deve ser a **mediatriz** de $\overline{PP'}$.

Resta provar que o ponto P' pertence ao gráfico de *f*. Para tanto, basta verificar se as coordenadas do ponto satisfazem a lei da função. Com efeito:

$$a\left(x_2 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(-\frac{b}{a} - x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = a\left(-x_1 - \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} =$$

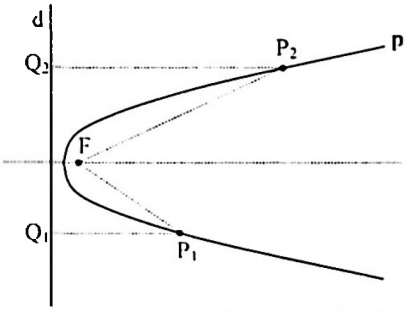
$$a\left(x_1 + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} = f(x_1) = y_1 = y_2.$$

Desta forma, P' também pertence ao gráfico de *f*, e a reta e é, em verdade, um eixo de simetria para o gráfico de *f*.

2.15.7. GRÁFICO

O gráfico de uma função quadrática qualquer é uma **parábola com eixo de simetria vertical**. Em Geometria Analítica, estudam-se com mais detalhes conjuntos de pontos sob o ponto de vista algébrico, quando serão analisadas as curvas denominadas *cônicas*, em grupo de três: *elipses*, *hipérboles* e *parábolas*.

Neste momento, é importante conhecer apenas alguns fatos básicos sobre parábolas. Por definição, parábola é o conjunto de todos os pontos do plano cartesiano que eqüidistam (estão à mesma distância) de uma reta e de um ponto, ambos dados (fixos). A reta em questão é denominada **diretriz** da parábola, representada por d, enquanto o ponto fixo é o **foco** da parábola, a ser denominado F daqui por diante. Demonstra-se facilmente, por congruência de triângulos, que a reta que passa pelo foco e é perpendicular à diretriz é um (em verdade, O) eixo de simetria da parábola.



Na parábola p, deve-se ter $\overline{P_1Q_1} = \overline{P_1F}$ e $\overline{P_2Q_2} = \overline{P_2F}$.

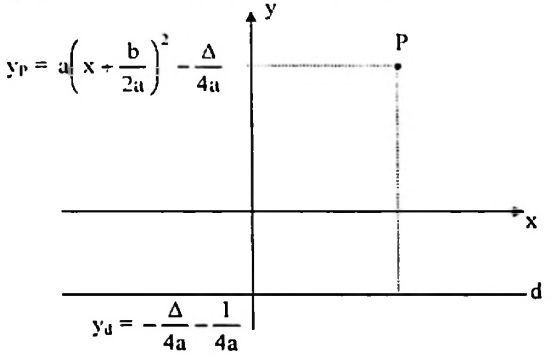
É possível também provar que uma parábola pode representar o gráfico de uma função real de variável real se, e somente se, a diretriz é horizontal, o que equivale a afirmar que o eixo de simetria deve ser vertical. Isto se deve ao fato (não demonstrado aqui) de que qualquer reta paralela ao eixo de simetria intersecta a parábola em um único ponto, bem como existir uma infinidade de retas, não paralelas ao eixo de simetria, que cortam a curva em dois pontos.

Cabe agora provar que a curva (conjunto de pontos) que satisfaz a igualdade $y = ax^2 + bx + c$, com $a \neq 0$, é uma parábola. Para isto, deve-se mostrar que qualquer ponto da forma $(x, ax^2 + bx + c)$ está a mesma distância de uma determinada reta e de um certo ponto. Utilizar-se-á a forma canônica do trinômio do 2º grau. Seja, então, $P\left(x, a\left(x+\frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a}\right)$ um ponto do gráfico de uma função quadrática f: $R \to R$, dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$. Conforme analisado anteriormente, caso $a > 0$, o gráfico de f admite um ponto em que a imagem é menor que a de todos os outros valores do domínio. Este ponto foi denominado o vértice do gráfico, e é imediato perceber que todo o gráfico deverá estar situado "acima" da horizontal que passa pelo vértice, neste caso. Se $a < 0$, o raciocínio é análogo, com a única diferença de que o gráfico estará "abaixo" de tal horizontal.

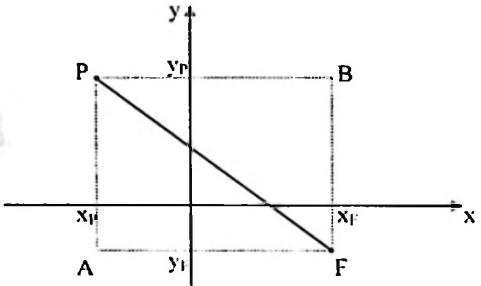
Suponha-se, apenas para fixar idéias, que $a > 0$. Provar-se-á que a distância de P até a reta horizontal d, dada por $y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$ é exatamente igual a distancia de P até o ponto $F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right)$. É perfeitamente natural que haja estranheza em utilizar esses elementos para quem não domina os conceitos de Geometria Analítica. Em verdade, o raciocínio para obter os "candidatos" a diretriz e a foco são melhores "de trás para frente": fica muitíssimo mais fácil para quem já tem conhecimentos analíticos, para quem já conhece resultados gerais. Entretanto, apenas para fins de completeza, serão apresentados aqui.

Inicialmente, é trivial notar que a distância de um ponto qualquer até uma reta horizontal é dada pelo módulo da diferença entre as ordenadas do ponto e da reta (basta observar o eixo y). Assim, a distância de P até d será igual a:

$$D_{P,d} = |y_P - y_d| = \left| \left[a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \right] - \left[-\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a} \right] \right| = \left| a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4a} \right|.$$



Agora, é interessante observar que a distância entre dois pontos P e F quaisquer num sistema cartesiano ortogonal pode ser calculado pela fórmula $D_{P,F} = \sqrt{(x_P - x_F)^2 + (y_P - y_F)^2}$, que é uma conseqüência imediata do teorema de Pitágoras. Observe-se a figura seguinte.



Na figura, AF é igual à diferença, em módulo, entre x_P e x_F, bem como $AP = |y_P - y_F|$. Portanto, a distância entre os pontos F e P, representada pela medida do segmento $\overline{PF}$, é a hipotenusa do triângulo retângulo APF:

$$PF^2 = AP^2 + AF^2$$

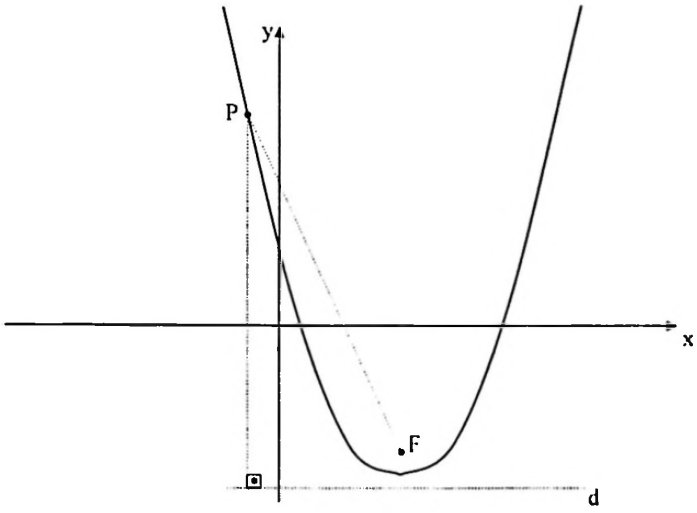
Deste modo, conclui-se que:

$$D_{P,F} = \sqrt{\left[x - \left(-\frac{b}{2a}\right)^2 + \left\{ \left[a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{\Delta}{4a} \right] \right\} - \left(\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a} \right) \right]^2} =$$

$$\sqrt{\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \left[a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{1}{4a} \right]^2} = \sqrt{a^2\left(x + \frac{b}{2a}\right)^4 + \frac{1}{2}\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{16a^2}} =$$

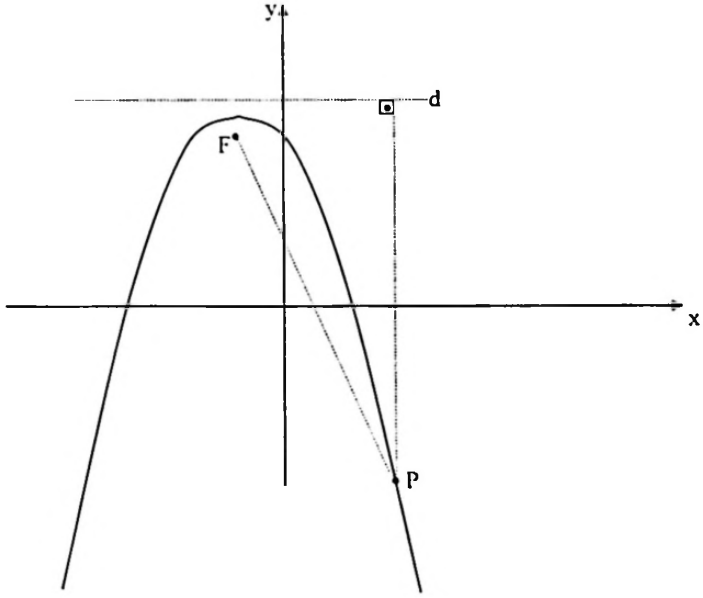
$$\sqrt{\left[a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4a} \right]^2} = \left| a\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \frac{1}{4a} \right|, \text{ lembrando-se que } \sqrt{u^2} = |u|, \forall x \in \mathbb{R}.$$

Provou-se, portanto, que $D_{P,d} = D_{P,F}$, isto é, que qualquer ponto do gráfico de f eqüidista do ponto F e da reta d. Assim, o gráfico de qualquer função quadrática deve ser uma parábola, de foco no ponto $F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}\right)$ e diretriz dada pela reta horizontal de equação $y = -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}$.



No caso em que $a < 0$, as principais modificações são que o foco e a diretriz passam a ser, respectivamente, $F\left(-\frac{b}{2a}, -\frac{\Delta}{4a} - \frac{1}{4a}\right)$ e $y = -\frac{\Delta}{4a} + \frac{1}{4a}$, além de o gráfico estar inteiramente situado sob a diretriz. Diz-se que quando:

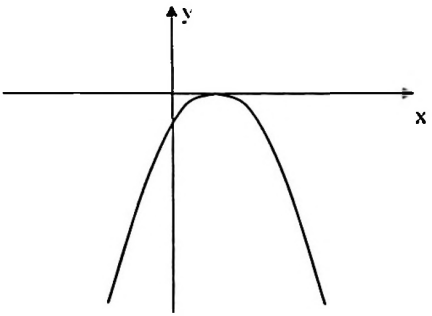
- $a > 0$ a parábola é **côncava para cima**, significando que ela está inteiramente sobre a diretriz;
- $a < 0$ a parábola é **côncava para baixo**.



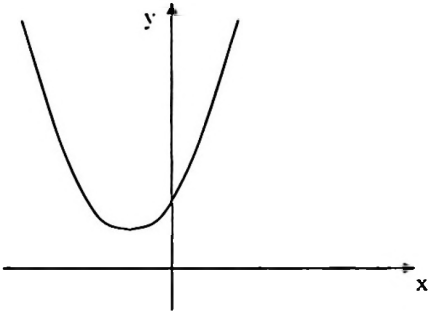
Lembrando que os pontos em que o gráfico de uma função qualquer intersectam o eixo das abscissas fornecem as *raízes* ou *zeros* **reais** de tal função, podem ocorrer três casos em relação ao gráfico de uma função quadrática:

- a parábola corta o eixo das abscissas em **dois pontos distintos**: isto ocorre se, e somente se, $\Delta > 0$, pois, como já se sabe, *haverá duas raízes reais diferentes*;
- a parábola **tangencia o eixo x**, quando haverá *um único ponto de contato*, acontecendo se, e somente se, $\Delta = 0$, caso em que existirá *uma raiz real dupla*;
- a parábola **não encontra o eixo das abscissas**, ocorrendo se, e somente se, $\Delta < 0$, quando *não há raízes reais*.

Nos dois gráficos anteriores, tem-se que Δ é positivo.



$\Delta = 0$: uma raiz (real) dupla.



$\Delta < 0$: nenhuma raiz real.

Exercícios

1) (UFES-95) Sendo f uma função definida por $f(x-1) = 2f(x) + f(x+1)$, tal que $f(0) = 2$ e $f(1) = -1$, o valor de $|f(3)|$ é:
a) 1 b) 3 c) 16 d) 8 e) 9

2) (PUC-MG-93) O teto de um túnel parabólico, com eixo de simetria vertical, tem altura máxima igual a 6 m e largura de base igual a 4 m. Calcule a altura do teto do túnel a 1 m do eixo de simetria.

3) (UFPB-94) Considere as funções f e g de $\Re$ em $\Re$ definidas por:

$$f(x) = \begin{cases} g(x+2) & \text{se } x < 0 \\ 2x+5 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

$$g(x) = \begin{cases} f(x+1) & \text{se } x < 0 \\ x^2 & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$$

Calcule $f(-3)$.

4) (UFPB-97) Sejam f e g funções de $\Re$ em $\Re$ tais que $f(g(x)) = 2x$ e $f(x) = 4x + 1$. Calcule $g(1)$.

5) (Fesp-95) Assinale as alternativas corretas:
0) Se $f: \Re - \{1\} \to \Re - \{3\}$ definida por $f(x) = \frac{3x+1}{x-1}$, então $f^{-1} = \frac{x+1}{x-3}$.
1) Se f é uma função tal que $f(x+y) = f(x).f(y)$ e $f(1) = 3$, então $f(n) = 3^n$.
2) Se $f(x+2) = x - 1$, então f(x) é uma função ímpar.
3) Se f é uma função par e $g(x) = 1/f(x)$, então f é uma função par para todo x pertencente ao domínio de g.
4) Se $f(g(x)) = 2x - 1$ e $f(x) = x + 1$, então $g(x) = x - 1$.

6) (Fesp-97)) Assinale as alternativas corretas:
0) Se f é uma função contínua e crescente no intervalo [a, b], então f tem sua inversa f^{-1} definida no intervalo [f(a), f(b)].
1) Se f é uma função real de $f(x-1) = x^2 - x$, então $f(x) = x^2 + x + 1$.
2) Se f é uma função inversível e o gráfico de f passa pelo ponto (1, 3), então o gráfico de f^{-1} passa pelo ponto (1, 1/3).
3) A função $f(x) = x^2 - x$ é par.
4) Se f e g são funções ímpares, então (f + g) é uma função ímpar.

7) (Unicap-93) Sejam A e B subconjuntos não-vazios do conjunto dos números reais; e sejam f e g duas funções cujo domínio é A e cujo contradomínio é B. Assinale as alternativas corretas:
0) Se f é bijetora então existe a inversa de f.
1) Se f é par e g é ímpar então f.g é par.
2) Se A = B e f é injetora, então f admite inversa.
3) Se g é uma função identidade, então $A \subset B$.
4) Se g é inversa de f, então A = B.

8) (Unicap-94) Sejam A e B subconjuntos não vazios do domínio dos números reais e f e g funções com domínio em A e contradomínio em B. Assinale as alternativas corretas:
0) Se f é a identidade então A = B.
1) Se f é par e g é par então (f + g)/2 é par.
2) Se f é crescente e g decrescente, então existe $x_0 \in A$ tal que $f(x_0) = g(x_0)$.
3) Se g é a inversa de f então A = B.
4) $f \circ g = g \circ f$ para todo elemento do domínio.

9) (Unicap-95) Sejam A, B, C, $\Re$, $f: \Re \to \Re$ e $g: A \to B$. Assinale as alternativas corretas:
0) Se $f(x) \geq 0$ e $g(x) \geq 0$, então as inequações $f(x) > g(x)$ e $[f(x)]^2 > [g(x)]^2$ são equivalentes.
1) Se $A = B = \Re$, $f(x) = \sqrt{x^2}$ e $g(x) = |x|$, então $f(x) = g(x)$, para todo $x \in A$.
2) Se $A = B = \Re$, $f(x) = ax + b$ e $g(x) = x$, com $a, b \in \Re$, $a \neq 0$, então existe $x_0 \in A$, tal que $f(x_0) = g(x_0)$.
3) Se $A = B = \Re$ e f e g são funções injetoras, então $g \circ f: \Re \to \Re$ é também injetora.
4) Se $A = B = \Re$ e $f(x-1) = 2x + 1$, então $f(x) = 2x$.

10) (Unicap-96) Se $f: \Re \to \Re$ é uma função não nula, ímpar e periódica de período p, então:
0) $f(p) = 0$
1) $f(-x) = f(x - p)$
2) $f(x) = -f(-x)$
3) $f(-x) = -f(x + p)$
4) $f(0) = 0$

11) (Unicap-97) Seja uma função do tipo $f(x) = ax^2 + bx + c$, tal que $f(2x-3) = 4x^2 + 5$, qualquer que seja o valor de x real. Determine o valor de c.

12) (UFPE-93) Considere as funções f, g e h de $\Re$ em $\Re$ dadas por $f(x) = x^3 + 1$, $g(x) = \sqrt[3]{x}$ e $h(x) = x - 1$. Pode-se afirmar que:
0) $f \circ g$ não é invertível
1) f é sobrejetiva
2) $g \circ g$ é invertível
3) $g \circ h$ é a função inversa de f
4) $h \circ g$ é a função inversa de f

13) (UFPE-94) Assinale na coluna I as afirmativas verdadeiras e na coluna II as falsas. Considere a função $\Re \to \Re$ dada por $h(x) = ax^2 + bx$, $a \neq 0$. Admita que a imagem de h é o intervalo $(-\infty, 4)$. Analise as seguintes afirmações:
0 0 $h(-b/2a) = 4$
1 1 $a > 0$
2 2 4 é o valor mínimo de h
3 3 o gráfico de h intercepta a reta $y = -b^2/2a$
4 4 o gráfico de h passa pela origem

14) (UFPE-94) Seja $f: \Re \to \Re$ uma função satisfazendo $f(x) < f(3)$ para todo $x \neq 3$. Considere função $g: \Re \to \Re$ definida por $g(x) = f(x^3 - 61)$
20. Determine b de modo que $g(x) \leq g(b)$ para do x real.

.5) (UFPE-96) Sejam A e B conjuntos com m e n elementos respectivamente. Analise as seguintes afirmativas:
0) Se f: A → B é uma função injetora então $m \leq n$
1) Se f: A → B é uma função sobrejetora então $m \geq n$
2) Se f: A → B é uma função bijetora então $m = n$
3) Se f: A → B é uma função bijetora então o gráfico de f é um subconjunto de AxB com mxn elementos.
4) Se $m = n$ o número de funções bijetoras f: A → B é m!

16) (UFPE-97) Sejam $f: \Re - \{3\} \to \Re - \{-2\}$ e $g: \Re - \{-2\} \to \Re - \{-3\}$ duas funções tais que $f(g(x)) = x$, para todo x no domínio de g. Se $g(x) = \frac{3x+1}{x+2}$, calcule f(2).

17) (UFPE-99) Seja $f: (0, 1) \to \Re$ dada por $f(x) = \frac{1-2x}{x^2-x}$

Analise as afirmações:
0-0) f é injetora.
1-1) f não tem raízes no intervalo (0, 1).
2-2) A imagem de f não contém 1.
3-3) f é bijetora.
4-4) $f(x) < 0$ se e só se $x > 1/2$.

18) (UFPE-99) Seja $N = \{0, 1, 2, 3, ...\}$ o conjunto dos naturais e $f: N \times N \to N \quad (m, n) \to 2^m(2n+1)$
Analise as afirmações:
0-0) f é injetora
1-1) f é sobrejetora
2-2) f é bijetora
3-3) A imagem de f consiste dos números pares
4-4) A imagem de f não contém primos.

19) (UFPE-99) Considere a função

$$f(x) = \frac{x\,2^{-x}}{(1+2^{-x})^2}$$

definida para todo real x. Podemos afirmar que:

0-0) $f(x) = \frac{x2^{-x}}{1+2^{-x+1}+2^{-2x}}$

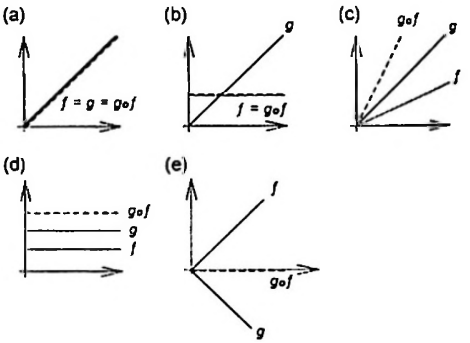
1-1) $f(x) = \frac{x}{2^x+2+2^{-x}}$

2-2) $f(x)$ não assume valores negativos

3-3) Existe um único real a tal que $f(a) = 0$

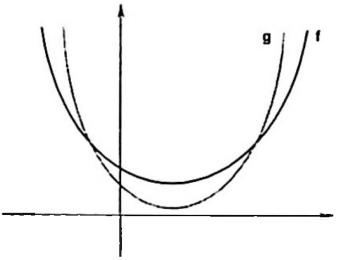
4-4) $0 < f(100) < 10^{-28}$

20) (UFPE-2000) Quais das ilustrações abaixo podem representar os gráficos de funções f, g e $g \circ f$?



Observação: Em (a), (b) e (c), o gráfico de g é a bissetriz do primeiro quadrante.
0) (a) 1) (b) 2) (c) 3) (d) 4) (e)

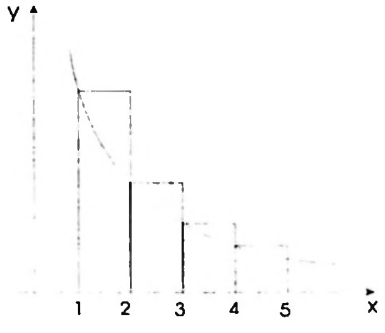
21) (UFPE-2000) A figura abaixo ilustra os gráficos das funções $f(x) = a_1x^2 + b_1x + c_1$ e $g(x) = a_2x^2 + b_2x + c_2$:



Analise as afirmações:
0) $a_1 < a_2$ 1) $b_1 < b_2$ 2) $c_1 < c_2$
3) $b_1 b_2 > 0$ 4) $a_1 c_1 > a_2 c_2$

22) (UFV-98) Seja f a função real definida por $f(x) = \frac{1}{x}$, $x \in [1, 5]$. Dividindo-se o intervalo $[1, 5]$ em quatro partes iguais e calculando-se a área de cada retângulo, como na figura abaixo, a soma das áreas dos retângulos é:

a) $\frac{77}{60}$
b) $\frac{25}{12}$
c) $\frac{25}{24}$
d) $\frac{77}{120}$
e) $\frac{77}{30}$



23) (UFV-98) Sejam $f, g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções tais que $f(x) = -x^2 + 4x$ e $g(x) = 2x$. Considere o triângulo retângulo cujos catetos têm por medida, respectivamente, os valores máximos de fog e gof. Calcule a área deste triângulo.

24) (UFV-98) Seja a função f definida no conjunto dos números naturais, dada por $f(n+1) = \frac{f(n)}{3}$, $f(0) = 2$.
a) Calcule $f(5)$.
b) Qual o menor valor de n para o qual $f(n) < \frac{1}{90}$?

25) (Cefet/PR-2004) Uma companhia distribuidora de energia criou um método para cálculo das contas de luz: resolveu cobrar 5 u.m. de todos os usuários com consumo inferior ou igual a 100 kWh: para os que consomem entre 100 e 300 kWh cobrará 0,05 u.m./kWh e para aqueles que consomem a partir de 300 kWh cobrará 0,05 u.m./kWh + 1 u.m. Sendo assim, é verdadeiro afirmar que a função que representa este problema:
A) é crescente, pois quanto mais se gasta mais se paga.
B) é uma função descontínua em x = 300 kWh.
C) é uma função linear.
D) terá conjunto imagem $\{ y \in \mathbb{R} / y \geq 5 \}$.
E) Df = IR .

26) (Cefet/PR-2004) Determine as funções compostas fog e gof se $f(x) = x^3 - 1$ e $g(x) = x^2 + 2x$.
A) $fog = x^6 + 6x^5 + 12x^4 + 8x^3 - 1$ e $gof = x^6 - 1$
B) $fog = x^5 + 5x^4 + 3x$ e $gof = x^3 - x^2 - 1$
C) $fog = x^6 - 1$ e $gof = x^3 - 2x + 1$
D) $fog = x^6 + 2x^5 + 4x^3 + 2x^2 - 1$ e $gof = x^4 - 3x^3 - 2x^2 + 1$
E) $fog = x^4 + 2x^3 + 2x - 1$ e $gof = x^6 - 2x^5 + 4x^4 - 2x + 1$

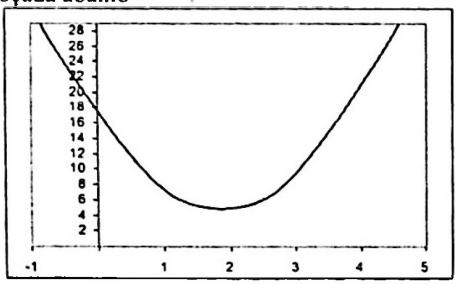
27) (Ciaba-2000) O valor de m na equação $x^2 - 6x + m = 0$ a fim de que uma raiz seja o dobro da outra é:
(A) $m = 12$ (B) $m = 8$
(C) $m = 5$ (D) $m = 4$
(E) $m = 3$

28) (Ciaba-2005) O intervalo onde a função $f(x) = \frac{ax - 2}{ax^2 - x}$, com $a \in \mathbb{R}^*$, apresenta sinal positivo é

a) $\left]-\infty, \frac{2}{a}\right[$ b) $\left]\frac{1}{a}, 0\right[$ c) $\left]\frac{1}{a}, +\infty\right[$
d) $\left]\frac{2}{a}, \frac{1}{a}\right[$ e) $\left]\frac{2}{a}, 0\right[$

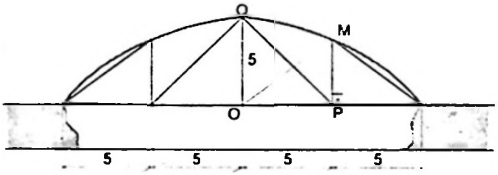
29) (UFPE-2002) Sobre as parábolas que, dadas num sistema cartesiano com equações $y = ax^2 + bx + c$ com a, b e c reais, interceptam o eixo das ordenadas no ponto de coordenada 4 e têm vértice com abscissa 1 pode-se afirmar que:
0) têm concavidade voltada para cima.

1) têm forma canônica $y = a(x-1)^2 + 4-a$ para algum real a.
2) não podem ter vértice com ordenada 4
3) uma delas tem gráfico contendo a parábola esboçada abaixo



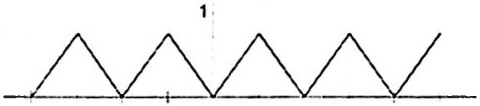
4) seus coeficientes satisfazem a relação $2a + b + c = 5$.

30) (UFPE-2002) Uma ponte possui um arco de sustentação na forma de um arco de parábola com eixo passando por OQ e suportes verticais situados a uma mesma distância, conforme ilustração a seguir. O comprimento da ponte é de **20m** e a maior distância entre pontos do arco e a ponte é de 5m. O ponto P dista 5m do centro da ponte e PM é perpendicular à ponte. Determine a distância PM, em metros, e indique $4 \times PM$.



31) (UFPE-2002) Qual a solução inteira da desigualdade $\frac{x}{x-19} > 19$?

32) (UFPE-2002) Seja $f:R \to R$ uma função par e periódica. Sabendo-se que $f(x) = x$ para $0 \le x \le 1$ e que o período de f é 2, analise as afirmações abaixo.
0) O gráfico de f é ilustrado pela figura abaixo:



1) Se $0 \le x \le 2$ então $f(x) = |x-1|$
2) A imagem do conjunto dos inteiros por f é $\{0,1\}$
3) O conjunto de soluções da equação $f(x) = 1/2$ é igual a $\{1/2 + k : k \text{ inteiro}\}$
4) Se $|x| \le 1$ então $f(x) = |x|$

33) (UFPE-2002) Suponha que o consumo de um carro para percorrer 100km com velocidade de x km/h seja dado por $C(x) = 0{,}006x^2 - 0{,}6x + 25$. Para qual velocidade este consumo é mínimo?
A) 46km/h B) 47km/h C) 48km/h
D) 49km/h E) 50km/h

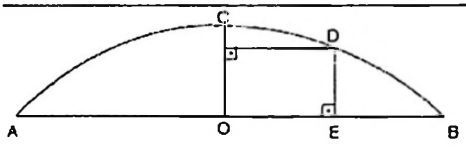
34) (UFPE-2003) Quando o preço do pão francês era de R$ 0,12 a unidade, uma padaria vendia 1000 unidades diariamente. A cada aumento de R$ 0,01 no preço de cada pão, o número de pães vendidos por dia diminui de 50 unidades. Reajustando adequadamente o preço do pão, qual a quantia máxima (em reais) que pode ser arrecadada diariamente pela padaria com a venda dos pães? Assinale metade do valor correspondente à quantia obtida.

35) (UFPE-2003) Sejam a e b as raízes da equação $x^2 - 5x + q = 0$. Sabendo-se que $a^b.b^a.a^a.b^b = 243$, indique o valor de q.

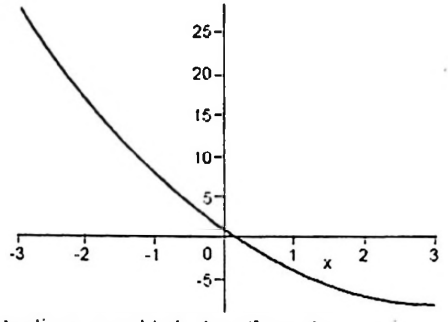
36) (UFPE-2004) Uma pesquisa sobre a relação entre o preço e a demanda de certo produto revelou que: a cada desconto de R$ 50,00 no preço do produto, o número de unidades vendidas aumentava de 10. Se, quando o preço do produto era R$ 1.800,00 o número de unidades vendidas era de 240, calcule o valor máximo, em reais, que pode ser obtido com a venda das unidades do produto, e indique a soma dos seus dígitos.

37) (UFPE-2004) Indique o comprimento do intervalo das soluções da desigualdade $0 \le 2x - 7 \le 70$.

38) (UFPE-2004) A figura abaixo ilustra uma viga na forma de um arco de parábola AB (com escalas horizontal e vertical diferentes). O eixo da parábola contendo o arco AB é a reta passando por O e C, a qual é perpendicular ao segmento AB. Se E é o ponto médio de OB, ED = 6m e OE = 14m, calcule, em metros, a altura OC.



39) (UFPE-2004) A figura abaixo ilustra parte do gráfico de um polinômio quadrático $p(x) = ax^2 + bx + c$ com coeficientes a, b e c reais.



Analise a veracidade das afirmações seguintes:
0) p(x) admite duas raízes reais.
1) b > 0
2) p(x) define uma função decrescente para todo real x.
3) p(x) < 30 para todo real x.
4) c > 0.

40) (EEAR-2004) Considere a equação $|3x - 6| = x + 2$. Com respeito às raízes dessa equação, podemos afirmar que elas pertencem ao intervalo
a) [1, 2]. b)]2, 5[. c)]0, 4]. d)]1, 4].

41) (EEAR-2006) Se

$$f(n) = \begin{cases} \frac{n}{2}, & \text{se } n \text{ é par} \\ \frac{n+1}{2}, & \text{se } n \text{ é ímpar} \end{cases}$$ define uma

função $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$, então
a) f é apenas injetora.
b) f é bijetora.
c) f não é injetora, nem sobrejetora.
d) f é apenas sobrejetora.

42) (EEAR-2006) O conjunto dos valores reais de x para os quais a expressão $\frac{x-1}{|x^2-10x+21|}$ é estritamente positiva é
a) $\{x \in \mathbb{R} / x > 1\}$
b) $\{x \in \mathbb{R} / x > 3 \text{ e } x \neq 7\}$
c) $\{x \in \mathbb{R} / x < 1 \text{ ou } 3 < x < 7\}$
d) $\{x \in \mathbb{R} / x > 1, x \neq 3 \text{ e } x \neq 7\}$

43) (EEAR-2006) Dada a inequação $2 - x < 3x + 2 < 4x + 1$, o menor valor inteiro que a satisfaz é um número múltiplo de
a) 3. b) 2. c) 7. d) 5.

44) (EEAR-2004) A soma das raízes da equação $|2x - 3| = x - 1$ é
a) 1 b) 5/3 c) 10/3 d) 5

45) (EEAR-2004) A expressão que completa o conjunto $S = \{x \in \mathbb{R} / \ldots..\}$, solução das inequações $x^2 + 1 < 2x^2 - 3 \leq -5x$, é
a) $-2 < x \leq 1/2$ b) $1/2 \leq x < 2$
c) $-3 \leq x < -2$ d) $x < -2$ ou $x \geq 1/2$

46) (EEAR-2002) O maior número inteiro que satisfaz a inequação $\frac{2}{3}\left(\frac{x-1}{2}\right) - 1 \geq \frac{1}{2}(2x+3)$ é
a) -4 b) -3 c) -2 d) 3

47) (EEAR-2002) É par a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por
a) $f(x) = \frac{1}{x^2}$ b) $f(x) = \frac{1}{x}$
c) $f(x) = x$ d) $f(x) = x^5$

48) (EEAR-2002) Se $x \in Z$ e f(x) é uma função tal que $f(p + q) = f(p).f(q)$ e $f(2) = 2$, então f(0) e f(−2) são, respectivamente,
a) 1 e $\frac{1}{2}$ b) 0 e $\frac{1}{2}$ c) 1 e 0 d) 1 e −4

49) (EEAR-2002) A equação $|x|^2 + |x| - 6 = 0$
a) só tem uma solução.
b) tem duas soluções, tais que seu produto é = −6.
c) tem duas soluções, tais que seu produto é = −4.
d) tem duas soluções, tais que seu produto é igual a 0.

50) (EEAR-2000) Uma função quadrática tem o eixo das ordenadas como eixo de simetria. A distância entre os zeros da função é de 4 unidades, e a função tem −5 como valor mínimo. Esta função é definida por
a) $y = \frac{5}{4}x^2 - 20$ c) $y = \frac{5}{4}x^2 - 5$

b) $y = \frac{5}{4}x^2 - 20x$ d) $y = \frac{5}{4}x^2 - 5x$

51) (EEAR-2000) Determinando o domínio e o conjunto imagem da função $f(x) = \sqrt{x^2 - 1} + \sqrt{1 - x^2}$, obtemos:

a) $D = \Re - \{-1\}$ $Im = \Re$
b) $D = \Re - \{1\}$ $Im = \Re$
c) $D = \{-1, 1\}$ $Im = \{0\}$
d) $D = \{-1, 1\}$ $Im = \{1\}$

52) (EEAR-2000) Se $f(x) = ax + b$ é uma função linear, então, considerados 4 números reais p , q , r , e s ($p \neq q$, $r \neq s$), temos que a igualdade $\frac{f(q) - f(p)}{q - p} = \frac{f(s) - f(r)}{s - r}$

a) é sempre verdadeira.
b) só se verifica se p > q ou s > r.
c) só se verifica se q > p ou s > r.
d) nunca se verifica.

53) (EEAR-2000) Dada a função $f(x)$ definida para todo n inteiro, e sabendo-se que $f(0) = 1$ e $f(n + 1) = f(n) - 2$, o valor de $f(200)$ é

a) 201 c) $200^2 + 1$
b) 401 d) 1.020.000

54) (EEAR-2000) A solução da inequação $|x - 2| + |x - 4| \geq 6$, em $U = \Re$, é o conjunto:

a) $S = \{x \in \Re \mid x > 6\}$
b) $S = \{x \in \Re \mid x \leq 0\}$
c) $S = \{x \in \Re \mid x \leq 0 \text{ e } x \geq 6\}$
d) $S = \{x \in \Re \mid x \leq 0 \text{ ou } x \geq 6\}$

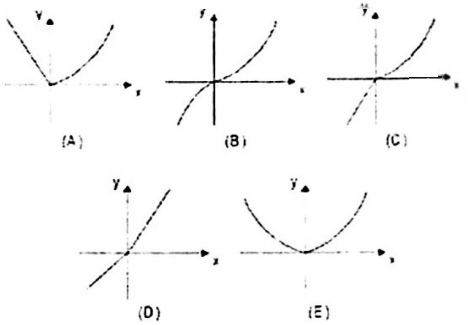
55) (EEAR-2003) Seja uma função f do 1.º grau. Se f(-1) = 3 e f(1) = 1, então o valor de f(3) é

a) – 1. b) – 3. c) 0. d) 2.

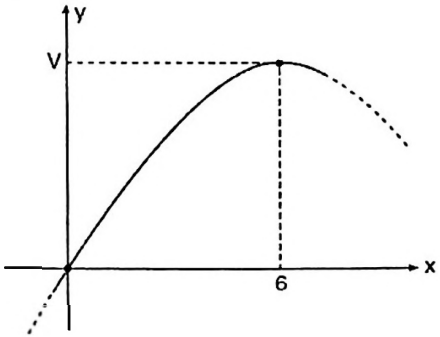
56) (ESPM-99) Um espião informa a seus contratantes a quantia que uma empresa concorrente pretende investir. A informação é codificada por meio das inequações $7.(m - 2) < 16m - 74$ e $m^2 - 81 < 0$, nas quais m indica a quantia em milhões de dólares. Dessas informações deduz-se que a concorrente pode investir, em dólares,

a) 9 200 000 b) 8 200 000
c) 6 200 000 d) 4 300 000
e) 3 300 000

57) (ESPM-99) Considere a função que a cada número real negativo associa seu dobro e a cada número real não negativo associa seu quadrado. Dos gráficos abaixo, o que MELHOR representa essa função é



58) (ESPM-2003) A figura ao lado representa parte do gráfico de uma função polinomial do segundo grau onde V é o valor máximo. Se f(2) + f(6) = 8, então f(7) vale:



a) 7 b) 6 c) 5 d) 4 e) 3

59) (ESPM-2002) Durante certa madrugada um estudante apaixonado por física percebeu que a temperatura externa na sua casa variou em função do tempo segundo a "lei" $C(t) = at^2 + bt + c$, $\{a, b, c\} \subset \mathbb{R}$ com a temperatura C medida em graus Celsius e o tempo t medido em horas, e assinalou alguns desses pares de valores na tabela indicada a seguir:

horário	0	1	2	3	4	5
temperatura	6°	-4°	t_1	t_2	t_3	-4°

Pergunta-se: (1) Que horas marcava o relógio no instante em que a temperatura foi a mais baixa?
(2) Qual era a temperatura no instante em que o relógio marcava 4 horas?

A) 2h, -6°

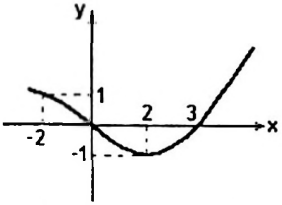
B) 2h e 30 min, -6°

C) 3h, -6°

D) 3h, -9°

E) 3h, -10°

60) (ESPM-2003) Seja y = f(x) uma função cujo gráfico está representado na figura abaixo. Pode-se afirmar que:



A) f(0) = 1 B) fof(0) = 1 C) fof(2) = 1
D) fof(3) = 1 E) f[2.f(2)] = 1

61) (ESPM-2000) Seja S o conjunto dos números inteiros que satisfazem à inequação $x^2 - 6x + 5 < 0$. É verdade que
(A) S é o conjunto vazio.
(B) S tem 5 elementos.
(C) dos elementos de S, o maior é o triplo do menor.
(D) dos elementos de S, o menor é um número ímpar.
(E) um dos elementos de S é um número quadrado perfeito.

62) (ESPM-2000) Suponha que o faturamento F, em reais, obtido na venda de n artigos seja dado por F = 2,5n e que o custo C, em reais, da produção dos mesmos n artigos seja C = 0,7n + 360. Nessas condições, para evitar prejuízo, o número mínimo de artigos que devem ser produzidos e vendidos pertence ao intervalo
(A) [194; 197] (B) [198; 203]
(C) [207; 217] (D) [220; 224]
(E) [230; 233]

63) (ESPM-2000) O valor do trinômio do segundo grau $-x^2 + 4x + k$ é negativo para todo número real x, se, e somente se,
(A) $2 < k < 5$ (B) $k > 4$ (C) $k = 0$
(D) $k < -4$ (E) $4 < k < 8$

64) (Fatec/SP-2001) As dimensões do retângulo de área máxima localizado no primeiro quadrante, com dois lados nos eixos cartesianos e um vértice sobre o gráfico de f(x) = 12 − 2x são:
a) 2 e 9 b) 3 e 6
c) $\sqrt{3}$ e $6\sqrt{3}$ d) $2\sqrt{2}$ e $\frac{9\sqrt{2}}{2}$
e) $3\sqrt{2}$ e $3\sqrt{2}$

65) (FEI-2000) A função $f(x) = x^2 + bx + c$, definida para qualquer valor real x, é nula para x = r ou x = 3r. Determine r sabendo-se que o valor mínimo de f(x) é − 9.
a) r = 0 ou r = 1 ou r = − 1
b) r = 3 ou r = − 3
c) r = 2
d) r = 4 ou r = − 4
e) r = 9 ou r = − 9

66) (FEI-2004) Se o vértice da parábola de equação $y = -2x^2 + kx + m$ é o ponto (− 1, 8), podemos afirmar que o valor de (k + m) é:
a) 2 b) − 2 c) − 1 d) 0 e) 1

67) (FGV-2002) Qual o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-3x+1}}$.

68) (FGV-2002) Uma fábrica de camisas tem um custo mensal dado por C = 5000 + 15x, onde x é o número de camisas produzidas por mês. Cada camisa é vendida por R$ 25,00. Atualmente, o lucro mensal é de R$ 2000,00. Para dobrar esse lucro, a fábrica deverá produzir e vender mensalmente:
a) o dobro do que produz e vende
b) 100 unidades a mais do que produz e vende
c) 200 unidades a mais do que produz e vende
d) 300 unidades a mais do que produz e vende
e) 50% a mais do que produz e vende

69) (FGV-2003) a) Dê o domínio da função $f(x) = \sqrt{\frac{x-1}{x^2-7x+12}}$.

b) Resolva a inequação: $\frac{2x-3x}{1-x} \geq 4$.

70) (FGV-2003) O custo diário de produção de um artigo é $C = 50 + 2x - 0{,}1x^2$, onde x é a quantidade diária produzida. Cada unidade do produto é vendida por R$ 6,50. Entre que valores deve variar x para não haver prejuízo?
a) $19 \le x \le 24$ b) $20 \le x \le 25$
c) $21 \le x \le 26$ d) $22 \le x \le 27$
e) $23 \le x \le 28$

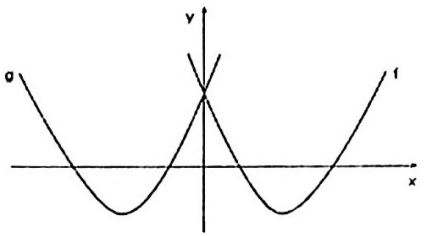
71) (FGV-2003) Quando uma pizzaria cobra R$ 14,00 por pizza, 80 unidades são vendidas por dia. Quando o preço é R$ 12,00 por pizza, 90 unidades são vendidas.
a) Admitindo que a quantidade vendida (y) seja função do 1° grau do preço (x), qual o preço que deve ser cobrado para maximizar a receita diária?
b) Se a relação entre y e x fosse $y = -4x + 160$, e o custo de cada pizza R$ 8,00, qual o preço que deveria ser cobrado para maximizar o lucro?

72) (FGV-2004) O valor de uma corrida de táxi é uma função polinomial do primeiro grau do número x de quilômetros rodados. Por uma corrida de 7 quilômetros, paga-se R$23,00 e por uma corrida de 10 quilômetros, paga-se R$32,00. Aplicando-se o valor de uma corrida de 90 quilômetros durante um mês à taxa de 10% ao mês, com o juro obtido será possível fazer uma corrida de táxi de
a) 8km. d) 9,6km.
b) 8,4km. e) 10km.
c) 9km.

73) (FGV-2004) Multiplicando os valores inteiros de x que satisfazem simultaneamente as desigualdades $|x - 2| \le 3$ e $|3x - 2| > 5$, obtemos
a) 12 b) 60 c) −12 d) −60 e) 0

74) (FGV-2004) Quando uma empresa cobra p reais por unidade de um produto fabricado, ela vende x unidades por mês. Sabe-se que p relaciona-se com x mediante a equação $x = 100 - 0{,}5p$. Para que a receita mensal de venda desse produto seja R$ 4.800,00, o preço cobrado, por unidade, pode ser p_1 ou p_2. A soma $p_1 + p_2$ vale:
a) R$160,00 d) R$220,00
b) R$180,00 e) R$200,00
c) R$240,00

75) (FGV-2005) Sejam f e g funções quadráticas, com $f(x) = ax^2 + bx + c$. Sabe-se que o gráfico de g é simétrico ao de f em relação ao eixo y, como mostra a figura.



Os pontos P e Q localizam-se nos maiores zeros das funções f e g, e o ponto R é o intercepto de f e g com o eixo y. Portanto, a área do triângulo PQR, em função dos parâmetros a, b e c da função f, é
a) (a − b)c/2 b) (a + b)c/2 c) − abc/2
d) − b.c/2a e) $c^2/2a$

76) (FGV-2005) Sabe-se que o custo por unidade de mercadoria produzida de uma empresa é dado pela função $C(x) = x + \frac{10000}{x} - 160$, onde C(x) é o custo por unidade, em R$, e x é o total de unidades produzidas. Nas condições dadas, o custo total mínimo em que a empresa pode operar, em R$, é igual a
a) 3600,00. b) 3800,00.
c) 4000,00. d) 4200,00.
e) 4400,00.

77) (FGV-2005) A soma dos valores inteiros de x que satisfazem simultaneamente as desigualdades: $|x - 5| < 3$ e $|x - 4| \ge 1$ é:
a) 25 b) 13 c) 16 d) 18 e) 21

78) (IBMEC-2003) Suponha que a quantidade mensal (d) que uma comunidade queira comprar de um determinado produto seja uma função do primeiro grau em termos do preço (p) do respectivo produto. Considere que nos últimos dois meses os preços praticados foram R$ 10,00 e R$ 20,00 e que as respectivas quantidades adquiridas pela comunidade foram 180 e 80 unidades do produto. O fabricante desse produto calcula que cada unidade produzida custa-lhe R$ 2,00, e que o custo fixo operacional mensal é de R$ 690,00 (isto é, independente da quantidade produzida, ele gasta R$ 690,00 para manter sua empresa funcionando).
a) Determine a fórmula que estabelece a função de d em termos de p.
b) Defina a função lucro total mensal (l) do fabricante como a função que, para cada preço p

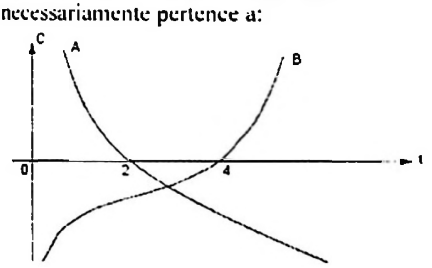
praticado, associa o resultado da receita total mensal (dada pelo produto do preço pela quantidade) subtraindo o custo total mensal (dado pela soma do custo fixo operacional mensal com o custo de produzir d unidades); e determine a fórmula da função l em termos de p.
c) Determine o preço que o fabricante deve praticar no próximo mês para que seu lucro total mensal seja o maior possível.

79) (IBMEC-2004) Considere

$$f(x) = x^2 - mx + \frac{3}{2}m - 2.$$

a) Determine os valores de m para os quais os gráficos de f(x) e |f(x)| sejam coincidentes.
b) Determine qual dos valores de m do item anterior maximiza a ordenada do vértice da parábola dada por f(x).

80) (IBMEC-2000) O gráfico a seguir mostra o comportamento (C) de dois processos industriais, A e B, ao longo do tempo (t). O departamento de engenharia determinou que só são viáveis os valores de t para os quais A(t).B(t) > 0. Então, t necessariamente pertence a:



a) [2, 4] b)]0, 2[∪]4, + ∞[c)]2, 4[
d)]0, 2[e)]4, + ∞[

81) (IBMEC-2000) Seja a função definida no conjunto de todos os inteiros x por:

$$f(x) = \begin{cases} x + 1, & \text{se } x > 5 \\ f(f(x + 2)), & \text{se } x \le 5 \end{cases}$$

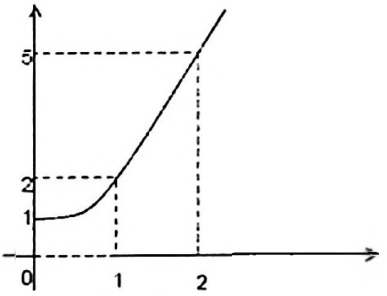
Logo, o valor de f(1) é igual a:
a) 5 b) 7 c) 8 d) 9 e) 11

82) (IBMEC-2000) Determine o conjunto dos valores de x que satisfazem a inequação:

$$\frac{x^2 - 5x + 6}{x + 4} \ge 4$$

83) (IBMEC-2001) Uma concessionária de automóveis, deseja construir uma estufa de pintura de formato retangular. Parte de uma parede já existente será utilizada como um dos lados da estufa, para os outros três lados serão utilizados 80 metros de lona plástica, de modo a produzir a área máxima. Determine as dimensões dessa estufa.

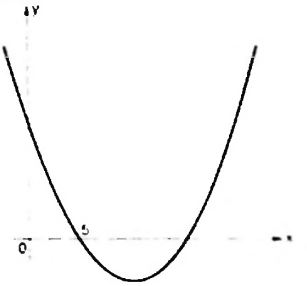
84) (IBMEC-2002) Considere a função f com Domínio D= {x ≻ 0} e Imagem Im = {y ≻ 1} cujo gráfico está representado abaixo. Sabendo que o gráfico de f é um trecho de parábola, determine:



a) A equação da função f.
b) O Domínio e a Imagem de $f^{-1}(x)$, inversa da função f, sua equação e faça um esboço de seu gráfico.

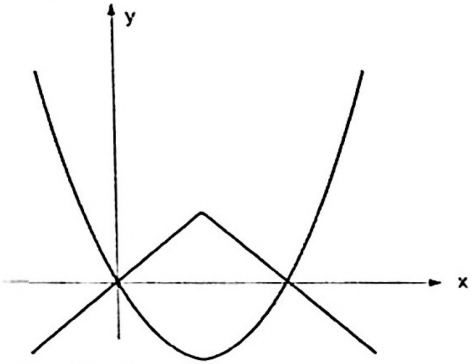
85) (IBMEC-2002) Um proprietário de um estacionamento notou que quando o preço do estacionamento era R$ 9,00, em média 30 carros estacionavam e que, para cada redução de R$ 1,00 no preço, o número de carros que estacionava aumentava em 10. Qual deve ser o preço cobrado para que a receita seja máxima? Justifique.

86) (Mackenzie-2000) Na figura, temos o gráfico de $f(x) = ax^2 + bx + c$. Então $f(5) + f\left(\frac{c}{5a}\right)$ é sempre igual a



a) 5 − b b) − b/a c) 0
d) (a + b)/5 e) b/5

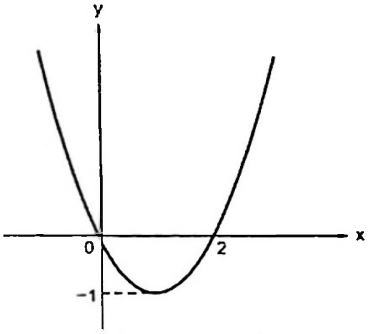
87) (Mackenzie-2000) Na figura, temos os esboços dos gráficos de $f(x) = x^2 - 4x$ e $g(x) = -x + a + b$.



Então g (5) vale:
a) – 3 b) – 4 c) – 2 d) – 1 e) – 5

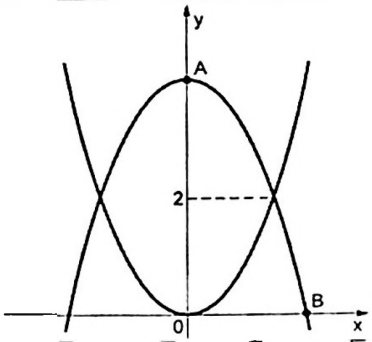
88) (Mackenzie-2001) Se $2x^2 - ax + 2a > 0$, qualquer que seja $x \in \mathbb{R}$, o maior valor inteiro que a pode assumir é:
a) 15 b) 16 c) 18 d) 20 e) 22

89) (Mackenzie-2002) A figura mostra o gráfico da função $f(x) = ax^2 + bx + c$, sendo -1 o seu mínimo. Se $g(x) = 3x - f(x)$, então $f(3) + g(2)$ vale:



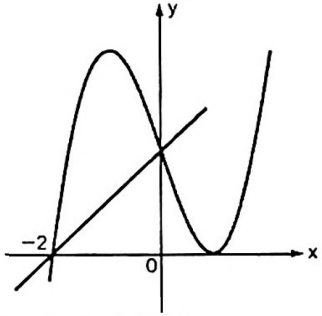
a) −6 b)2 c)−3 d) 6 e) 9

90) (Mackenzie-2003) A figura mostra os gráficos de $y = x^2$ e $y = -x^2 + p$. A medida de AB é:



a) $2\sqrt{5}$ b) $4\sqrt{5}$ c) $\sqrt{6}$ d) $3\sqrt{6}$ e) $5\sqrt{2}$

91) (Mackenzie-2003) Considere os esboços dos gráficos das funções $g(x) = x^3 + c.x - 2$ e $f(x) = a.x + b$, dados na figura.



O valor de f(g(2)) é:
a) 2 b) 5 c) 4 d) 3 e) 6

92) (PUC/MG-97) Considere os conjuntos $A = \{x \in Z / |x + 1| < 5\}$ e $B = \{x \in Z / |x| > 3\}$. O número de elementos do conjunto $A \cap B$ é:
a) 2 b) 4 c) 8 d) 9 e) 11

93) (PUC/MG-2000) O conjunto solução da desigualdade $|x - 1| \leq 2$ é $S = \{x \in \mathbb{R} / a \leq x \leq b\}$. O valor de $b - a$ é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

94) (PUC/RS-99) O lucro de uma empresa imobiliária, em um certo período de tempo, é dado em milhões de reais por $L(x) = 5.(x - 4).(8 - x)$, onde x representa o número de lotes vendidos. Para que a empresa tenha lucro máximo, o número de lotes vendidos nesse período deve ser igual a
a) 2 b) 3 c) 6 d) 7 e) 8

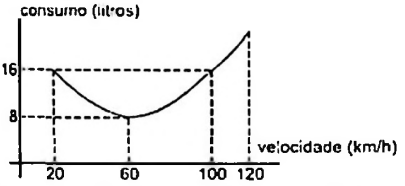
95) (PUC/RS-99) Seja f a função definida por $f(x) = \begin{cases} -x^2 & \text{se } x < 0 \\ 1 - x & \text{se } x \geq 0 \end{cases}$. Nestas condições, f(f(2)) é igual a

A) 2 B) 1 C) 0 D) – 1 E) – 2

96) (PUC/SP-2000) Se x e y são números reais tais que 2x + y = 8, o valor máximo do produto x.y é

A) 24 B) 20 C) 16 D) 12 E) 8

97) (PUC/SP-2001) Um veículo foi submetido a um teste para a verificação do consumo de combustível. O teste consistia em fazer o veículo percorrer, várias vezes, em velocidade constante, uma distância de 100 km em estrada plana, cada vez a uma velocidade diferente. Observou-se então que, para velocidades entre 20 km/h e 120 km/h, o consumo de gasolina, em litros, era função da velocidade, conforme mostra o gráfico seguinte.



Se esse gráfico é parte de uma parábola, quantos litros de combustível esse veículo deve ter consumido no teste feito à velocidade de 120 km/h?

a) 20 b) 22 c) 24 d) 26 e) 28

98) (PUC/SP-2003) Ao levantar dados para a realização de um evento, a comissão organizadora observou que, se cada pessoa pagasse R$ 6,00 por sua inscrição, poderia contar com 460 participantes, arrecadando um total de R$ 2 760,00. Entretanto, também estimou que, a cada aumento de R$ 1,50 no preço de inscrição, receberia 10 participantes a menos. Considerando tais estimativas, para que a arrecadação seja a maior possível, o preço unitário da inscrição em tal evento deve ser

a) R$ 15,00 b) R$ 24,50
c) R$ 32,75 d) R$ 37,50
e) R$ 42,50

99) (PUC/SP-2004) Quantos números inteiros e estritamente positivos satisfazem a sentença $\frac{1}{x-20} \leq \frac{1}{12-x}$?

A) Dezesseis. D) Treze.
B) Quinze. E) Menos que treze.
C) Quatorze.

100) (UECE-2000) As funções $f(x) = \frac{1}{x}$ e $g(x) = \frac{1}{x-1}$ (onde $x \in R$, $x \neq 0$ e $x \neq 1$) são tais que:

a) (f o g)(x) = (g o f)(x)
b) (f o g)(x) é sempre positivo
c) (f o g)(x) . (g o f)(x) = –x
d) (f o g)(x) . (g o f)(x) = x . (x – 1)

101) (UECE-2002) Se f é a função real de variável real, tal que f(2x + 1) = x para todo x, então 2f(x) + 3 é igual a:

a) x + 2 b) x + 1 c) x d) x – 1

102) (UECE-2003) Considere as funções reais f(x) = x + a e g(x) = x^2 + x + b, com a,b ≠ 0. O valor de x para o qual se tem f(g(x)) = g(f(x)) é:

a) $\frac{a+b}{2}$ b) 2ab c) $\frac{b}{2}$ d) $-\frac{a}{2}$

103) (UECE-2003) O conjunto $\{x \in R \mid x.(x+1)^2 \geq x\}$ é igual a:

a) R b) R – {–1} c) [–2, + ∞) d) [1, + ∞)

104) (UECE-2004) Se f:R→R é uma função tal que f(a + b) = f(a) + f(b) – a.b, para quaisquer números reais a e b, e f(2) = 3, então f(11) é igual a:

a) 33 b) 44 c) 55 d) 66

105) (UECE-2004) Sejam f:R → R e g:R→R funções cujos gráficos são retas tangentes à parábola y = $-x^2$. Se f(0) = g(0) = 1 então a função h(x) = f(x)g(x) é igual a:

a) 1 – $4x^2$ b) 1 + $4x^2$
c) 1 – $2x^2$ d) 1 + $2x^2$

106) (UECE-2005) Seja f:R → R a função definida por $f(x) = \begin{cases} 1 + x^2, \text{ se } x \text{ é racional} \\ 1 - x^2, \text{ se } x \text{ é irracional} \end{cases}$

O valor de $f(0,1) + f(1-\sqrt{2}) + f(2^{-1})$ é:

a) $0,26 + 2\sqrt{2}$ b) $2,26 + 3\sqrt{2}$
c) $3,25 + \sqrt{2}$ d) $0,25 + 3\sqrt{2}$

107) (UECE-2005) Em relação à equação $|x^2 + x| = x - 4$ é possível afirmar-se, corretamente, que ela
a) admite exatamente duas soluções reais
b) admite exatamente uma solução, que é real
c) admite duas soluções, sendo uma real e uma complexa (não real)
d) não admite soluções reais

108) (UEL-2005) Seja f(n) uma função definida para todo n inteiro tal que $\begin{cases} f(2) = 2 \\ f(p+q) = f(p).f(q) \end{cases}$ onde p e q são inteiros. O valor de f(0) é:
a) – 1 b) 0 c) 1 d) $\sqrt{2}$ e) 2

109) (UEL-2005) Seja $f: A \to B$ uma função e D um subconjunto de A. A imagem de D pela função f é o conjunto definido e denotado por $Im(D) = \{y \in B : existe\ x \in D \text{ tal que } f(x) = y\}$. Quando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, for definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se} \quad x > 1 \\ 1 & \text{se} \quad -1 \le x \le 1 \\ -x + 1 & \text{se} \quad x < -1 \end{cases}$$

a imagem do intervalo fechado $[-1, 3]$, isto é, $Im([-1, 3])$ é dada por:
a) $\{1\} \cup \{y \in \mathbb{R}: 3 < y \le 5\}$
b) $\{y \in \mathbb{R}: 3 < y \le 5\}$
c) $\{1\} \cap \{y \in \mathbb{R}: 3 \le y \le 5\}$
d) $\{y \in \mathbb{R}: y \ge 3\}$
e) $\{y \in \mathbb{R}: -2 < y \le 5\}$

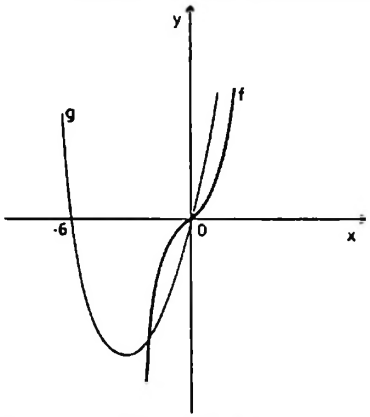
110) (UEPA-Prise-2004) Após uma cobrança de falta, uma bola de futebol descreveu uma trajetória parabólica. Observou-se que a altura h, em metros, da bola variava de acordo com o tempo t, em segundos, após o chute. Considerando que a bola foi chutada do solo no instante t = 0 segundos e que a altura máxima atingida por ela foi de 4m após 2 segundos do chute, qual a lei matemática que define esta função?
a) $h(t) = -t^2 + 4t$ b) $h(t) = -t^2 - 4t$
c) $h(t) = -4t^2 + 2t$ d) $h(t) = -2t^2 + 4t$
e) $h(t) = -2t^2 - 4t$

111) (UEPA-Prise-2004) O conjunto solução da equação $|x|^2 - 2|x| - 3 = 0$ é igual a:
a) S = {-1, 3} b) S = {-3, 3} c) S = {-1, 1}
d) S = {-3, 1} e) S = {1, 3}

112) (UEPA-Prise-2005) Ao chutar uma lata, um cientista observou que sua trajetória seguiu a lei matemática $h(t) = 6 + 4t - t^2$, na qual h é a altura, em metros, atingida pela lata em função do tempo t, em segundos, após o chute. Com base nesta situação e analisando as afirmativas a seguir:
I. O gráfico que traduz a função acima descrita é uma parábola com concavidade voltada para cima.
II. A altura máxima atingida por essa lata é de 10m.
III. Essa função possui duas raízes reais.
É correto afirmar que:
a) todas as afirmativas são verdadeiras
b) todas as afirmativas são falsas
c) somente a afirmativa I é falsa
d) somente a afirmativa II é verdadeira
e) somente a afirmativa III é verdadeira

113) (UEPA-Prise-2005) Patrícia está paquerando três colegas: Ricardo, Paulo e Maurício. Para conhecer um pouco sobre suas personalidades recorreu ao zodíaco. Ficou sabendo que Ricardo é do signo de Áries, Paulo é de Leão e Maurício, de Virgem. Considerando A o conjunto formado por esses colegas de Patrícia e B o conjunto dos 12 signos do zodíaco, é correto afirmar que a relação de A em B:
a) não representa uma função.
b) representa uma função somente injetora.
c) representa uma função somente sobrejetora.
d) representa uma função bijetora.
e) representa uma função não injetora e nem sobrejetora.

114) (UERJ-2003) No gráfico abaixo, estão representadas as funções reais $f(x) = x^3$ e $g(x) = ax^2 + bx + c$.



Sabendo que f(3) = g(3), determine o conjunto-solução da inequação f(x) ≥ g(x).

115) (UENF-2005) Considere as seguintes funções, relativas a uma ninhada de pássaros: C = 5 + 10n; C = custo mensal, em reais, para manutenção de n pássaros V = – 5n² + 100n – 320; V = valor mensal arrecadado, em reais, com a venda de n pássaros, para 4 ≤ n ≤ 16.
Sabe-se que o lucro mensal obtido é determinado pela diferença entre os valores de venda V e custo C.
A) Determine os possíveis valores de n, para que haja lucro nas vendas.
B) Calcule o valor de n que proporciona o maior lucro possível e o valor, em reais, desse lucro.

116) (UERJ-2001) O volume de água em um tanque varia com o tempo de acordo com a seguinte equação:

$$V = 10 - |4 - 2t| - |2t - 6|,\ t \in \mathbb{R}.$$

Nela, V é o volume medido em m^3 após t horas, contadas a partir de 8h de uma manhã. Determine os horários inicial e final dessa manhã em que o volume permanece constante.

117) (UERJ-2002) Considere a função $f\left(\sqrt[3]{\frac{x+3}{2}}\right) = 2x^2 - 18$.

a) Determine suas raízes.

b) Calcule $\frac{f(1) + f(-1)}{2}$.

118) (UFAC-2001) Se f: A⊂ IR → IR é uma função real. Uma das afirmações abaixo caracteriza que f é crescente. Qual é ela ?

a) $x > y \Rightarrow f(x) < f(y)$, para todos x, y em A
b) $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$, para todos x, y em A
c) Dado $y \in \mathbb{R}$, existe x em A tal f(x) = y
d) Para todos x, y em A, f (x) = f(y)
e) $x > y \Rightarrow f(x) > f(y)$, para todos x, y em A

119) (UFAC-2002) O gerente de uma loja anuncia a seguinte promoção: para uma compra de até R$ 300,00, nenhum desconto. Nas compras acima de R$ 300,00, desconto de 20% sobre o que exceder a esse valor. A função f que fornece o valor a pagar f(x), em reais, para uma compra x ≥ 0, em reais, é

a) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 300 \\ 80 + \frac{4}{5}x & \text{se } x > 300 \end{cases}$

b) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 300 \\ 60 + \frac{3}{5}x & \text{se } x > 300 \end{cases}$

c) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 300 \\ 80 + x & \text{se } x > 300 \end{cases}$

d) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 300 \\ 70 + \frac{4}{5}x & \text{se } x > 300 \end{cases}$

e) $f(x) = \begin{cases} x & \text{se } x \leq 300 \\ 60 + \frac{4}{5}x & \text{se } x > 300 \end{cases}$

120) (UFAC-2003) A condição sobre p de modo que a equação $px^2 + x + 1 = 0$ tenha duas raízes reais e distintas é:

a) $p < \frac{1}{4}$ b) $p > \frac{1}{4}$ c) $p < \frac{1}{4}$ e $p \neq 0$

d) $p = \frac{1}{4}$ e) $p = 0$

121) (UFAL-2002) Seja f a função de IR em IR dada por $f(x) = \sqrt{(2-x)^2}$. Determine o conjunto solução de $-1 \leq f(x) \leq 9$.

122) (UFAL-2003) Tendo por base a função f, de IR em IR, dada por f(x) = |x – 1| + 3, analise as afirmativas seguintes.
0 0 – Uma outra forma de expressar a lei que define f é $f(x) = \begin{cases} x + 2 & \text{se } x \geq 0 \\ -x + 4 & \text{se } x < 0 \end{cases}$
1 1 – O conjunto imagem de f é o intervalo [3, + ∞[
2 2 – f é crescente no intervalo] – ∞, 1[

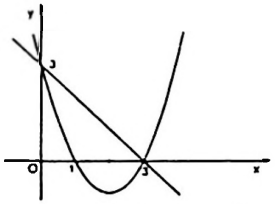
3 3 – Se f(x) < 6, então – 2 < x < 4
4 4 – O gráfico de f intercepta o eixo das abscissas no ponto (1; 0)

123) (UFAL-2003) Seja a função f, de [– 2, 4] em IR, definida por

$f(x) = \begin{cases} 3x + 2, & \text{se } -2 \le x \le 1 \\ 2x^2 - 8x, & \text{se } 1 < x \le 4 \end{cases}$. Determine o conjunto imagem de f.

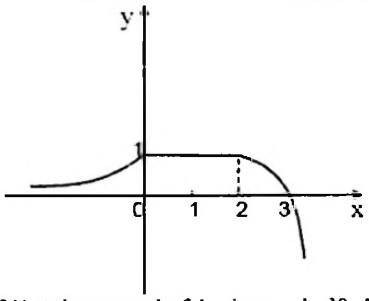
124) (UFBA-99) Sobre a função real, de variável real, $f(x) = \frac{x^2 - 1}{x + 3}$, pode-se afirmar:
(01) O domínio da f é R.
(02) O gráfico da f intercepta o eixo Ox no ponto (– 1, 0).
(04) $\frac{2f(-2)}{f(1)} = 6$
(08) Se $f(x) = 3$, então $x \in \{-2, 2, 5\}$.
(16) $f(x)$ e $g(x) = \frac{x^3 - x}{x^2 + 3x}$ são funções iguais
(32) Sendo $g(x) = 3x + 1$, $g(f(x)) = \frac{x\, g(x)}{x + 3}$.

125) (UFBA-2000) Sendo $f(x) = x^2 + bx + c$ e $g(x) = mx + n$ funções reais cujos gráficos estão representados ao lado, pode-se afirmar:

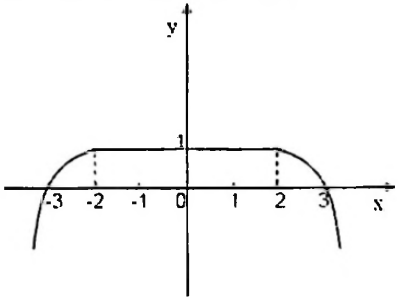


(01) A imagem de f é $\left[-\frac{1}{2}, +\infty\right[$.
(02) f(–2) = 15
(04) A solução da inequação $f(x) \le 3$ é [0, 4].
(08) g(4) = – 1
(16) A solução da inequação $|g(x)| \ge 3$ é $]-\infty, 0] \cup [6, +\infty[$.
(32) $f(g(x)) = x^2 - 2x$
(64) $g^{-1}(x) = x - 3$

126) (UFBA-2001) Com base no gráfico da função f: R → R, representada ao lado, pode-se afirmar:

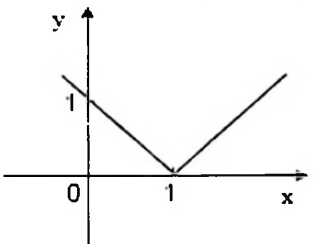


(01) A imagem de f é o intervalo]0, 1].
(02) A equação f(x) = 1 tem infinitas soluções.
(04) A equação $f(x) = \sqrt{2}/2$ não tem solução.
(08) A função f admite inversa.
(16) O ponto (0, 2) pertence ao gráfico de g(x) = 1 + f(x + 1).
(32) O gráfico da função f(|x|) é



127) (UFBA-2001) Considere as funções reais f e g, tais que
- $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, tem apenas uma raiz real, seu gráfico tem por eixo de simetria a reta x = 1 e passa pelo ponto (2, 1).
- $g(x) = mx + n$ e $g(f(x)) = -x^2 + 2x$

Nessas condições, pode-se afirmar:
(01) O gráfico da função $h(x) = \sqrt{f(x)}$ é



(02) $g^{-1}(x) = g(x)$
(04) A equação f(|x|) = 0 tem 4 raízes distintas.
(08) O conjunto-solução da inequação $f(x) - |g(x)| \ge 0$ é $]-\infty, 0] \cup [2, +\infty[$.

(16) A função r(x) = f(g(x)) é crescente para $x \leq 0$.

128) (UFBA-2002) Considerando-se as funções f : R → R e g : R → R definidas pelas equações $f(x) = |2x^2 - 2x| + 7x$ e $g(x) = x^3 + 2x^2 - 4x$, é correto afirmar:
(01) O gráfico de g intercepta o eixo das abscissas em dois pontos.
(02) O valor de f(1/2) é igual a 4.
(04) Se $x \leq 0$ ou $x \geq 1$, então $f(x) = 2x^2 + 5x$.
(08) A equação f(x) = g(x) tem uma única solução negativa.
(16) Existe $x < 0$, tal que $g(x) > 0$.

129) (UFBA-2002) Uma microempresa fabrica um determinado bem de consumo e o coloca à venda, no mercado. O custo de fabricação do produto é composto de uma parcela fixa, correspondendo a R$300.00, e mais R$3.00 por unidade fabricada. A quantidade vendida depende do preço da unidade e obedece à lei de uma função afim. Quando o preço da unidade é de R$6,00, são vendidas, mensalmente, 200 unidades do produto. Aumentando-se o preço em R$2.00 por unidade, passam a ser vendidas 100 unidades mensais. Com base nessas informações, pode-se concluir:
(01) A quantidade vendida em relação ao preço unitário é uma função decrescente.
(02) Se o preço unitário for de R$3,00, 250 unidades serão vendidas.
(04) O custo de fabricação de 1000 unidades do produto é igual a R$3300.00.
(08) A receita máxima pela venda do produto é igual a R$1250.00.
(16) Sendo L(x) o lucro em função das unidades vendidas, então $L(x) = -0.02x^2 + x - 100$.
(32) Quando o preço unitário se situar entre R$6,50 e R$9,00, o lucro será crescente.

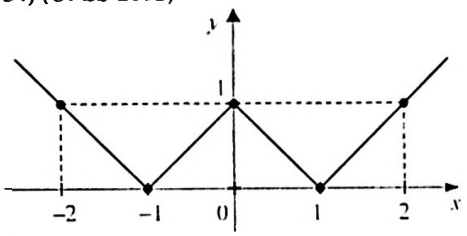
130) (UFC-2004) As raízes da equação $x^2 - px + q = 0$, onde p e q são constantes, são os cubos das raízes da equação $x^2 + x + 1 = 0$. Determine os valores de p e q.

131) (UFC-2004) A soma dos inteiros que satisfazem a desigualdade $|x - 7| > |x + 2| + |x - 2|$ é:
A) 14 B) 0 C) –2 D) –15 E) –18

132) (UFC-2004) Considere a função $f(x) = \frac{cx}{dx + 3}$, definida para todo número real x tal que $dx + 3 \neq 0$, onde c e d são constantes reais. Sabendo que $f(f(x)) = x$ e $f^{(5)}(3) = f(f(f(f(f(3))))) = -3/5$, podemos afirmar que $c^2 + d^2$ é igual a:
a) 5 b) 25 c) 61 d) 113 e) 181

133) (UFC-2000) (UFC-2000) Sejam a, b, c e d números reais com $a \neq b$ e $c \neq d$. Suponha que f: [a, b]→[c, d] é uma função estritamente crescente (isto é, $x_1 < x_2 \Leftrightarrow f(x_1) < f(x_2)$) e sobrejetiva. Então podemos afirmar corretamente que:
a) $f\left(\frac{a+b}{2}\right) = \frac{c+d}{2}$ b) f(a) = c e f(b) = d
c) f(a) + f(b) ∈ [c, d] d) f(b) – f(a) ∈ [c, d]
e) |f(a)| < |f(b)|

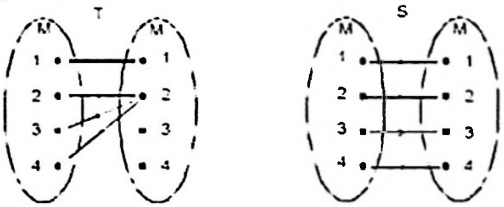
134) (UFES-2002)



O gráfico acima representa a função
a) $f(x) = \big||x| - 1\big|$
b) $f(x) = |x - 1| + |x + 1| - 2$
c) $f(x) = \big||x| + 2\big| - 3$
d) $f(x) = |x - 1|$
e) $f(x) = \big||x| + 1\big| - 2$

135) (UFES-2003) Dada a função $f(x) = \frac{x(x-1)}{2}$, pode-se afirmar que, para todo $x \neq -2$ e $x \neq 0$, f(x + 2) é igual a
A) $\frac{f(x) + f(2)}{x}$ b) $\frac{f(x+1)}{x(x+2)}$ c) $\frac{f(x)}{x(x+2)}$
d) $\frac{(x+2) + f(x)}{x}$ e) $\frac{(x+2)f(x+1)}{x}$

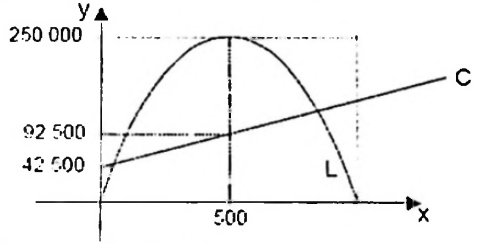
136) (UFF-2001) Sejam T: M → M e S: M → M as funções representadas a seguir.



Com respeito à função composta ToS, tem-se:
a) ToS(3) = S(3) d) ToS(1) = S(3)
b) ToS(3) = T(2) e) ToS(2) = T(1)
c) ToS(4) = ToS(1)

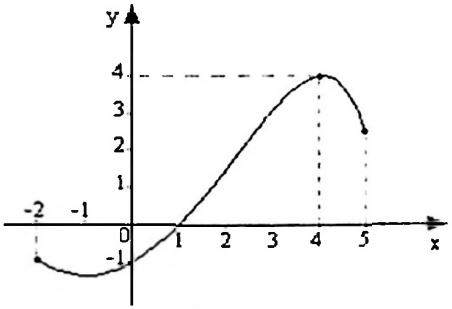
137) (UFG-2001) Considere a equação $x + \sqrt{x^2 + x + m} = m$, onde m é um número real.
a) Para m = −1, determine a raiz real da equação.
b) Determine o conjunto dos valores de m, para os quais a equação possui uma raiz real.

138) (UFG-2003) Seja x a quantidade de produtos fabricados por uma empresa. A parábola L e a reta C, conforme figura abaixo, são os gráficos das funções L(x), que representa o lucro total da empresa, e C(x), que representa o custo de produção e comercialização do produto.



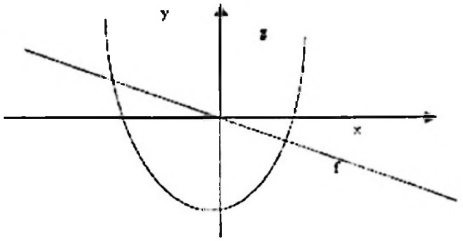
Se o lucro líquido é o lucro total menos o custo de produção e comercialização,
a) calcule o intervalo de variação da produção em que a empresa terá lucro;
b) esboce o gráfico do lucro líquido.

139) (UFJF-2003) A figura abaixo representa, no plano cartesiano, o gráfico de uma função y = f(x) definida no intervalo [-2, 5].



Com base nesse gráfico, é incorreto afirmar que:
a) f'(4) > f'(5).
b) o conjunto imagem de f' contém o intervalo [−1,4].
c) f'(x) < 0 se − 2 ≤ x ≤ 0.
d) f'(f(1)) = 0.
e) o conjunto {x∈[−2,5] | f'(x) = 3} possui exatamente dois elementos.

Responda às duas questões abaixo, observando os gráficos das duas funções f e g de IR em IR, respectivamente, do 1° e 2° graus, representados abaixo.



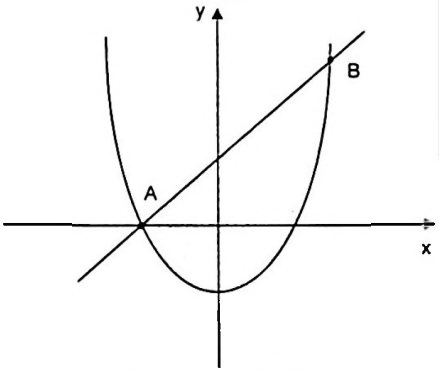
140) (UFJF-2004) Sobre a função h = f + g de IR em, definida por h(x) = f(x) + g(x), é CORRETO afirmar que:
a) possui ponto de máximo.
b) possui ponto de mínimo.
c) é uma função crescente.
d) é uma função decrescente.
e) é uma função constante.

141) (UFJF-2004) Sobre a função h = fog de IR em IR, definida por h(x) = f(g(x)), é CORRETO afirmar que:
a) possui ponto de máximo.
b) possui ponto de mínimo.
c) é uma função crescente.
d) é uma função decrescente.
e) é uma função constante.

142) (UFJF-2005) O conjunto-verdade da inequação $2x^2 - 7x + 3 \leq 0$ é:
a) $\{x \in IR / x \geq 1/2\}$.
b) $\{x \in IR / 1/2 < x < 3\}$.
c) $\{x \in IR / 1 \leq x \leq 6\}$.
d) $\{x \in IR / x > 1\}$.
e) $\{x \in IR / 1/2 \leq x \leq 3\}$.

143) (UFLA-2001) O conjunto de todos os valores reais de X, para os quais o gráfico de $P(X) = 8 - X^2$ está acima do gráfico de $Q(X) = 3X^2$ (isto é, $P(X) > Q(X)$) é
a) $-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}$ b) $X > \sqrt{2}$
c) $0 \leq X < \sqrt{2}$ d) $-2 < X < 2$
e) $-2 \leq X \leq 2$

144) (UFLA-2002) O desenho representa os gráficos de $f(x) = x + 1$ e $g(x) = x^2 - 1$.



A alternativa INCORRETA é:
a) as coordenadas do ponto B são (2, 3)
b) a área hachurada é definida pelos pontos (x, y), com $g(x) \leq y \leq f(x)$ e $-1 \leq x \leq 2$
c) O valor mínimo assumido pela função g(x) é -1
d) $f(x) + g(x) \geq 0$ para todo x
e) $f(0) + g(0) = 0$

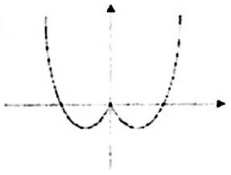
145) (UFLA-2002) Sendo a e b as raízes da equação $2x^2 - 5x + m = 3$ e $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} = \frac{4}{3}$, calcule o valor de m.

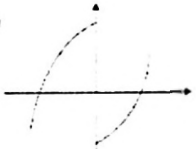
146) (UFLA-2003) A equação $2x^2 - (2m^2 - 14)x + m - 3 = 0$ tem duas raízes, sendo que uma delas é nula. A outra raiz é
a) igual a 3
b) igual a 2
c) igual a 14
d) também igual a zero
e) igual a -3

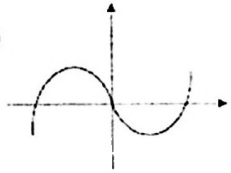
147) (UFLA-2003) Determine os valores de m para que a equação $(m + 1)x^2 - 2mx + (m - 1) = 0$ tenha uma raiz positiva e outra negativa.

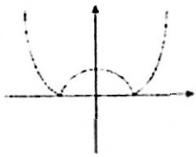
148) (UFLA-2003) Seja R(x) a razão entre as expressões $P(x) = 2x^2 + 4x - 30$ e $Q(x) = -3x^2 - 3x + 36$. Para quais valores de x, R(x) é negativa?
a) $(-5, -4)$
b) $(-\infty, -5) \cup (-4, \infty)$
c) $(-5, -4) \cup (-4, 3)$
d) $(-4, 3) \cup (3, \infty)$
e) $(-\infty, -5) \cup (3, \infty)$

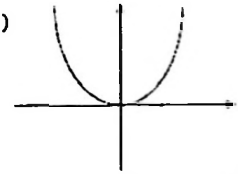
149) (UFLA-2005) A representação gráfica da função $y = x^2 - |x|$ é

a)


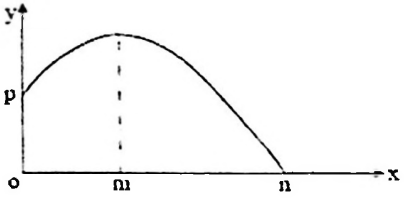
b)


c)


d)


e)


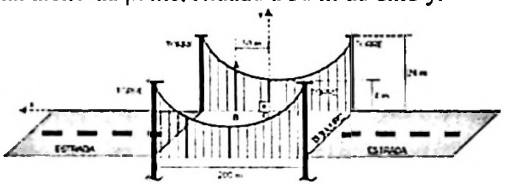
150) (UFLA-2005) Ao adicionar certa quantidade x de fertilizante nitrogenado ao solo, plantas de uma determinada espécie reagem a esse fertilizante, apresentando um desenvolvimento em altura y, conforme representado ao lado.



O valor p corresponde à altura das plantas quando nenhuma quantidade de fertilizante é adicionada, e m é a quantidade de fertilizante com a qual as plantas atingem altura máxima. Acima de m, o fertilizante passa a ter ação tóxica, sendo que em n, as plantas não chegam a crescer. Supondo que a relação entre y e x se dá através da função $y = -0{,}02x^2 + 0{,}2x + 1{,}5$, sendo y expresso em metros e x, em dezenas de quilos por hectare, então, os valores de p, m e n são, respectivamente

a) –5 ; 5 ; 15 b) 0 ; 10 ; 20
c) 1,5 ; 5 ; 15 d) 0 ; 7,5 ; 15
e) 1,5 ; 5 ; 20

151) (UFMA-2003) Os cabos da ponte pênsil, indicada na figura abaixo, tomam a forma de arcos de parábola do segundo grau. As torres de suporte têm 24 m de altura e há um intervalo entre elas de 200 m. O ponto mais baixo de cada cabo fica a 4 m do leito da estrada. Considerando o plano horizontal do tabuleiro da ponte contendo o eixo dos x e o eixo de simetria da parabola como sendo o eixo dos y, perpendicular a x, determine o comprimento do elemento de sustentação BA , que liga verticalmente o cabo parabólico ao tabuleiro da ponte, situado a 50 m do eixo y.



152) (UFMA-2003) Sendo f uma função par e g uma função ímpar e sabendo-se que $f(-\pi) = \sqrt{2}$ e $g(-\sqrt{2}) = \pi$, pode-se concluir que $(fog)(\sqrt{2})$ é igual a:

a) $\sqrt{2}$ b) $-\pi$ c) $-\sqrt{2}$ d) π e) $\pi\sqrt{2}$

153) (UFMG-97) Dadas duas funções f e g, pode-se calcular f(g(x)) desde que x pertença ao domínio de g, e g(x) pertença ao domínio de f.

A) Sejam f(x) = 5 e g(x) = x – 3. **CALCULE** g(f(x)) e f(g(x)).

B) Sejam $f(x) = \dfrac{1}{x+3}$ e $g(x) = \dfrac{18}{x-2}$.

DETERMINE o conjunto D de todos os valores de x para os quais f(g(x)) pode ser calculado e **DETERMINE** a expressão de f(g(x)).

154) (UFMG-97) Considere um retângulo de base 39. Suas dimensões são alteradas de modo que, a cada redução de x em sua base, com $x \geq 0$, obtém-se um novo retângulo de área dada por $A(x) = 936 + 15x - x^2$

A) **MOSTRE** que, para $0 \leq x < 39$, a altura de cada um desses retângulos pode ser escrita na forma $h(x) = ax + b$ e **DETERMINE** a e b.

B) Dentre esses retângulos, **DETERMINE** as dimensões do que tem área máxima.

155) (UFMG-97) O ponto de coordenadas (3, 4) pertence à parábola de equação $y = ax^2 + bx + 4$. A **abscissa do vértice** dessa parábola é

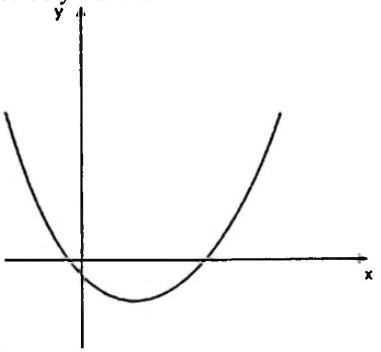
A) $\frac{1}{2}$ B) 1 C) $\frac{3}{2}$ D) 2

156) (UFMG-97) Para um número real fixo a, a função f(x) = ax – 2 é tal que f(f(1)) = -3.
O valor de a é
A) 1 B) 2 C) 3 D) 4

157) (UFMG-98) A) **DETERMINE** o valor de c para que a função dada por $f(x) = \dfrac{(x^2+1)(x+4)}{cx+2}$ satisfaça a igualdade f(1) = f(2).

B) Para o valor de c obtido no item anterior, **DETERMINE** todos os valores de x para os quais $f(x) \geq 0$.

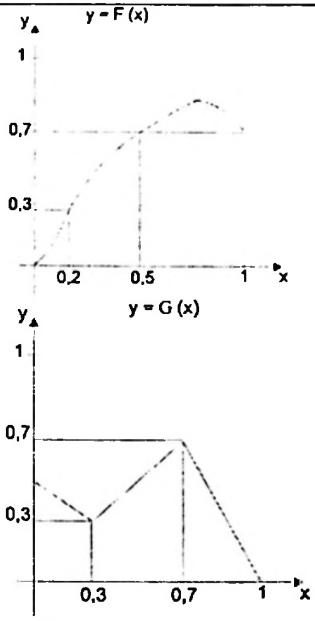
158) (UFMG-99) Observe a figura, que representa o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$.



Assinale a **única** afirmativa **FALSA** em relação a esse gráfico.

A) ac é negativo. B) $b^2 - 4ac$ é positivo.
C) b é positivo. D) c é negativo

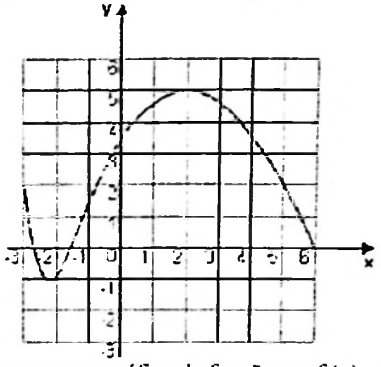
159) (UFMG-99) Observe as figuras.



Nessas figuras, estão representados os gráficos das funções y = F(x) e y = G(x), definidas no intervalo [0,1]. O gráfico de y = G(x) é formado por segmentos de reta.
Assinale a **única** afirmativa **FALSA** em relação a essa situação.
A) G (F(x)) = F (x) para todo x ∈ [0,2 , 0,5].
B) G (F(0.5)) ≥ G (F(x)) para todo x ∈ [0,1].
C) G (F(0,1)) > G (F(0.2)).
D) G (F(0,8)) > G (F(1)).

160) (UFMG-2000) Seja M o conjunto dos números naturais n tais que $2n^2 - 75\,n + 700 \leq 0$.
Assim sendo, é CORRETO afirmar que
a) apenas um dos elementos de M é múltiplo de 4.
b) apenas dois dos elementos de M são primos.
c) a soma de todos os elementos de M é igual a 79.
d) M contém exatamente seis elementos.

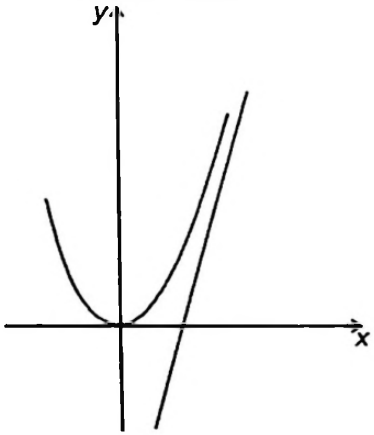
161) (UFMG-2000) Observe a figura.



Ela representa o gráfico da função y = f (x), que está definida no intervalo [- 3, 6].
A respeito dessa função, é INCORRETO afirmar que
A) f (3) > f (4) .
B) f (f (2)) > 1,5 .
C) f (x) < 5,5 para todo x no intervalo [- 3, 6] .
D) o conjunto {- 3 ≤ x ≤ 6 | f (x) = 1,6} contém exatamente dois elementos.

162) (UFMG-2000) A seção transversal de um túnel tem a forma de um arco de parábola, com 10 m de largura na base e altura máxima de 6 m, que ocorre acima do ponto médio da base. De cada lado, são reservados 1,5 m para passagem de pedestres, e o restante é dividido em duas pistas para veículos.
As autoridades só permitem que um veículo passe por esse túnel caso tenha uma altura de, no máximo, 30 cm a menos que a altura mínima do túnel sobre as pistas para veículos.
CALCULE a altura máxima que um veículo pode ter para que sua passagem pelo túnel seja permitida.

163) (UFMG-2001) Observe esta figura:



Nessa figura, estão representados os gráficos das funções $f(x) = x^2/2$ e $g(x) = 3x - 5$. Considere os segmentos paralelos ao eixo y, com uma das extremidades sobre o gráfico da função f e a outra extremidade sobre o gráfico da função g. Entre esses segmentos, seja S o que tem o menor comprimento. Assim sendo, o comprimento do segmento S é

a) 1/2 b) 3/4 c) 1 d) 5/4

164) (UFMG-2001) Considere a desigualdade $ax^2 + bx + c > 0$, em que a, b e c são números reais. Sabe-se que:

- $x = -62/7$ e $x = 7/25$ satisfazem essa desigualdade
- $x = -42$ e $x = 26/25$ não a satisfazem.

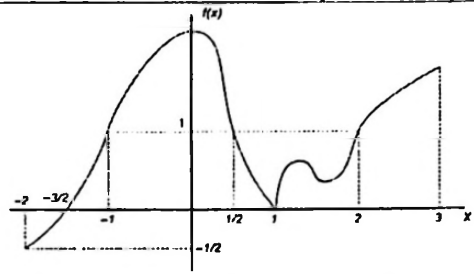
Assim sendo, é CORRETO afirmar que

a) $a > 0$ b) $b > 0$
c) $b^2 - 4ac > 0$ d) $c > 0$

165) (UFMG-2002) O número real x satisfaz $\frac{4x-3}{x+1} > 2$. Assinale a alternativa em que estão incluídas todas as possibilidades para x.

a) $-1 < x < 5/2$ b) $x < -1$ ou $x > 5/2$
c) $x > 5/2$ d) $x < -1$

166) (UFMG-2003) Considere a função $y = f(x)$, que tem como domínio o intervalo $\{x \in IR: -1 < x \leq 3\}$ e que se anula somente em $x = -3/2$ e $x = 1$, como se vê nesta figura:



Assim sendo, para quais valores reais de x se tem $0 < f(x) \leq 1$?

a) $\{x \in IR: -3/2 < x \leq 1\} \cup \{x \in IR: 1/2 \leq x < 1\} \cup \{x \in IR: 1 < x \leq 2\}$
b) $\{x \in IR: -2 < x \leq -3/2\} \cup \{x \in IR: -1 \leq x < 1/2\} \cup \{x \in IR: 2 < x \leq 3\}$
c) $\{x \in IR: -3/2 \leq x \leq 1\} \cup \{x \in IR: 1/2 \leq x < 2\}$
d) $\{x \in IR: -3/2 < x \leq -1\} \cup \{x \in IR: 1/2 \leq x \leq 2\}$

167) (UFMG-2003) Sejam $f(x) = x^2 + 3x + 4$ e $g(x) = ax + b$ duas funções. DETERMINE as constantes reais a e b para que $(fog)(x) = (gof)(x)$ para todo x real.

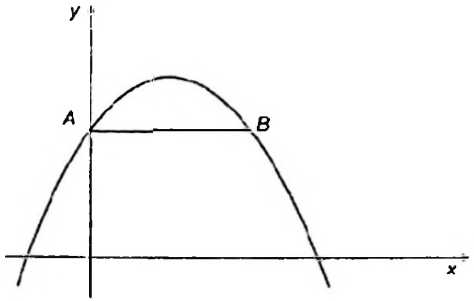
168) (UFMG-2004) Considere a função $f(x) = \frac{2x+2}{x-3}$. O conjunto dos valores de x para os quais $f(x) \in \{y \in IR: 0 < y \leq 4\}$ é

a) $\{x \in IR: x \in 7\}$
b) $\{x \in IR: x < -1$ ou $x \geq 7\}$
c) $\{x \in IR: -1 < x \leq 7\}$
d) $\{x \in IR: x < -1\}$.

169) (UFMG-2004) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ uma função real com duas raízes reais e distintas. Sabendo-se que $f(1) > 0$, é CORRETO afirmar que,

a) se $a > 0$, então as raízes são maiores que 1.
b) se $a > 0$, então $x = 1$ está entre as raízes de f(x).
c) se $a < 0$, então $x = 1$ está entre as raízes de f(x).
d) se $a > 0$, então as raízes são menores que 1.

170) (UFMG-2005) Observe esta figura:



Nessa figura, os pontos A e B estão sobre o gráfico da função de segundo grau $y = ax^2 + bx + c$. O ponto A situa-se no eixo das ordenadas e o segmento AB é paralelo ao eixo das abscissas. Assim sendo, é CORRETO afirmar que o comprimento do segmento AB é:
a) c b) – c/a c) b/a d) – b/a

171) (UFMS-98) Dada a função real de variável real $f(x) = \frac{1-x}{x+1}$, então podemos afirmar que:
(01) se $x \in \mathbb{R}$ e $-1 < x < 1$, então $f(x) > 0$.
(02) se $x \in \mathbb{R}$ e $x < -2$, então $f(x) < 0$.
(04) o domínio da função f é o conjunto D, onde $D = \{x \in \mathbb{R} / x \neq -1\}$.
(08) o conjunto solução da inequação dada por $f(x) < -1$ é o conjunto vazio.
(16) o conjunto solução da inequação dada por $f(x) \geq 1$ é o conjunto S, onde $S = \{x \in \mathbb{R} / -1 < x \leq 0\}$.

172) (UFMS-98) Considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definidas por $f(x) = ax + b$ e $g(x) = cx + d$, onde a, b, c, d $\in \mathbb{R}$. Sabendo-se que o ponto de coordenadas (0,5) pertence ao gráfico de g, $f(g(x)) = -6x + 10$ e que os gráficos de f e g se interceptam no ponto de coordenadas (2,1), então é **correto** afirmar que:
(01) $f(5) = 10$.
(02) $b + d = 0$.
(04) $a + b + c = 0$.
(08) $a + b + c - d = 0$.
(16) $a + b + c - d = 15$.

173) (UFMS-98) Sejam $f: A \to I$ e $g: J \to K$, definidas por $f(x) = x^2 - 4x + b$ e $g(x) = 2 + \sqrt{x+1}$, onde $A = \{x \in \mathbb{R} / x \geq a, a \in \mathbb{R}\}$, I, J, K são intervalos de números reais e $b \in \mathbb{R}$. Então é **correto** afirmar que:
(01) 2 é o menor valor de a para que a função f admita função inversa.
(02) sendo g a função inversa de f, então $I = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$, $K = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$ e $J = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$.
(04) se g é a função inversa de f, então $g(f(4)) = -1$.
(08) se g é a função inversa de f, então b=3.
(16) sendo g a função inversa de f e $K = \{x \in \mathbb{R} / x \geq 2\}$, então $I = \{x \in \mathbb{R} / x \geq -1\}$.

174) (UFMS-98) "Dizemos que w é ponto fixo de uma função real $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se $f(w) = w$". Com base na definição acima, é **correto** afirmar que:
(01) a função $f(x) = x^2 + 1$ admite ponto fixo.
(02) 4 e 0 são pontos fixos da função $f(x) = x^2 - 3x$.
(04) se o gráfico de $y = f(x)$ intercepta a reta de equação $y = x$, então f admite ponto fixo.
(08) se f é tal que $f(a + b) = f(a) + f(b)$, para todo a, b $\in \mathbb{R}$ e se $x = 1$ é um ponto fixo de f, então $x = 2$ também é ponto fixo de f.
(16) se f é uma função impar, então f admite, pelo menos, um ponto fixo.

175) (UFMS-99) Considere as funções reais $f(x) = ax^2 + bx + 4$ e $g(x) = ax^2 + bx - 12$, onde a e b são números reais com $a \neq 0$. Se $f(p) = 16$, sendo p um número real, é **correto** afirmar que
(01) $f(0) - g(0) = -8$
(02) o gráfico de g(x) passa pelo ponto de coordenadas (0;0).
(04) o gráfico de f(x) é uma reta que passa pelo ponto (0;4).
(08) $g(p) = 0$
(16) $f(x) - g(x) = 16$, para todo número real x.

176) (UFMS-99) Considere a função $f(x) = x - \frac{1}{x}$. Podemos afirmar que
(01) $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$
(02) o domínio de f é o conjunto dos números reais diferentes de zero.
(04) $f(x) > 0$ se $x < -1$
(08) o gráfico de f(x) é uma reta que passa pelo ponto de coordenadas (1;0).
(16) se $-1 < x < 0$, então $f(x) > 0$

177) (UFMS-99) Dada a função $f(x) = \sqrt{1-x^2}$, podemos afirmar que
(01) o domínio de f é o conjunto dos números reais x tais que $x \leq -1$ ou $x \geq 1$.
(02) o domínio de f é o conjunto dos números reais x tais que $-1 \leq x \leq 1$.
(04) o conjunto imagem de f é o intervalo de números reais [0;1].
(08) o conjunto imagem de f é o conjunto de números reais y tais que $y \leq 1$.

178) (UFMS-2000) Considerando a função $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, onde $\mathbb{R}$ é o conjunto dos números reais, definida por $f(x) = x^2 - 2x - (m-3)$, $m \in \mathbb{R}$, podemos afirmar que
(01) se $m > 0$, então f possui 2 raízes reais e distintas.
(02) $f(m) - f(0) = m(m-2)$.
(04) se $m = 3$, então o valor mínimo de f é -1.
(08) para que o conjunto imagem da função f seja $\{y \in \mathbb{R} \text{ tais que } y \geq 0\}$ devemos ter, necessariamente, $m = 2$.

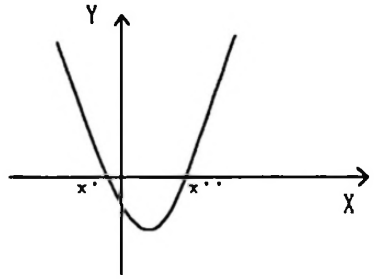
179) (UFMS-2000) Sejam f e g funções reais definidas por $f(x) = x^{\frac{3}{2}} - 6x$ e $g(x) = x^2$. Calcular o maior valor de x de modo que $f \circ g(x) = -5x$.

180) (UFMT-2002) Em uma partida do campeonato mato-grossense de futebol, um goleiro bateu um tiro de meta e a bola descreveu uma trajetória cuja equação é $h(t) = -2t^2 + 6t$, onde t é o tempo medido em segundos e h(t) é a altura em metros da bola no instante t. A partir desses dados, julgue os itens.
(1) A trajetória descrita pela bola é uma parábola de concavidade voltada para baixo.
(2) A altura máxima atingida pela bola é 6 metros.
(3) A bola toca o solo 3 segundos após o lançamento.

181) (UFOP-2003) Seja $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função que satisfaz a: $f(x) - f(x-1) = x^2$, $x \in \mathbb{R}$.
Se $S = \sum_{k=1}^{n} k^2$, para algum $n \in \mathbb{N}$, verifique que $S = f(n) - f(0)$.

182) (UFOP-2003) Os valores de b e c para que o gráfico de $f(x) = x^2 + 2bx + (4c - 8)$ seja tangente ao semi-eixo positivo das abscissas e corte o eixo das ordenadas no ponto 8 são:
a) $b = -2\sqrt{2}$ e $c = 4$ b) $b = 2\sqrt{2}$ e $c = 4$
c) $b = -2\sqrt{2}$ e $c = 8$ d) $b = 2\sqrt{2}$ e $c = 8$

183) (UFPA-96) A parábola abaixo representa graficamente a função quadrática $y = ax^2 + bx + c$



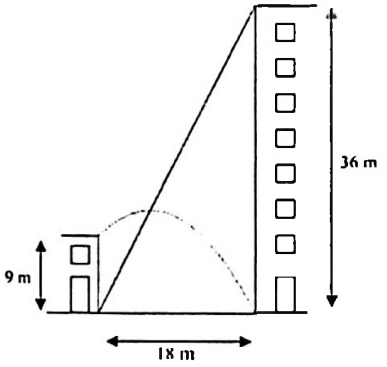
Assim sendo, podemos afirmar que
a) $a = b = c > 0$
b) $a > 0$, $b > 0$ e $c < 0$
c) $a > 0$, $b > 0$ e $c = 0$
d) $a > 0$, $b < 0$ e $c > 0$
e) $a > 0$, $b < 0$ e $c < 0$

184) (UFPA-97) O gráfico da função $y = -x^2 + 2mx - (m+2)^2$ não toca o eixo dos x, então o valor de m é
a) igual a zero b) igual a -3
c) menor que 2 d) maior que -5
e) maior que -1

185) (UFPA-98) O gráfico da função $f(x) = x^2 - px + (p^2 - 3)$, onde p é número real, encontra o eixo das abscissas apenas uma vez. Então f(0) é igual a
a) -2 b) -1 c) 0 d) 1 e) 2

186) (UFPA/PSS-2005) Por ocasião da inauguração de um edifício, um promotor de eventos decidiu fazer uso simultâneo das projeções de um jato de água e de um canhão de luz efetuadas a partir de um pequeno prédio vizinho, localizado a 18 metros do edifício novo. O jato será lançado a partir do teto do pequeno prédio (a 9 metros de altura) e, após executar sua trajetória parabólica, atingirá a base do prédio novo. O canhão de luz, por sua vez, será disparado a partir do chão, da base do pequeno prédio. Seu feixe de luz atravessará exatamente o vértice da "parábola de água" e atingirá o topo do

novo edifício, que se encontra a 36 metros de altura (conforme a figura abaixo). O jato de água e o feixe de luz se encontrarão, a partir do solo, à altura de

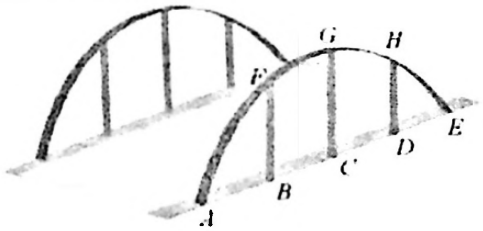


a) 11 metros. b) 12 metros.
c) 13 metros. d) 14 metros.
e) 15 metros.

187) (UFPB-2005) Considere a função invertível f: IR→IR definida por f (x) = 2x + b , onde b é uma constante. Sendo f −1 a sua inversa, qual o valor de b , sabendo-se que o gráfico de f^{-1} passa pelo ponto A(1, − 2)?
a) − 2 b) − 1 c) 2 d) 3 e) 5

188) (UFPB-2005) Sejam f(x) uma função quadrática e g(x) uma função afim, tais que f(7) − f(1) = g(7) − g(1). Se h(x) = f (x) − g(x) então:
a) h(0) = h(4) d) h(4) = h(6)
b) h(0) = h(8) e) h(6) = h(8)
c) h(2) = h(5)

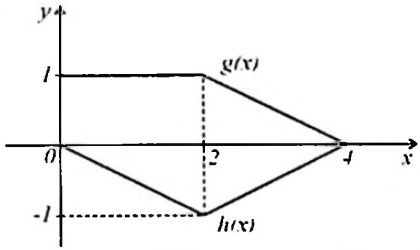
189) (UFPB-2004) A figura abaixo ilustra uma ponte suspensa por estruturas metálicas em forma de arco de parábola.



Os pontos A , B , C , D e E estão no mesmo nível da estrada e a distância entre quaisquer dois consecutivos é 25 m. Sabendo-se que os elementos de sustentação são todos perpendiculares ao plano da estrada e que a altura do elemento central CG é 20 m, a altura de DH é:
a) 17,5 m c) 12,5 m e) 7,5 m
b) 15,0 m d) 10,0 m

190) (UFPB-2003) Um fabricante de picolés distribui diariamente, com seus vendedores, caixas contendo, cada uma, *300* picolés. O lucro diário, em reais, na venda desses picolés, é dado pela função $L(n) = -200n^2 + 1600n - 2400$, onde n é o número de caixas vendidas. Considere as afirmações relativas ao lucro diário:
I.Para $2 < n < 6$ o fabricante terá lucro.
II.O lucro não poderá ser superior a *R$ 1.000,00*.
III.O lucro será máximo quando forem vendidos *1.500* picolés.
Está(ão) correta(s) apenas:
a) I e II **b)** I e III **c)** II e III **d)** I **e)** III

191) (UFPB-2003) Na figura ao lado, estão representadas graficamente as funções $g(x)$ e $h(x)$.



Considerando $f(x) = g(x) - h(x)$, pode-se afirmar:
I. $f(x)$ é crescente no intervalo $0 \le x \le 2$ e decrescente no intervalo $2 \le x \le 4$.
II. $f(2) = 0$.
III. $f(3) < 0$.
Está(ão) correta(s) apenas:
a) I e II **b)** I e III **c)** II e III **d)** I **e)** III

192) (UFPB-2003) Com relação à questão anterior, a função $g(x)$ é definida por

a) $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ \frac{1}{2}x - 2, \text{ se } 2 < x \le 4 \end{cases}$

b) $g(x) = \begin{cases} x + 1, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ 1, \text{ se } 2 < x \le 4 \end{cases}$

c) $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ -\frac{1}{2}x + 2, \text{ se } 2 < x \le 4 \end{cases}$

d) $g(x) = \begin{cases} -\frac{1}{2}x, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ x - 1, \text{ se } 2 < x \le 4 \end{cases}$

e) $g(x) = \begin{cases} 1, \text{ se } 0 \le x \le 2 \\ -x - 2, \text{ se } 2 < x \le 4 \end{cases}$

193) (UFPB-2003) Considere a função $f : [0, +\infty) \to [12, +\infty)$, dada por $f(x) = x^2 + 2kx + k^2 - 4$, onde a constante real k faz com que a função $f(x)$ admita inversa. Sabendo-se que $g(x)$ é a função inversa de $f(x)$, o valor de $g(21)$ é:
a) 1 b) 4 c) 9 d) −1 e) −9

194) (UFPB-2002) Sejam f e g funções convenientemente definidas, tais que f é a inversa da g e $f(1) = 2$. Considere a seguinte seqüência: $a_1 = f(1)$, $a_2 = f(g(1))$, $a_3 = f(g(f(1)))$, $a_4 = f(g(f(g(1))))$, ..., $a_{2n} = f(g(f(\ldots f(g(1)))\ldots)))$. $a_{2n+1} = f(g(f(\ldots g(f(1)))\ldots)))$. Dessa forma, o termo $a_{123456789}$ tem como valor:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

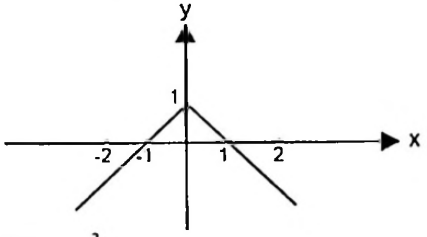
195) (UFPB-99) Considere a função $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = ax^2 + bx + c$ com $a, b, c \in \mathbb{R}$, $b^2 - 4ac < 0$ e $a < 0$. É correto afirmar que
a) $f(x) > 0$ para algum $x \in \mathbb{R}$.
b) $f(x) = 0$ para um único $x \in \mathbb{R}$.
c) $f(x) = 0$ apenas para dois valores de $x \in \mathbb{R}$.
d) $f(x) > 0$ para todo $x > 0$.
e) $f(x) < 0$ para todo $x \in \mathbb{R}$.

196) (UFPB-99) Considere a função $f : [1, 7] \to \mathbb{R}$ definida por $f(x) = x^2 - 6x + 8$. Sejam m e M, respectivamente, o menor e o maior valor que $f(x)$ pode assumir. Determine a **média aritmética** entre m e M.

197) (UFPB-97) Sejam f e g funções de R em R tais que f(g(x)) = 2x e f(x) = 4x + 1. Calcule $g(1)$.

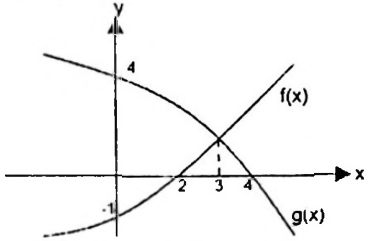
198) (UFPel-99) Sendo f: $\mathbb{N}^* \to \mathbb{Q}$, f(1) = 1, f(2) = 1/2 e $f(x+2) = \frac{f(x) + f(x+1)}{2}$, a média aritmética entre f(4) e f(5) é:
a) 21/8 b) 21/16 c) 21/32 d) 7/8 e) 11/16

199) (UFPI-2004) Sejam f e g funções reais de variável real, tais que $g(x) = f(x^2 + 1)$, e o gráfico de f dado na figura:



a) $g(x) = -x^2$
b) $g(x) = x^2 + 1$
c) g é uma função par.
d) o gráfico de g é uma reta

200) (UFPI-2004) Na figura abaixo estão representados os gráficos das funções reais, de variável real, f e g.



Decorrente da análise da figura, é correto afirmar que:
a) f(x).g(x) > 0 para todo 2 < x < 4
b) f(x) > g(x) para todo x < 3
c) f(x).g(x) < o para todo x > 3
d) f(x) + g(x) < 0 para todo x < 3
e) f(x) < g(x) para todo x > 3

201) (UFRJ-99) Durante o ano de 1997 uma empresa teve seu lucro diário L dado pela função $L(x) = 50(|x - 100| + |x - 200|)$ onde x = 1,2,....365 corresponde a cada dia do ano e L é dado em reais. Determine em que dias (x) do ano o lucro foi de R$ 10.000,00.

202) (UFRJ-2003) Seja f a função real dada por $f(x) = ax^2 + bx + c$, com a > 0. Determine a, b e c

sabendo que as raízes da equação $|f(x)| = 12$ são $-2, 1, 2$ e 5.

203) (UFRJ-2004) Para quantos números reais x, o número y, onde $y = -x^2 + 6x - 1$, é um número pertencente ao conjunto $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4, ...\}$?

204) (UFRN-95) Dada a função $f: Z \to Z$, definida para todo inteiro $n \in Z$, tal que $f(0) = 1$ e $f(n+1) = f(n) + 2$, podemos afirmar que o valor de $f(200)$ é:

a) 201 b) 203 c) 401
d) 403 e) 602

205) (UFRN-95) Se f e g são funções de $\mathbb{R}$ em $\mathbb{R}$, tais que $f(x) = 2x - 3$ e $f(g(x)) = x$, então $g(x)$ é igual a:

a) $2x + 1$ b) $2x + 3$ c) $3x + 2$
d) $\frac{x}{2x-3}$ e) $\frac{x+3}{2}$

206) (UFRN-95) A função $f: \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ satisfaz as seguintes condições:
a) $f(1) = 1$; b) $f(n+1) = f(n) + 3n + 1$.
Determine $f(n)$ para todo $n \in \mathbb{N}$.

207) (UFRN-96) Considere a função real $f(x) = \frac{ax+b}{cx-a}$, definida para todo $x \neq \frac{a}{c}$, onde a, b e c são constantes não nulas e $a^2 + bc \neq 0$. Encontre $(f \circ f)(x)$ e $\underbrace{(f \circ f \circ f \circ \cdots \circ f)}_{51 \text{ vezes}}(x)$.

LEMBRETE: $(f \circ f)(x) = f(f(x))$

208) (UFRN-96) Sabendo que $m \neq 0$ e que a função $g(x) = mx^2 - 3x + 2$ se anula num único valor de x, podemos afirmar que:
a) $m > 1$ b) $m < 1$
c) $m > 2$ d) $m < -3$
e) m é um número irracional

209) (UFRN-98) Seja o conjunto dos números reais e IR a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x, & se \quad x < -1 \\ x, & se \quad -1 \leq x \leq 1 \\ 1, & se \quad x > 1 \end{cases}$$

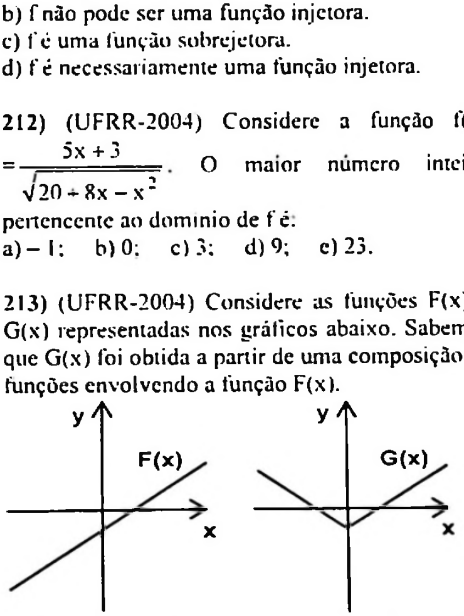
a) Esboce o gráfico de f no plano cartesiano $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$
b) Determine o conjunto imagem de f, denotado $Im(f)$ e definido por $Im(f) = \{y \in \mathbb{R} / y = f(x)$, para algum $x \in \mathbb{R}\}$.

210) (UFRN-2000) Sendo α um parâmetro real, tem-se que $\frac{\alpha}{x^2 + x + 1} \leq 1$ para todo x real, se, e somente se:
a) $\alpha \leq 1$ b) $\alpha \geq 0.75$ c) $\alpha \geq 1$ d) $\alpha \leq 0,75$

211) (UFRN-2002) Sejam E o conjunto formado por todas as escolas de ensino médio de Natal e P o conjunto formado pelos números que representam a quantidade de professores de cada escola do conjunto E. Se f: E→ P é a função que a cada escola de E associa seu número de professores, então
a) f não pode ser uma função bijetora.
b) f não pode ser uma função injetora.
c) f é uma função sobrejetora.
d) f é necessariamente uma função injetora.

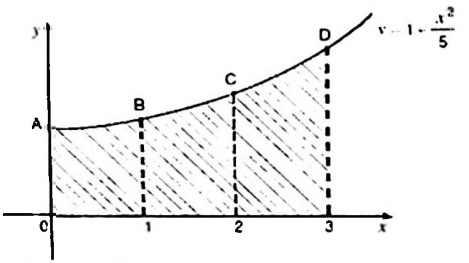
212) (UFRR-2004) Considere a função $f(x) = \frac{5x+3}{\sqrt{20 + 8x - x^2}}$. O maior número inteiro pertencente ao domínio de f é:
a) -1; b) 0; c) 3; d) 9; e) 23.

213) (UFRR-2004) Considere as funções F(x) e G(x) representadas nos gráficos abaixo. Sabemos que G(x) foi obtida a partir de uma composição de funções envolvendo a função F(x).



A única das igualdades abaixo que pode exprimir esta composição é:
a) G(x) = F(H(x)), onde $H(x) = x^2$;
b) G(x) = H(F(x)), onde $H(x) = |x|$;
c) G(x) = F(H(x)), onde $H(x) = |x|$;
d) G(x) = H(F (x)), onde $H(x) = |x| - 1$;
e) G(x) = F(H(x)), onde $H(x) = -x$.

214) (UFV-2005) Uma das maneiras utilizadas pelos agrimensores para medir a área de um terreno é aproximar a região por polígonos com áreas fáceis de calcular (por exemplo, triângulos, retângulos, trapézios, etc.). Suponha que um terreno tenha o formato dado pela região hachurada no gráfico abaixo, onde a curva representa o gráfico da função $y = 1 + \frac{x^2}{5}$.



O valor aproximado da área dessa região, quando substituímos os arcos AB, BC e CD por segmentos de reta, é:
a) 4,3 b) 4,9 c) 5,5 d) 5,1 e) 4,5

215) (ESPCEX-93) Se f é uma função real, tal que:
i) $f(a \cdot b) = f(a).f(b)$;
ii) $f(1) = 2$;
iii) $f(\sqrt{2}) = 4$, então pode-se afirmar que $f(3+\sqrt{2})$ vale:
a) $3\sqrt{2}$ b) 8 c) 16 d) 32

216) (ESPCEX-93) Sejam os conjuntos $A = \{x \in \Re / x \leq 1/2\}$, $B = \{x \in \Re / x \geq -1\}$ e as funções f de A em $\Re_-$ definidas por $f(x) = 2x - 1$; g de $\Re_-$ em $\Re_+$, definida por $g(x) = x^2$ e h de $\Re_-$ em B, definida por $h(x) = 4x - 1$. Pode-se, então, afirmar que a função inversa de $h o(g o f)$ é definida por:
a) $\frac{2-\sqrt{x+1}}{4}$ b) $16x^2 - 16x + 3$
c) $\frac{2+\sqrt{x+1}}{4}$ d) $\frac{2 \pm \sqrt{x+1}}{4}$

217) (ESPCEX-94) Considere as funções f: $\Re \to \Re$ e g: $\Re \to \Re$ definidas por $f(x) = x + 1$ e $g(x) = 2x^2 - 3$. O conjunto dos valores de x tais que $(fog)(x) = f^{-1}(x)$ está contido em:
a) $[-2, 0]$ c) $[-10, -2]$
b) $[-1, 2]$ d) $[1, 10]$

218) (ESPCEX-95) Seja f uma função cujo domínio é o conjunto dos números reais e $f(a \cdot b) = f(a).f(b)$ para todo a e b. Se $f(0) = 1$, então o valor de x que satisfaz a igualdade $f(2x) = 1/f(1)$, onde $f(1) \neq 0$, é um dos zeros da equação:
a) $x^2 - x - 6 = 0$ d) $x^2 + 2x + 1 = 0$
b) $2x^2 + 3x - 5 = 0$ e) $x^2 - 3x + 1 = 0$
c) $2x^2 + 5x + 2 = 0$

219) (ESPCEX-95) Sendo $f: \Re \to \Re$ definida por $f(x) = \begin{cases} 1/x, & se \quad x \in Z^* \\ 2, & se \quad x \in \Re - Z^* \end{cases}$ e $g: \Re \to \Re$ definida por $g(x) = \begin{cases} -1, & se \quad x \in Q \\ 1/2, & se \quad x \in \Re - Q \end{cases}$
então $(fogofog)(2+\sqrt{2})$ é igual a:
a) -1 b) $1/2$ c) 2 d) $1 - \sqrt{2}/2$ e) -2

220) (ESPCEX-96) Considere as funções de domínio R: $f(x) = -x^2 + 6x - 5$ e $g(x) = 5k - k^2$, onde k é uma constante real. Os gráficos de f e g interceptam-se em um único ponto, se o módulo da diferença entre os valores de k for igual a:
a) 0. b) 1. c) 2. d) 3. e) 5.

221) (ESPCEX-96) Um fio de comprimento L é cortado em dois pedaços, um dos quais formará um quadrado e o outro, um triângulo equilátero. Para que a soma das áreas do quadrado e do triângulo seja mínima, o fio deve ser cortado de forma que o comprimento do lado do triângulo seja igual:
a) $\frac{3L}{7}$ b) $\frac{L(9-4\sqrt{3})}{11}$ c) $\frac{\sqrt{3}L}{9-4\sqrt{3}}$
d) $\frac{3L}{2}$ e) $\frac{\sqrt{3}L}{3}$

222) (ESPCEX-96) Seja a função f: R→R, definida por $f(x) = 2x + |x + 1| - |2x - 4|$. O valor de $f^{-1}(30)$ é:
a) 6. b) 20. c) 25. d) 35. e) 10.

223) (ESPCEX-97) Na função $f(x) = 3x - 2$, sabemos que $f(a) = b - 2$ e $f(b) = 2b + a$. O valor de $f(f(a))$ é:
a) 2 b) 1 c) 0 d) -1 e) -2

224) (ESPCEX-97) Sejam o conjunto $A = \{x \in Z^* / |x| \leq 5\}$ e a função f: A→Z, definida por $f(x) = x^2$. Se B é o conjunto imagem da

função f(x), o número de elementos do conjunto B∪A é:
A) 16 B) 15 C) 14 D) 13 E) 12

225) (ESPCEX-98) A temperatura T de aquecimento de um forno, em °C, varia com o tempo t, em minutos, segundo a função abaixo:

$$T(t)=\begin{cases}20+28t, \text{se } t\le 10\\ t^2+5t+150, \text{se } t>10\end{cases}$$

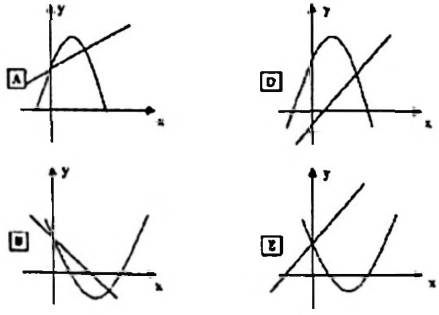
O tempo necessário para que a temperatura do forno passe de 160 °C para 564 °C é:
a) 5 minutos b) 12 minutos
c) 13 minutos d) 18 minutos
e) 23 minutos.

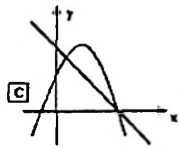
226) (ESPCEX-98) Um curral retangular será construído aproveitando-se um muro pré-existente no terreno, por medida de economia. Para cercar os outros três lados, serão utilizados 600 metros de tela de arame. Para que a área do curral seja a maior possível, a razão entre as suas menor e maior dimensões será:
a) 0,25 b) 0,50 c) 0,75 d) 1,00 e) 1,25

227) (EsPCEx-2000) Dada a equação $|2x - 3| + |x| - 5 = 0$, a soma de todas as suas soluções é igual a:

a) 3 b) $\frac{8}{3}$ c) 2 d) $\frac{4}{3}$ e) $\frac{2}{3}$

228) (EsPCEx-2000) Considere **m, n e p** números reais não nulos e as funções *f* e g de variável real, definidas por $f(x) = mx^2 + nx + p$, e $g(x) = mx + p$. A alternativa que melhor representa os gráficos de *f* e g é:





229) (EsPCEx-2001) Uma função quadrática é tal que seu gráfico intercepta o eixo das ordenadas – **35**, suas raízes têm soma igual a **6** e o produto igual a 7. O valor máximo dessa função é:
a) 10 b) – 5 c) 100 d) – 35 e) 20

230) (EsPCEx-2002) Sejam f e g funções de A em R , definidas por $f(x)=\sqrt{\frac{x-1}{x+1}}$ e $g(x)=\frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}$.
Nessas condições, pode-se afirmar que f = g se:
a) $A = \{x \in IR / x < -1 \text{ ou } x \ge 1\}$
b) $A = \{x \in IR / x \ne -1\}$
c) $A = IR$
d) $A = \{x \in IR / x \ge 1\}$
e) $A = \{x \in IR / x < -1\}$

231) (EsPCEx-2002) Resolvendo um problema que conduzia a uma equação do segundo grau, um aluno errou ao copiar o valor do termo independente dessa equação e obteve as raízes 7 e 1. Outro aluno errou ao copiar o valor do coeficiente de x da mesma equação e obteve as raízes 3 e 4. Sabendo que esses foram os únicos erros cometidos pelos dois alunos, pode-se afirmar que as raízes corretas da equação são:
a) 3 e 6 c) 2 e 4 e) 4 e 5
b) 2 e 6 d) 3 e 5

232) (EsPCEx-2002) O conjunto-solução da inequação $\frac{x}{x+6} \ge \frac{1}{x-4}$ é:
a) $\{x \in IR / x < -6 \text{ ou } x > 4\}$
b) $\{x \in IR / x < -6 - 1 \le x < 4 \text{ ou } x \ge 6\}$
c) $\{x \in IR / -6 < x < 4\}$
d) $\{x \in IR / -6 < x \le 1 \text{ ou } x \ge 6\}$
e) $\{x \in IR / -1 \le x < 6\}$

233) (EsPCEx-2003) A soma dos quadrados de todas as raízes da equação $x^2 + 4x - 2|x + 2| + 4 = 0$ é igual a
A) **16.** B) **20.** C) **24.** D) **28.** E) **36.**

234) (EsPCEx-2004) Analise os itens abaixo para a função f : IR → IR:

I – Se $f(x) + f(-x) = 0$, então f é uma função par.
II – Se f(x) é uma função constante, então f é função par.
III – Se $|f(x)| = f(x)$, então $Im(f) \subset \mathbb{R}_+$.
IV – Se $|f(x)| = f(x)$, então f(x) é função bijetora.
São corretas as afirmativas:
a) I e II b) II e IV c) II e III
d) I e III e) III e IV

235) (EsPCEx-2004) Com relação a função $g(x) = \frac{x-1}{x+1}$, definida para $x \neq -1$, pode-se afirmar que a única alternativa correta é:
a) $g(x) \leq 0$ para todo $x \in \mathbb{R} - \{-1,0\}$.
b) $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 0$.
c) $g(x) < 0$ para todo $x \in]-1, +\infty[$.
d) $g(x) < 0$ para todo $x \in]-1, 1[$.
e) $\nexists\, x \in \mathbb{R}$ tal que $g(x) = 2$.

236) (EsPCEx-2004) Sejam as funções reais f(x) e g(x). Se $f(x) = x + 2$ e $f(g(x)) = \frac{x}{2}$, pode-se afirmar que a função inversa de g(x) é:
a) $g^{-1}(x) = \frac{f(x)}{2}$ b) $g^{-1}(x) = \frac{x+4}{2}$
c) $g^{-1}(x) = f(x)$ d) $g^{-1}(x) = 2\,f(x)$
e) $g^{-1}(x) = \frac{x-4}{2}$

237) (EPCAr-2003) Considere a função g: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definida por $g(x) = bx^2 + ax + c$, $abc \neq 0$. Analise as alternativas e marque a correta.
a) Se $b < 0$ e $c > 0$, g NÃO possui raízes reais
b) Se Im = $]-\infty, 4]$ é o conjunto imagem de g, então $g\left(-\frac{a}{2b}\right) = 4$
c) o gráfico de g passa pela origem
d) se $a^2 = 4bc$, g possui raízes reais e distintas

238) (EPCAr-2004) Na equação $x^2 + kx + 36 = 0$, de modo que entre as raízes x' e x'' exista a relação $\frac{1}{x'} + \frac{1}{x''} = \frac{5}{12}$, o valor de k é um número
a) negativo. c) par.
b) primo. d) natural.

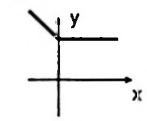
239) (EPCAr-2004) Sejam A = {x, y} e B = {z, w, u}, e considerando as relações abaixo de A em B, assinale a alternativa que apresenta uma função de A em B.
a) {(x, z), (y, w), (x, u)} c) {(x, u), (y, z)}
b) {(x, z), (x, w), (x, u)} d) {(y,w)}

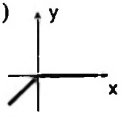
240) (EPCAr-2005) As raízes de $ax^2 + bx + c = 0$ são r ou s. A equação cujas raízes são ar + b ou as + b é
a) $x^2 - bx - ac = 0$
b) $x^2 - bx + ac = 0$
c) $x^2 + 3bx + ca + 2b^2 = 0$
d) $x^2 + 3bx - ca + 2b^2 = 0$

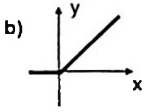
241) (AFA-98) Seja f: $[1,\infty) \to [-3,\infty)$ a função definida por $f(x) = 3x^2 - 6x$. Se g: $[-3, \infty) \to [1,\infty)$ é a função inversa de f, então $[g(6) - g(3)]^2$ é
a) 5 b) $2\sqrt{6}$ c) $5 - 2\sqrt{6}$ d) $-5 + 2\sqrt{6}$

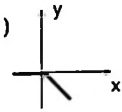
242) (AFA-99) O conjunto-solução da inequação $\left|1 + 2x - 3x^2\right| < 5$ é
a) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{\sqrt{19}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{19}}{3}\right\}$.
b) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{1-\sqrt{19}}{3} < x < \frac{1+\sqrt{19}}{3}\right\}$.
c) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid \frac{-1-\sqrt{19}}{3} < x < \frac{-1+\sqrt{19}}{3}\right\}$.
d) $\left\{x \in \mathbb{R} \mid x < \frac{1-\sqrt{19}}{3} \text{ ou } x > \frac{1+\sqrt{19}}{3}\right\}$.

243) (AFA-99) O gráfico que melhor representa a função $f(x) = \frac{1}{2}(x - |x|)$ é

a)


c)


b)


d)


244) (AFA-99) Seja D = {1,2,3,4,5} e f: D → R, a função definida por f(x) = (x - 2)(x - 4). Então, pode-se afirmar que f
a) é bijetora.

b) é somente injetora.
c) é somente sobrejetora.
d) possui conjunto imagem com 3 elementos.

245) (AFA-99) Seja f uma função real do primeiro grau com f(0) = 1 + f(1) e f(-1) = 2 - f(0). Então, o valor de f(3) é
a) -3 b) -2,5 c) -2. d) -1,5.

246) (AFA-2000) A imagem da função real f definida por $f(x) = \frac{2+x}{2-x}$ é
a) R – {1} b) R – {2}
c) R – {-1} d) R – {-2}

247) (AFA-2001) Se f e g são funções de IR em IR definidas por $f(3x+2) = \frac{3x-2}{5}$ e g(x–3) = 5x – 2, então f(g(x)) é
a) $\frac{x-4}{5}$ b) $\frac{5x-9}{5}$ c) 5x + 13 d) $\frac{5x+11}{5}$

248) (AFA-2001) Os números inteiros do domínio da função real $f(x) = \sqrt{(5+2x)\cdot(2-3x)}$ são as raízes da equação g(x) = 0. Uma expressão analítica da função g(x) é
a) $x^2 + x^2 + 2x$ b) $x^3 + x^2 - 2x$
c) $x^3 - 3x^2 + 2x$ d) $x^3 + 3x^2 + 2x$

249) (AFA-2002) Considere a função f: IR → IR definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 + x + 2, \text{ se } x \le 0 \\ 1, \text{ se } 0 < x < 2 \\ -x + 2, \text{ se } x \ge 2 \end{cases}$. Então, pode-se afirmar que o conjunto imagem dessa função é
a) $\{y \in IR / y < 0\}$
b) $\{y \in IR / y < 0 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y > 2\}$
c) $\{y \in IR / y < 0 \text{ ou } y = 1 \text{ ou } y \ge \frac{7}{4}\}$
d) $\{y \in IR / y = 1 \text{ ou } y \ge \frac{7}{4}\}$

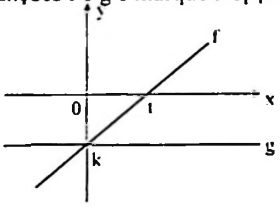
250) (AFA-2002) O domínio da função real expressa pela lei $f(x) = \sqrt{x\left[(x+1)^{-1} - (x-1)^{-1}\right]}$ é $x \in \Re$, tal que
a) $x < -1$ ou $0 \le x < 1$ b) $-1 < x \le 0$ ou $x > 1$
c) $x < -1$ ou $0 < x < 1$ d) $-1 < x < 0$ ou $x > 1$

251) (AFA-2003) Analise as proposições abaixo classificando-as em V (verdadeiro) ou F (falso), considerando funções reais.

( ) O domínio e a imagem da função g definida por $g(x) = \sqrt{9-x^2}$ são, respectivamente, [-3,3] e $[0,+\infty[$
( ) Se $f(x) = x^2$ e $g(x) = f(x + m) - f(x)$ então g(2) é igual a m(4 + m)
( ) Se $h(x) = \left|\frac{1}{x}\right|$, então $h^{-1}(x) = h(x)$

A seqüência correta é
a) F – V – V c) V – F – V
b) F – V – F d) V – V – F

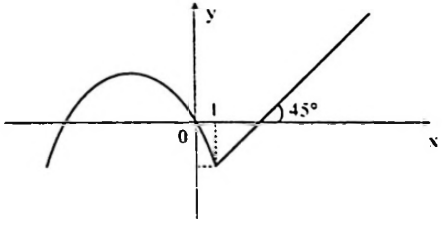
252) (AFA-2003) Analise o gráfico abaixo das funções f e g e marque a opção correta.



a) O gráfico da função h(x) = g(x) – f(x) é uma reta ascendente.
b) O conjunto imagem da função s(x) = f(g(x)) é $\Re$
c) $f(x) \cdot g(x) \ge 0 \ \forall \ x \ge t$
d) $g(f(x)) = g(x) \ \forall \ x \in \Re$

253) (AFA-2003) Considere a função f: $\Re \to \Re$ tal que $f(x) = \begin{cases} x - 1, \text{ se } x \ge 1 \\ 1 - x, \text{ se } x < 1 \end{cases}$ e assinale a alternativa verdadeira.
a) f é sobrejetora.
b) f é par.
c) f não é par nem ímpar.
d) Se f é definida de $\Re$ em $\Re_+$, f é bijetora.

254) (AFA-2003) Observe o gráfico da função f abaixo.



Sabendo que f é definida por $f(x)=\begin{cases} ax^2+bx+c, & \text{se } x<1 \\ px+k, & \text{se } x\geq 1 \end{cases}$ analise as alternativas e marque a opção correta.

a) $ac<0$ c) $p=-1$
b) $pk\geq 0$ d) $ab>0$

255) (AFA-2003) O conjunto $\{x \in \Re / f(x) < 0\}$, onde $f: \Re \to \Re$ é definida por $f(x) = ax^2 + 2a^2x + a^3$, com $a \in \mathbb{R}_-^*$, é

a) $]-\infty; -a[$ b) $]-\infty; -a[\cup]-a; +\infty[$
c) $]-\infty; a[\cup]a; +\infty[$ d) $]-\infty +\infty[$

256) (AFA-2004) Considere as funções reais

$(fog)(x) = \begin{cases} 4x^2-6x-1 \text{ se } x\geq 1 \\ 4x+x \text{ se } x<1 \end{cases}$

e $g(x) = 2x - 3$

Com base nessas funções classifique as afirmativas abaixo em VERDADEIRA(S) ou FALSA(S).

I) f(x) é par.
II) f(x) admite inversa em todo seu domínio.
III) f(x) é crescente em $\{x \in IR \mid x < -1 \text{ ou } x \geq -1\}$
IV) se $x < -6$ então $f(x) > -3$

A seqüência correta é

a) V, V, F, V b) F, F, V, F
c) F, F, V, V d) F, V, V, F

257) (AFA-2004) Se a função $f: IR \to IR$ definida por $f(x) = ax - 1$, $\in IR^*$, for crescente e $f(f(4)) = 32$, então pode-se afirmar que a mesma

a) é positiva para $x < 0$

b) é negativa para $x < \frac{1}{3}$

c) é nula para $x = 3$

d) admite o valor $-\frac{2}{3}$ quando $x = -1$

258) (AFA-2004) Seja $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$ uma função real definida para todo número real. Sabendo-se que existem dois números x_1 e x_2, distintos, tais que $f(x_1).f(x_2) < 0$, pode-se afirmar que

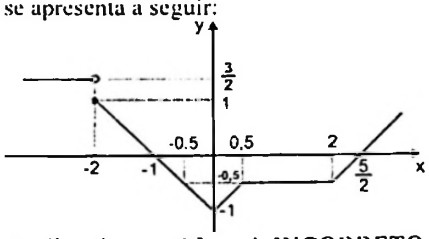
a) f passa necessariamente por um máximo.
b) f passa necessariamente por um mínimo.
c) $x_1.x_2$ é necessariamente negativo.
d) $b^2 - 4ac > 0$

259) (AFA-2005) Seja: $A = \{x \in IN^* / \frac{24}{x} = n \in IN\}$. Seja: $B = \{x \in IN / \frac{3x+4}{2x+9} - 1 < 0\}$

É correto afirmar que

a) $B - A = \{0\}$ c) $A \supset B$
b) $A \cup B$ tem 8 elementos d) $A \cap B = B$

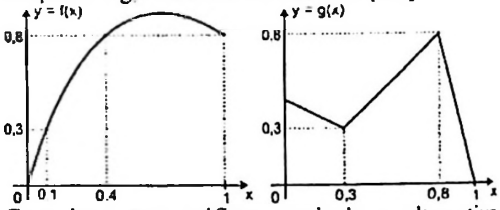
260) (AFA-2005) Seja f a função real cujo gráfico se apresenta a seguir:



Analisando o gráfico, é **INCORRETO** afirmar que

a) $f(f(1)) = f(0,5)$
b) $f(x) + 1 > 0, \forall x \in IR$
c) $f(0) \leq f(x), \forall x \in IR$
d) se $g(x) = f(x) - 1$, então $g(-2) = f\left(\frac{5}{2}\right)$

261) (AFA-2005) Observe os gráficos abaixo, das funções f e g, definidas no intervalo [0,1]



Com base nos gráficos, assinale a alternativa **FALSA**.

a) $g(f(0,4)) \geq g(f(x)), \forall x \in [0,1]$
b) $g(f(0,05)) > g(f(0,1))$
c) $g(g(x)) = x, \forall x \in [0,3; 0,8]$
d) $g(f(0,6)) > g(f(1))$

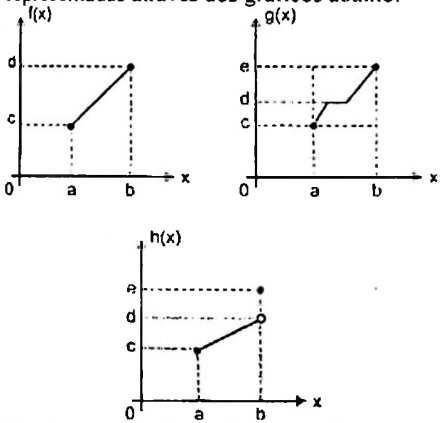
262) (AFA-2005) Dada a função real f definida por $f(x) = x^2$, considere a função real g definida por $g(x) = f(x+m) + k$, sendo m e $k \in R$.

É **INCORRETO** afirmar que

a) o gráfico da função g em relação ao gráfico da função f é deslocado k unidades para cima, se $k > 0$, e m unidades para a direita, se $m < 0$
b) a equação do eixo de simetria da parábola que representa g é dada por $x = m$

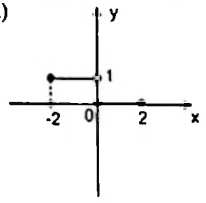
c) se m = 0 e k = 1, então o conjunto imagem de g é dado por Im = {y ∈ IR / y ≥ 1}
d) se m = –2 e k = –3, então as coordenadas do vértice da parábola que representa g são (– m, k)

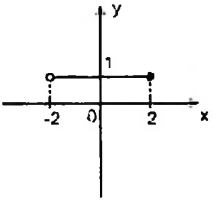
263) (AFA-2005) Considere as funções f, g e h, todas de domínio [a,b] e contra-domínio [c,d], representadas através dos gráficos abaixo.

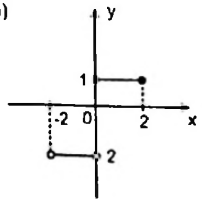


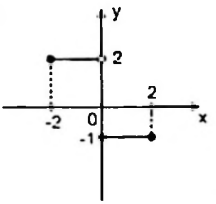
Com base nos gráficos, é correto afirmar que
a) f é uma sobrejeção, g não é uma injeção, h é uma sobrejeção.
b) f é uma sobrejeção, g é uma injeção, h não é uma sobrejeção.
c) f é uma injeção, g não é uma sobrejeção, h é uma bijeção.
d) f é uma bijeção, g não é uma injeção, h não é uma sobrejeção.

264) (AFA-2005) Considere a função f(x) = $\begin{cases} 1, \text{se } 0 \le x \le 2 \\ -2, \text{se } -2 \le x < 0 \end{cases}$
A função g(x) = |f(x)| – 1 terá o seguinte gráfico:

a)


c)


b)


d)


265) (AFA-2005) Os valores de x que satisfazem a equação $\sqrt{|x|-1} + \sqrt{|x|} = 2$
têm produto igual a
a) $-\frac{81}{256}$ b) $-\frac{27}{64}$ c) $-\frac{9}{16}$ d) $-\frac{3}{4}$

266) (AFA-2005) A soma dos números inteiros que satisfazem a sentença $3 \le |2x - 3| < 6$ é um número
a) ímpar. c) divisível por 3
b) primo. d) que é divisor de 7

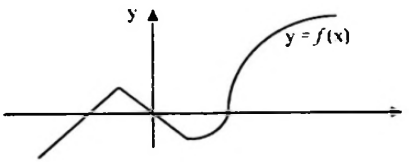
267) (Escola Naval-97) O máximo absoluto e o mínimo absoluto da função real

$$f(x) = \begin{cases} 0 & se\ x > 6\ ou\ x < -1 \\ -|x-3|+2 & se\ 2 \le x \le 6 \\ 1 & se\ 1 < x < 2 \\ |x| & se\ -1 \le x \le 1 \end{cases}$$

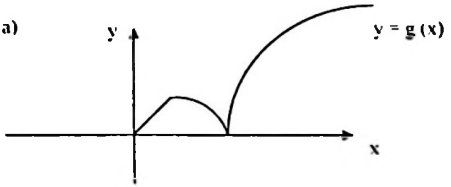
são respectivamente:
a) 2 e –1 b) 1 e –2 c) 1 e 0
d) 2 e 0 e) 3 e –2

268) (Escola Naval-98) Considere os conjuntos $A = \left\{ x \in \Re / \frac{2x-3}{5x-2} \ge 0 \right\}$ e B = {x ∈ ℜ/ $x^2 - 5x + 4 <$ 0. O conjunto solução A∩B é:
a) [3/2, 4[b)]3/2, 4] c)]1, 3/2]
d)]1, 4] e)]- ∞, 2/5[∪]4, +∞ [

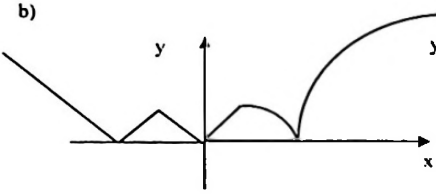
269) (Escola Naval-2004)



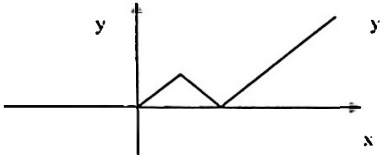
A figura acima é a representação gráfica de uma função f: IR → IR onde g(x) = |f(|x|)| é

a)


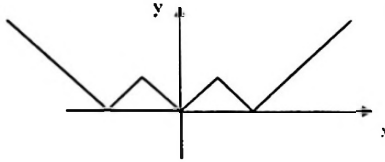
b)



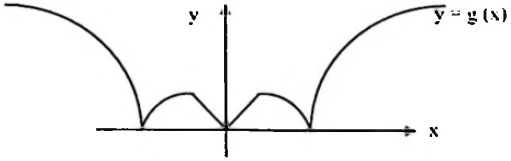
c)



d)



e)



270) (Escola Naval-2005) O conjunto dos números reais x que satisfaz a desigualdade $\left|\frac{3-2x}{2+x}\right| \leq 4$ é

a) $]-\infty, -2[\cup]-2, +\infty[$

b) $]-\infty, -2[\cup]-\frac{5}{6}, +\infty[$

c) $[-\frac{11}{2}, -\frac{5}{6}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$

d) $]-\infty, -\frac{11}{2}] \cup [-\frac{5}{6}, +\infty[$

e) $]-\infty, -\frac{5}{6}] \cup [\frac{3}{2}, +\infty[$

271) (AFA-95) Se f for uma função real, tal que $f\left(\frac{x-1}{x+1}\right) = x + 3$, então $f(x)$ é definida por:

a) $(4 - 2x)/(1 - x)$ b) $(4x + 2)/(1 + x)$
c) $(2x + 1)/(x - 1)$ d) $(2x - 1)/(1 - x)$

272) (FUVEST-93) Uma função f de variável real satisfaz a condição f(x + 1) = f(x) + f(1), qualquer que seja o valor da variável x. Sabendo-se que f(2) = 1, podemos concluir que f(5) é igual a:
a) 1/2 b) 1 c) 5/2 d) 5 e) 10

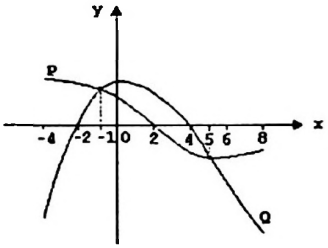
273) (FUVEST-96) Considere a função $f(x) = x\sqrt{1-2x^2}$
a) Determine constantes reais α, β e γ de modo que $(f(x))^2 = \alpha\left[(x^2+\beta)^2+\gamma\right]$

274) (FUVEST-97) Considere a função f dada por

$$f(x) = \frac{x+5-\frac{12}{x+1}}{x+9-\frac{5}{x}}.$$

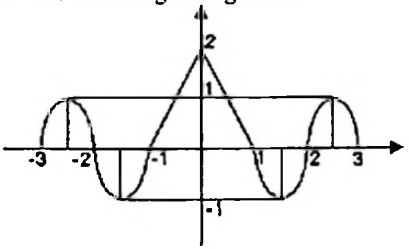
a) Determine o domínio de f.
b) Resolva a inequação $f(x) > 0$.

275) (Fuvest-2000) Os gráficos de duas funções polinomiais P e Q estão representados na figura seguinte.



Então, no intervalo [- 4, 8], P(x) Q(x) < 0 para:
a) $-2 < x < 4$
b) $-2 < x < -1$ ou $5 < x < 8$
c) $-4 \leq x < -2$ ou $2 < x < 4$
d) $-4 \leq x < -2$ ou $5 < x \leq 8$
e) $-1 < x < 5$

276) (Fuvest-2001) A função f(x), definida para $-3 \leq x \leq 3$, tem o seguinte gráfico:



Onde as linhas ligando (- 1, 0) a (0, 2) e (0, 2) a (1, 0) são segmentos de reta.

Supondo $a \leq 0$, para que valores de a o gráfico do polinômio $p(x) = a(x^2 - 4)$ intercepta o gráfico de f(x) em exatamente 4 pontos distintos?

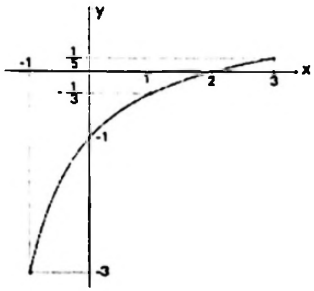
a) $-\frac{1}{2} < a < 0$ c) $-\frac{3}{2} < a < -1$ e) $a < -2$

b) $-1 < a < -\frac{1}{2}$ d) $-2 < a < -\frac{3}{2}$

277) (Fuvest-2002) Os pontos (0, 0) e (2, 1) estão no gráfico de uma função quadrática f. O mínimo de f é assumido no ponto de abscissa $x = -\frac{1}{4}$. Logo, o valor de f(1) é:

a) $\frac{1}{10}$ b) $\frac{2}{10}$ c) $\frac{3}{10}$ d) $\frac{4}{10}$ e) $\frac{5}{10}$

278) (Fuvest-2003) A figura abaixo representa o gráfico de uma função da forma $f(x) = \frac{x+a}{bx+c}$, para $-1 \leq x \leq 3$.



Pode-se concluir que o valor de b é:

a) −2 b) −1 c) 0 d) 1 e) 2

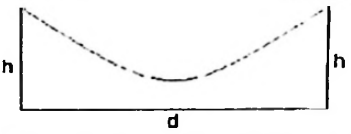
279) (Fuvest-2003) Seja f a função que associa, a cada número real x, o menor dos números $x + 3$ e $-x + 5$. Assim, o valor máximo de f(x) é:

a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 7

280) (Fuvest-2005) Suponha que um fio suspenso entre duas colunas de mesma altura h, situadas à distância d (ver figura), assuma a forma de uma parábola. Suponha também que

(i) a altura mínima do fio ao solo seja igual a 2;

(ii) a altura do fio sobre um ponto no solo que dista $\frac{d}{4}$ de uma das colunas seja igual a $\frac{h}{2}$. Se $h = 3\frac{d}{8}$, então d vale



a) 14 b) 16 c) 18 d) 20 e) 22

281) (Fuvest-2000) a) Esboce, para x real, o gráfico da função $f(x) = |x - 2| + |2x + 1| - x - 6$. O símbolo $|a| = a$, se $a \geq 0$ e $|a| = -a$, se $a < 0$.

b) Para que os valores reais de x, $f(x) > 2x + 2$?

282) (UNICAMP-92) Sejam N o conjunto dos números naturais e $f: N \to N$ uma função que satisfaz as propriedades: a) dado qualquer $m \in N$ existe $n \in N$ tal que $f(n) \geq m$.

b) $A_r = \{s \in N; s \leq f(r)\}$ está contido no conjunto imagem de f, para todo $r \in N$. Mostre que f é sobrejetora.

283) (UNICAMP-93) Determine o número m de modo que o gráfico da função $y = x^2 + mx + 8 - m$ seja tangente ao eixo dos x. Faça o gráfico da solução (ou das soluções) que você encontrar para o problema.

284) (ITA-71) Se f é uma função real de variável real dada por $f(x) = x^2$, então $f(x^2 + y^2)$ é igual a:

a) $f(f(x)) + f(y) + 2f(x)f(y)$ para todo x e y

b) $f(x^2) + 2f(f(x)) + f(x)f(y)$ para todo x e y

c) $f(x^2) + f(y^2) - f(x)f(y)$ para todo x e y

d) $f(f(x)) + f(f(y)) + 2f(x)f(y)$ para todo x e y

e) $f(f(x)) + 2f(y^2) + 2f(x)f(y)$ para todo x e y

285) (ITA-74) Sejam A, B e D subconjuntos não vazios do conjunto $\Re$ dos números reais. Sejam as funções $f: A \to B$ $(y = f(x))$, $g: D \to A$ $(x = g(t))$, e a função composta $(fog): E \to K$. Então os conjuntos E e K são tais que:

a) $E \subset A$ e $K \subset D$ b) $E \subset B$ e $K \supset A$

c) $E \supset D$, $D \neq E$ e $K \subset B$ d) $E \subset D$ e $K \subset B$

e) nenhuma das respostas anteriores

286) (ITA-85) Dadas as sentenças:

1- Sejam $f: X \to Y$ e $g: Y \to X$ duas funções satisfazendo $(gof)(x) = x$, para todo $x \in X$. Então f é injetiva, mas g não é necessariamente sobrejetiva.

2- Seja $f: X \to Y$ uma função injetiva. Então, $f(A) \cap f(B) = f(A \cap B)$, onde A e B são dois subconjuntos de X.

3- Seja f: X→Y uma função injetiva. Então, para cada subconjunto A de X, $f(A^c) \subset (f(A))^c$ onde $Ac = \{x \in X / x \notin A\}$ e $(f(A))^c = \{x \in Y / x \notin f(A)\}$. Podemos afirmar que está (estão) correta(s):
a) as sentenças nº 1 e nº 2.
b) as sentenças nº 2 e nº 3.
c) Apenas a sentença nº 1.
d) as sentenças nº 1 e nº 2.
e) Todas as sentenças.

287) (ITA-85) Considere as seguintes função: f(x) = x – 7/2 e g(x) = x^2 – 1/4 definidas para todo x real. Então, a respeito da solução da inequação |(gof)(x)| > (gof)(x), podemos afirmar que:
a) Nenhum valor de x real é solução.
b) Se x < 3 então x é solução.
c) Se x > 7/2 então x é solução.
d) Se x > 4 então x é solução.
e) Se 3 < x < 4 então x é solução.

288) (ITA-86) Consideremos as seguintes afirmações sobre uma função f: ℜ→ℜ.
1. Se existe x ∈ ℜ tal que f(x) ≠ f(– x) então f não é par.
2. Se existe x ∈ ℜ tal que f(– x) = – f(x) então f é ímpar.
3. Se f é par e ímpar então existe x ∈ ℜ tal que f(x) = 1.
4. Se f é ímpar então fof (f composta com f) é ímpar.

Podemos afirmar que estão corretas as afirmações de números.
a) 1 e 4 b) 1, 2 e 4 c) 1 e 3
d) 3 e 4 e) 1, 2 e 3

289) (ITA-86) Sejam *a*, *b* e *c* números reais dados com *a* < 0. Suponha que x_1 e x_2 sejam as raízes reais da função $y = ax^2 + bx + c$ e $x_1 < x_2$. Sejam $x_3 = -b/2a$ e $x_4 = -(2b + \sqrt{b^2 - 4ac}) / 4a$. Sobre o sinal de y podemos afirmar que:
a) y < 0, ∀x ∈ ℜ, $x_1 < x < x_3$
b) y < 0, ∀x ∈ ℜ, $x_4 < x < x_2$
c) y > 0, ∀x ∈ ℜ, $x_1 < x < x_4$
d) y > 0, ∀x ∈ ℜ, $x > x_1$
e) y < 0, ∀x ∈ ℜ, $x < x_3$

290) (ITA-88) Sejam f e g funções reais de variável real definidas por $f(x) = ln(x^2 - x)$ e $g(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x}}$. Então o domínio de fog é:
a)]0, e[d)]– 1, 1[
b)]0, 1[e)]1, +∞[
c)]e, e + 1[

291) (ITA-90) Seja f: ℜ→ℜ a função definida por

$$f(x) = \begin{cases} x + 2, \text{se } x \le -1 \\ x^2, \text{se } -1 < x \le 1 \\ 4, \text{se } x > 1 \end{cases}$$

Lembrando que se A⊂ ℜ então $f^{-1}(A) = \{x \in \Re : f(x) \in A\}$ considere as afirmações:
I- f não é injetora e $f^{-1}([3, 5]) = \{4\}$
II- f não é sobrejetora e $f^{-1}([3, 5]) = f^{-1}([2, 6])$
III- f é injetora e $f^{-1}([0, 4]) = [-2, +\infty[$
Então podemos garantir que:
a) Apenas as afirmações II e III são falsas;
b) As afirmações I e III são verdadeiras;
c) Apenas a afirmação II é verdadeira;
d) Apenas a afirmação III é verdadeira;
e) Todas as afirmações são falsas.

292) (ITA-90) Seja a função f: ℜ – {2} → ℜ – {3} definida por $f(x) = \frac{2x - 3}{x - 2} + 1$. Sobre sua inversa podemos garantir que:
a) não está definida pois f é não injetora.
b) não está definida pois f não é sobrejetora.
c) está definida por $f^{-1}(y) = \frac{y - 2}{y - 3}$, y ≠ 3.
d) está definida por $f^{-1}(y) = \frac{y + 5}{y - 3} - 1$, y ≠ 3.
e) está definida por $f^{-1}(y) = \frac{2y - 5}{y - 3}$, y ≠ 3.

293) (ITA-90) Sejam as funções f e g dadas por:

$$f: \Re \to \Re, f(x) = \begin{cases} 1 \text{ se } |x| < 1 \\ 0 \text{ se } |x| \ge 1 \end{cases}$$

$$g: \Re - \{1\} \to \Re, g(x) = \frac{2x - 3}{x - 1}$$

Sobre a composta (fog)(x) = f(g(x)) podemos garantir que:
a) se $x \ge \frac{3}{2}$, f(g(x)) = 0
b) se $1 < x < \frac{3}{2}$, f(g(x)) = 1
c) se $\frac{4}{3} < x < 2$, f(g(x)) = 1
d) se $1 < x \le \frac{4}{3}$, f(g(x)) = 1
e) n.d.a

294) (ITA-91) Considere as afirmações:
I- Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função qualquer, então a composição gof é uma função par.
II- Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função par e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função ímpar, então a composição fog é uma função par.
III- Se $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar e inversível então $f^{-1}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função ímpar.
Então:
a) Apenas a afirmação I é falsa;
b) Apenas as afirmações I e II são falsas;
c) Apenas a afirmação III é verdadeira;
d) Todas as afirmações são falsas;
e) n.d.a.

295) (ITA-91) Se $A = \{x \in \mathbb{R}: |x^2 + x + 1| \leq |x^2 + 2x - 3|\}$, então temos:
a) $A = [-2, \frac{1}{2}] \cup [4, +\infty[$
b) $A = [\frac{1}{2}, 4]$
c) $A = [-3, 1]$
d) $A =]-\infty, -3] \cup [1, +\infty[$
e) n.d.a.

296) (ITA-92) Dadas as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e $g: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, ambas estritamente decrescentes e sobrejetoras, considere h = fog. Então podemos afirmar que:
a) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
b) h é estritamente decrescente, inversível e sua inversa é estritamente crescente.
c) h é estritamente crescente, mas não necessariamente inversível.
d) h é estritamente crescente, inversível e sua inversa é estritamente decrescente.
e) nda

297) (ITA-93) Seja $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função não nula, impar e periódica de período p. Considere as seguintes afirmações:
I. $f(p) \neq 0$
II. $f(-x) = -f(x + p)$, $\forall x \in R$
III. $f(-x) = f(x - p)$, $\forall x \in R$
IV. $f(x) = -f(-x)$, $\forall x \in R$
Podemos concluir que:
a) I e II são falsas. b) I e III são falsas.
c) II e III são falsas. d) I e IV são falsas.
e) II e IV são falsas.

298) (ITA-94) Dadas as funções reais de variável real $f(x) = mx + 1$ e $g(x) = x + m$, onde m é uma constante real com $0 < m < 1$, considere as afirmações:
I- $(fog)(x) = (gof)(x)$, para algum $x \in R$.
II- $f(m) = g(m)$
III- Existe $a \in R$ tal que $(fog)(a) = f(a)$.
IV- Existe $b \in R$ tal que $(fog)(b) = mb$.
V- $0 < (gog)(m) < 3$
Podemos concluir
a) Todas são verdadeiras.
b) Apenas quatro são verdadeiras.
c) Apenas três são verdadeiras.
d) Apenas duas são verdadeiras.
e) Apenas uma é verdadeira.

299) (ITA-96) Considere as funções reais f e g definidas por:
$f(x) = \frac{1 + 2x}{1 - x^2}$, $x \in R - \{-1, 1\}$ e $g(x) = \frac{x}{1 + 2x}$, $x \in R - \{-1/2\}$. O maior subconjunto de R onde pode ser definida a composta fog, tal que $(fog)(x) < 0$, é:
a) $]-1, -1/2[\cup]-1/3, -1/4[$
b) $]-\infty, -1[\cup]-1/3, -1/4[$
c) $]-\infty, -1[\cup]-1/2, 1[$
d) $]1, \infty[$
e) $]-1/2, -1/3[$

300) (ITA-96) Seja $f: R \to R$ definida por:
$$f(x) = \begin{cases} 3x + 3, x \leq 0 \\ x^2 + 4x + 3, x > 0 \end{cases}$$
a) f é bijetora e $(fof)(-2/3) = f^{-1}(21)$.
b) f é bijetora e $(fof)(-2/3) = f^{-1}(99)$.
c) f é sobrejetora mas não é injetora.
d) f é injetora mas não é sobrejetora.
e) f é bijetora e $(fof)(-2/3) = f^{-1}(3)$.

301) (ITA-97) Se Q e I representam, respectivamente, o conjunto dos números racionais e o conjunto dos números irracionais, considere as funções $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definidas por
$$f(x) = \begin{cases} 0, \text{se } x \in Q \\ 1, \text{se } x \in I \end{cases} \qquad g(x) = \begin{cases} 1, \text{se } x \in Q \\ 0, \text{se } x \in I \end{cases}$$
Seja J a imagem da função composta $fog: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Podemos afirmar que:
a) $J = \mathbb{R}$ b) $J = Q$ c) $J = \{0\}$
d) $J = \{1\}$ e) $J = \{0, 1\}$

302) (ITA-97) Sejam f, g : $\Re \to \Re$ funções tais que:
$g(x) = 1 - x$ e $f(x) + 2f(2 - x) = (x - 1)^3$
para todo $x \in \Re$. Então $f[g(x)]$ é igual a:
a) $(x - 1)^3$ b) $(1 - x)^3$ c) x^3 d) x e) $2 - x$

303) (ITA-98) Sejam as funções $f: \Re \to \Re$ e $g: A \subset \Re \to \Re$, tais que $f(x) = x^2 - 9$ e $(fog)(x) = x - 6$,
em seus respectivos domínios. Então, o domínio A da função g é:
a) $[-3, +\infty[$ b) $\Re$ c) $]-5, +\infty[$
d) $]-\infty, -1[\cup [3, +\infty[$ e) $]-\infty, \sqrt{6}[$

304) (ITA-99) Sejam *f, g, h*: $R \to R$ funções tais que a função composta $h \circ g \circ f: R \to R$ é a função identidade. Considere as afirmações:
I - A função *h* é sobrejetora.
II- Se $x_0 \in R$ é tal que $f(x_0) = 0$, então $f(x) \neq 0$ para todo $x \in R$ com $x \neq x_0$.
III- A equação $h(x) = 0$ tem solução em *R*.
Então:
) Apenas a afirmação (I) é verdadeira.
) Apenas a afirmação (II) é verdadeira.
) Apenas a afirmação (III) é verdadeira.
) Todas as afirmações são verdadeiras.
e) Todas as afirmações são falsas.

305) (ITA-99) Considere as funções *f* e *g* definidas por $f(x) = x - 2/x$, para $x \neq 0$ e $g(x) = \frac{x}{x+1}$, para $x \neq -1$. O conjunto de todas a s soluções da inequação $(gof)(x) > g(x)$ é:
a) $]1, +\infty[$ b) $]-\infty, -2[$ c) $[-2, -1[$
d) $]-1, 1[$ e) $]-2, -1[\cup]1, +\infty[$

306) (ITA-01) O conjunto de todos os valores de *m* para os quais a função
$$f(x) = \frac{x^2 + (2m+3)x + (m^2+3)}{\sqrt{x^2 + (2m+1)x + (m^2+2)}}$$
está definida e é não negativa para todo x real é:
a) $\left[\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right[$ b) $\left]\frac{1}{4}, +\infty\right[$ c) $\left]0, \frac{7}{4}\right[$
d) $\left]-\infty, \frac{1}{4}\right]$ e) $\left]\frac{1}{4}, \frac{7}{4}\right[$

307) (ITA-02) Sejam a, b, c reais não-nulos e distintos, $c > 0$. Sendo par a função dada por $f(x) = \frac{ax + b}{x + b}$, $-c < x < c$, então f(x), para $-c < x < c$, é constante e igual a:
a) a + b b) a + c c) c d) b e) a

308) (ITA-02) Os valores de $x \in R$, para os quais a função real por $f(x) = \sqrt{5 - ||2x - 1| - 6|}$ está definida, formam o conjunto.
a) [0, 1] d) [- 5, 6]
b) [- 5, 6] e) $(-\infty, 0] \cup [1, 6]$
c) $[-5, 0] \cup [1, \infty)$

309) (ITA-03) Considere uma função $f : IR \to IR$ não-constante e tal que $f(x + y) = f(x) f(y)$, $\forall x, y \in IR$.
Das afirmações:
I - $f(x) > 0$, $\forall x \in IR$.
II - $f(nx) = [f(x)]^n$, $\forall x \in IR$, $\forall n \in IN^*$.
III - *f* é par.
é (são) verdadeira(s):
a) apenas I e II. d) todas.
b) apenas II e III. e) nenhuma.
c) apenas I e III.

310) (ITA-03) Mostre que toda função $f : IR \setminus \{0\} \to IR$, satisfazendo $f(xy) = f(x) + f(y)$ em todo seu domínio, é par.

311) (ITA-04) Sejam as funções *f* e g definidas em $\mathbb{R}$ por $f(x) = x^2 + \alpha x$ e $g(x) = -(x^2 + \beta x)$, em que α e β são números reais. Considere que estas funções são tais que:

f		G	
Valor mínimo	Ponto de mínimo	Valor máximo	Ponto de máximo
-1	< 0	$\frac{9}{4}$	> 0

Então, a soma de todos os valores de x para os quais **(fog) (x) = 0** é igual a:
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

312) ITA-05) Considere os conjuntos S = {0, 2, 4, 6}, T = {1, 3, 5} e U = {0, 1} e as afirmações:
I – $\{0\} \in S$ e $S \cap U \neq \varnothing$.
II – $\{2\} \subset S \setminus U$ e $S \cap T \cap U = \{0, 1\}$.
III – Existe uma função $f : S \to T$ injetiva.
IV – Nenhuma função $g : T \to S$ é sobrejetiva.
Então, é(são) verdadeira(s)
a) apenas I. b) apenas IV.
c) apenas I e IV. d) apenas II e III.

e) apenas III e IV.

313) (ITA-05) Seja D = IR \ {1} e f : D → D uma função dada por $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$

Considere as afirmações:
I – f é injetiva e sobrejetiva.
II – f é injetiva, mas não sobrejetiva.
III – $f(x) + f\left(\frac{1}{x}\right) = 0$, para todo $x \in D$, $x \neq 0$.
IV – f(x) . f(–x) = 1, para todo x ∈ D.
Então, são verdadeiras:
a) apenas I e III. b) apenas I e IV c) apenas II e III
d) apenas I, III e IV e) apenas II, III e IV

314) (ITA-05) Determine todos os valores reais de a para os quais a equação $(x-1)^2 = |x-a|$ admita exatamente três soluções distintas.

315) (IME-90) Seja f uma função definida nos inteiros positivos satisfazendo:
f(1) = 1
f(2n) = 2.f(n) + 1
f(f(n)) = 4n + 3
Calcule f(1990).

316) (IME-93) Considere uma função L: $\Re^* \to \Re$ que satisfaz:
1. L é crescente, isto é, para quaisquer $0 < x < y$ tem-se $L(x) < L(y)$;
2. $L(xy) = L(x) + L(y)$ para quaisquer $x, y > 0$.
Mostre que:
a) L(1) = 0;
b) $L(1/x) = -L(x)$, para todo $x > 0$;
c) $L(x/y) = L(x) - L(y)$ para quaisquer $x, y > 0$;
d) $L(x^n) = nL(x)$ para todo $x > 0$ e natural n;
e) $L(\sqrt[n]{x}) = L(x)/n$ para todo $x > 0$ e natural n;
f) $L(x) < 0 < L(y)$ sempre que $0 < x < 1 < y$.

317) (IME-94) Seja f: R → R uma função quadrática tal que $f(x) = ax^2 + bx + c$, $a \neq 0$, $\forall x \in R$. Sabendo que $x_1 = -1$ e $x_2 = 5$ são raízes e que f(1) = -8
Pede-se:
a) Determinar a, b, c
b) Calcular f(0)
c) Verificar se f(x) apresenta máximo ou mínimo, justificando a resposta
d) As coordenadas do ponto extremo
e) O esboço do gráfico

318) (IME-96) Seja f uma função real tal que $\forall x, a \in \Re$: $f(x+a) = \frac{1}{2} + \sqrt{f(x) - [f(x)]^2}$. f é periódica? Justifique.

319) (IME-96) Dados dois trinômios do segundo grau:
$y = ax^2 + bx + c$ (I)
$y = a'x^2 + b'x + c'$ (II)
Considere, sobre o eixo Ox, os pontos A e B cujas abscissas são as raízes do trinômio (I) e A'B' os pontos cujas abscissas são as raízes do trinômio (II). Determine a relação que deve existir entre os coeficientes a, b, c, a', b', c' de modo que A'B' divida o segmento AB harmonicamente.

320) (IME-99) Sejam as funções g(x) e h(x) assim definidas: g(x) = 3x – 4 ; $h(x) = f(g(x)) = 9x^2 - 6x + 1$. Determine a função f(x) e faça seu gráfico.

321) (IME-04) Seja uma função $f: \Re - \{0\} \to \Re$, onde $\Re$ representa o conjunto dos números reais, tal que $f(a/b) = f(a) - f(b)$ para a e b pertencentes ao domínio de f. Demonstre que f é uma função par.

322) (IME) Sejam q e r funções cujos domínios é o conjunto dos inteiros maiores que zero. Sabe-se que q(1) = 1, r(1) = 0 e: se $r(n) < 2q(n) + 1$, então $\begin{cases} r(n+1) = r(n) + 1 \\ q(n+1) = q(n) \end{cases}$;

se $r(n) = 2q(n) + 1$, então $\begin{cases} r(n+1) = 0 \\ q(n+1) = q(n) + 1 \end{cases}$

Determine q(5) e r(5).

323) A função f é tal que $f(2x + 3) = 3x + 2$. Nestas condições, $f(3x - 2)$ é igual a:
a) 2x + 3 b) 3x + 2 c) (2x + 3)/2
d) (9x + 1)/2 e) (9x – 1)/3

324) Sendo f uma função real de variável real tal que f(x + 3) = 2x + 3, prove que f(2x + 3) = 4x – 3.

325) Dadas as funções f(x) = 4x – 5 e g(x) = 2x – 5k, ocorrerá $gof(x) = fog(x)$ se e somente se k for igual a:
a) – 1/3 b) 1/3 c) 0 d) 1 e) – 1

326) Se $f(x) = 1 - 1/x$, com $x \neq 0$, então determine o valor de
$R = 96.f(2).f(3).f(4). \ldots .f(14).f(15).f(16)$.

327) Sejam as funções reais $f(x) = 3x - 5$ e $fog(x) = x^2 - 3$. Determinar a lei da função g.

328) Sejam as funções reais $g(x) = 3x - 2$ e $fog(x) = 9x^2 - 3x + 1$. Determinar a lei da função f.

329) Sejam f e g funções reais definidas por
$f(x) = \begin{cases} x^2 + 2x + 4 & se \quad x \geq 1 \\ 3x - 4 & se \quad x < 1 \end{cases}$ e $g(x) = x - 3$.
Obter a lei que define fog.

330) Sejam as funções reais fog e g definidas por
$(fog)(x) = \begin{cases} 4x^2 - 6x - 1 & se \quad x \geq 1 \\ 4x + 3 & se \quad x < 1 \end{cases}$ e $g(x) = 2x - 3$
Obter a lei que define f.

331) Prove os seguintes teoremas:
a) "Se f: A→B e g: B→C são funções injetoras, então a função composta gof: A→C também é injetora"
b) "Se f: A→B e g: B→C são funções sobrejetoras, então a função composta gof: A→C também é sobrejetora"
c) "Se f: A→B e g: B→A satisfazem $gof = I_A$, então f é injetora e g é sobrejetora"
d) "Sejam f: A→B e g: B→A satisfazendo $gof = I_A$ e $fog = I_B$. Então, f é bijetora e $g = f^{-1}$"
e) "Se as funções f de A em B e g de B em C são bijetoras então $(gof)^{-1} = f^{-1}og^{-1}$"

332) Seja $f: \Re^* \to \Re: x \to x - \sqrt{x}$. Então $f(\Re^+)$ é igual a:
a) $\Re^*$ b) $\Re$ c) $[-1/4, +\infty[$
d) vazio e) $]-1/2, +\infty[$

333) Seja f: N → N definida por:
$f(n) = \begin{cases} n - 3 & n \geq 1000 \\ f(f(n+6)) & n < 1000 \end{cases}$
Então o valor de $f(1992) - f(1)$ é:
a) 989 b) 992 c) 1988 d) 1991 e) indeterminado

334) Seja f: ℜ→ℜ função periódica com período 3, tal que
$f(x) = x^2$ para cada $-1 < x \leq 2$. Então $f(-4)$ vale:
a) −1 b) 0 c) 1 d) 4 e) 16

335) Assuma que f é uma função real tal que $f(x) = f(-x)$ e $f(x + 2) = 2f(x)$ para todo x. Então f(5) é igual a:

336) Seja f uma função real tal que: $f(2) = 3$ e $f(a + b) = f(a) + f(b) + ab$, para todo a e b. Calcule f(11).

337) Seja f uma função definida em $N_0 = \{0, 1, 2, 3, \ldots\}$ e com valores em N_0, tal que para $n, m \in N_0$ e $m \leq 9$, $f(10n + m) = f(n) + 11m$ e $f(0) = 0$. Quantas soluções existem para a equação $f(x) = 1995$?
a) Nenhuma b) 1 c) 2
d) 11 e) infinitas

338) Dados $f(x) = \frac{x}{1-x}$ e a um número real. Se $x_0 = a$, $x_1 = f(x_0)$, $x_2 = f(x_1)$, ..., $x_{1996} = f(x_{1995})$, e $x_{1996} = 1$, calcule a.
a) 0 b) 1/1997 c) 1995
d) 1995/1996 e) nda

339) Seja f uma função de inteiros não-negativos para inteiros não-negativos tal que: $f(n.m) = nf(m) + mf(n)$, $f(10) = 19$, $f(12) = 52$ e $f(15) = 26$. Determine f(8).
a) 12 b) 24 c) 36 d) 48 e) 60

340) Seja $f_1(x)$, i = 1, 2, 3, ... definida por
$f_1 = \frac{1}{1-x}$ e $f_{i+1}(x) = f_i(f_1(x))$. Então, $f_{1998}(1998)$ é:
a) 0 b) 1998 c) −1/1997
d) 1997/1998 e) nda

341) Assuma que $f(1) = 0$, e que para todos os inteiros m e n, $f(m + n) = f(m) + f(n) + 3(4mn - 1)$. Determine f(19).

342) Dado que $f\left(\frac{1}{x-1}\right) = \frac{1}{x}$, então f(x) é:
a) $(x-1)^{-1}$ b) $x/(x+1)$
c) $(x+1)/x$ d) $1/x - x$

343) Suponha que $f(x) = 1 - \frac{1}{(1-x)}$. Determine $f(f(f(\ldots f(3)\ldots)))$, onde existem 1998 f's na composição.

a) 3 b) 3/2 c) 2/3 d) 1

344) Se $f(x)=\frac{3x}{3x+4}$ e $f(g(x)) = x$, então $g(x) = ?$
a) $(3x + 4)/(3x)$ b) $(3x)/(3x - 4)$
c) $(4x)/(3 - 3x)$ d) $(3x + 4)/4$
e) nda

345) Seja $f(x)=\frac{2x+3}{5x-1}$. Sabe-se que a inversa de f é uma função que pode ser escrita da forma $f^{-1}(x)=\frac{x+b}{cx+d}$. Determine o valor de $b + c + d$.
a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) nda

346) Suponha que $f(x + y) = f(x).f(y)$ para todos os números reais x e y. Se $f(1) = 8$, calcule $f(2/3)$.
a) 1/8 b) 2/3 c) 4 d) 8 e) nda

347) Uma certa função satisfaz $f(x) + 2.f(6 - x) = x$ para todos os números reais x. O valor de $f(1)$ é.
a) 3 b) impossível determinar c) 2
d) 1 e) – 9

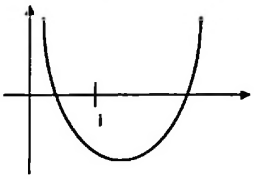
348) Se $f(x)$ é uma função que satisfaz $f(2x + 1) = 2f(x) + 1$ para todo x, a se $f(0) = 2$, então $f(3) =$
a) 5 b) 9 c) 11 d) 13 e) 15

349) Se $f(N + 1) = (-1)^{N+1}.N - 2.f(N)$ para os inteiros $N \geq 1$, e $f(1) = f(1989)$, então o valor de $f(1) + f(2) + f(3) + ... + f(1988)$ é igual a:
a) – 992/3 b) – 993/3 c) – 996/3
d) – 995/3 e) – 994/3

350) Se as equações (1) $x^2 + ax + b = 0$ e (2) $x^2 + cx + d = 0$ possuem exatamente uma raiz em comum, e $abcd \neq 0$, então a outra raiz da equação (2) é:
a) $d.(c - a)/(b - d)$ b) $d.(a + c)/(b + d)$
c) $c.(b + c)/(a - d)$ d) $(a - c)/(b - d)$
e) $c.(a + c)/(b - d)$

351) Se $f(x)=\frac{1+x}{1-3x}$, $f_1(x) = f(f(x))$, $f_2(x) = f(f_1(x))$, e em geral $f_n(x) = f(f_{n-1}(x))$, então $f_{1993}(3) =$
a) 3 b) 1993 c) 1/2 d) 1/5 e) -2^{-1993}

352) Suponha que o gráfico de $y = ax^2 + bx + c$ é dado pela figura abaixo. Então entre as expressões: ab, ac, b, $a + b + c$, $a - b + c$ quantas são positivas?



a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) 5

353) Suponha que $f(x)$ é uma função com domínio nos números reais e contra-domínio nos números reais tal que $f(x + f(x)) = 4.f(x)$ e $f(1) = 4$. Qual é o valor de $f(5)$?
a) 16 b) 18 c) 20 d) 22 e) 24

354) Suponha que $f(x)$ é uma função tal que para todo número real x:
(i) $f(x) + f(1 - x) = 11$;
(ii) $f(1 + x) = 3 + f(x)$.
Então $f(x) + f(-x)$ deve ser igual a.
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) 12

355) Se $f(x)$ satisfaz $2.f(x) + f(1 - x) = x^2$ para todo x, então $f(x) =$
a) $(x^2 - 3x + 1)/2$ b) $(x^2 + 8x - 3)/9$
c) $(4x^2 + 3x - 2)/6$ d) $(x^2 - 2x - 1)/3$
e) $(x^2 + 9x - 4)/9$

356) Seja $f: \Re \to \Re$, não identicamente nula, tal que $f(x).f(y) = [f(x + y) + f(x - y)]/2$, para todos os números reais x e y:
a) Mostre que $f(0) = 1$, $f(2) = -1$, $f(3) = 0$ e $f(4) = 1$.
b) Mostre que $f(x + 4) = f(x)$, para todo x real.

357) Seja f uma função satisfazendo a equação $f(x) + 1999.f(2 - x) = (x - 1)^3$. Então o valor de $f(0)$ é:

358) Sejam a e b números reais e seja $f(x) = 1/(ax + b)$. Dado que existem três números reais distintos x_1, x_2, x_3 tais que $f(x_1) = x_2$, $f(x_2) = x_3$ e $f(x_3) = x_1$, prove que $a = -b^2$.

359) Uma função real f satisfaz, para todo x, $f(x+1)=\frac{1+f(x)}{1-f(x)}$. Demonstre que f é periódica.

360) Dado $f(11) = 11$ e $f(x+3) = \frac{f(x)-1}{f(x)+1}$ para todo x, determine f(1979).

361) Seja F uma função real decrescente definida para todo os valores de x com $0 \le x \le 1$ e verificando:

a) $F\left(\frac{x}{3}\right) = \frac{F(x)}{2}$ b) $F(1-x) = 1 - F(x)$.

Calcular $F\left(\frac{1}{13}\right)$.

362) Considere as funções f de satisfazem a igualdade $f(x+4) + f(x-4) = f(x)$, para todo número real x. Cada uma destas funções é periódica e existe um menor período positivo comum p para todas elas. Calcular p.

363) Suponha que f satisfaça a equação:

$2f(x) + 3f\left(\frac{2x+29}{x-2}\right) = 100x + 80$. Calcule $f(3)$.

364) Sejam f, g: R → R funções contínuas tais que $f(a) < g(a)$ e $f(b) > g(b)$. Mostre que existe $c \in (a, b)$ tal que $f(c) = g(c)$.

365) Seja f: R → R contínua e tal que $f(x).f(f(x)) = 1$, para todo x. Se $f(1000) = 999$, calcule $f(500)$.

366) Seja f uma função real de variável real que verifica as condições:
(i) $f(10 + x) = f(10 - x)$
(ii) $f(20 + x) = -f(20 - x)$
para todos os valores reais de x. Demonstre que f é uma função ímpar e periódica.

367) Determine se existe uma função injetora $f: \Re \to \Re$ com a propriedade: $f(x^2) - f^2(x) \ge 1/4$.

368) Uma função $f: \Re \to \Re$ satisfaz: $f(2 + x) = f(2 - x)$ e $f(7 + x) = f(7 - x)$, para todo número real x. Se $x = 0$ é uma raiz da equação $f(x) = 0$, qual é o menor número de raízes dessa equação no intervalo $-100 \le x \le 100$?

369) A função f satisfaz a equação funcional: $f(x) + f(y) = f(x + y) - xy - 1$ para todo par x, y de números reais. Se $f(1) = 1$, então o número de inteiros $n \ne 1$ para os quais $f(n) = n$ é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) infinito

370) Seja $f: Z^* \to Z^*$ uma função satisfazendo às seguintes condições:
i. $f(a.b) = f(a) + f(b)$
ii. $f(x) = 0$ se o algarismo das unidades de x é 4, $\forall x \in Z^*$.
Encontre f(2008).

371) Seja f uma função definida no conjunto dos números inteiros positivos por
$f(3n) = 1$, se $n = 1$
$f(3n) = n + f(3n - 3)$, se $n > 1$.
Encontre o valor de f(1998).

REPRESENTAÇÃO DECIMAL

Todo número inteiro possui uma única representação decimal, ou seja, um número inteiro n admite uma única representação da forma:

$$\boxed{n = a_m.10^m + a_{m-1}.10^{m-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0}$$

onde os a_i são tais que $0 \le a_i \le 9$, $i = 0, 1, 2, ..., m$.

Os termos a_i, $0 \le a_i \le 10$ são chamados de algarismos, dígitos ou cifras. Se for informado que um número inteiro possui, por exemplo, n dígitos, o dígito mais a esquerda (também conhecido como mais significativo) não pode valer zero. Os dígitos recebem nomes de acordo com a sua ordem. O dígito a_0 é chamado de dígito das unidades, a_1 de dígito das dezenas, a_2 de dígito das centenas, a_3 de dígito dos milhares, a_4 de dígito dos milhões e assim por diante. A ordem de cada dígito, por sua vez, é igual ao expoente da potência de 10 de cada dígito. Por exemplo, o dígito das unidades é o de ordem zero e o dígito das centenas é o de ordem dois.

Exemplos:

1) Representar o número 615243 na forma decimal.

Solução:

$615243 = 6.10^5 + 1.10^4 + 5.10^3 + 2.10^2 + 4.10 + 3.$

2) Determinar o número n de 3 algarismos, tal que se for colocado o dígito 8 à direita de n e o dígito 1 à esquerda de n, temos como resultado o número 28n.

Solução:

$\therefore n = (abc)_{10} = a.10^2 + b.10 + c$

$\therefore 28n = (1abc8)_{10} = 1.10^4 + a.10^3 + b.10^2 + c.10 + 8 = 10^4 + 10(a.10^2 + b.10 + c) + 8$

Ou seja: $28n = 10n + 10008 \Rightarrow 18n = 10008 \Rightarrow n = 556$

3) (UFMG-2002) A soma de dois números inteiros positivos, com dois algarismos cada um, é 58. Os quatro algarismos são distintos entre si. A soma desses quatro algarismos é um número

a) menor que 9. b) múltiplo de 3. c) primo. d) maior que 30.

Solução:

Sejam $(ab)_{10}$ e $(cd)_{10}$ os números. Assim: $(ab)_{10} + (cd)_{10} = 58 \Rightarrow$ o dígito das unidades de b + d é 8.

Se b + d > 9, então a única possibilidade é b − d = 9, que é impossível pois os algarismos são distintos.

Logo teremos b + d = 8 e a + c = 5 $\Rightarrow$ a + b + c + d = 13, que é um número primo.

4) (UFPE-2002) Seja S a soma dos dígitos de $10^{111} - 111$. Assinale a soma dos dígitos de S.

Solução:

A subtração é da forma:

$$\begin{array}{rcccccccc} & 1 & 0 & 0 & .. & 0 & 0 & 0 & 0 \\ - & & & & & & 1 & 1 & 1 \\ \hline & 9 & 9 & .. & 9 & 8 & 8 & 9 & \end{array}$$

Portanto: S = (108)(9) + 8 + 8 + 9 = 997. Logo, a soma dos dígitos de S é 9 + 9 + 7 = 25.

5) (UFPI-2002) Um número é formado por dois algarismos cuja soma é nove. Se invertermos a ordem dos algarismos iremos obter um novo número igual a 5/6 do original. Esse novo número obtido é:

a) 36 b) 45 c) 63 d) 72 e) 81

Solução:

Seja $(ab)_{10}$ o número. Pelo enunciado: $\frac{10b + a}{10a + b} = \frac{5}{6} \Rightarrow 60b + 6a = 50a + 5b \Rightarrow 55b = 44a \Rightarrow$

$5b = 4a \Rightarrow a = 5$ e $b = 4 \Rightarrow (ba)_{10} = 45$.

6) (PUC/PR-2001) Sejam A e B dois números de dois algarismos cada um e A < B. Sabendo-se que cada um desses números é igual ao triplo do produto de seus algarismos, qual a razão A/B?
a) 3/8 b) 1/2 c) 3/4 d) 5/8 e) 5/7
Solução:
Seja $(ab)_{10}$ a forma geral destes dois números. Assim:
$10a + b = 3ab \Rightarrow 9ab - 30a - 3b = 0 \Rightarrow (3a - 1)(3b - 10) = 10$
Existem duas possibilidades:

i) $\begin{cases} 3a - 1 = 2 \\ 3b - 10 = 5 \end{cases} \Rightarrow a = 1 \text{ e } b = 5$

ii) $\begin{cases} 3a - 1 = 5 \\ 3b - 10 = 2 \end{cases} \Rightarrow a = 2 \text{ e } b = 4$

Temos então $A = 15$ e $B = 24 \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{15}{24} \Rightarrow \frac{A}{B} = \frac{5}{8}$.

7) (PUC/PR-2004) Um número A é formado por três algarismos, abc: o algarismo das dezenas é a metade do das unidades, o das centenas é o triplo do das unidades. Invertendo-se a ordem dos algarismos daquele número, obtem-se um número B, cba, igual ao número A diminuído de 396. A soma A + B - 800 é igual a:
a) 22 b) 24 c) 26 d) 28 e) 30
Solução:
Segundo o enunciado temos as seguintes relações entre os dígitos de A: $c = 2b$ e $a = 3c$.
Portanto: $100a + 10b + c - (100c + 10b + a) = 396 \Rightarrow 99a - 99c = 396 \Rightarrow a - c = 4 \Rightarrow$
$2c = 4 \Rightarrow c = 2 \Rightarrow a = 6 \Rightarrow b = 1 \Rightarrow A + B - 800 = 612 + 216 - 800 = 28$.

) Determine a soma dos algarismos do número $(999.....995)^2$, onde o número 999.....995 tem 99 ígitos iguais a 9.
Solução:
$x = (10^{100} - 5)^2 = 10^{200} - 10.10^{100} + 25 = 10^{200} - 10^{101} + 25$.
Assim, x é um número da forma: 9999...9990000...0025, contendo 99 dígitos 9 e 99 dígitos 0.
Portanto: $S = 9.(99) + 2 + 5 = 898$

9) (OBM-97) O número N tem três algarismos. O produto dos algarismos de N é 126 e a soma dos dois últimos algarismos de N é 11. O algarismo das centenas de N é:
A) 2 B) 3 C) 6 D) 7 E) 9
Solução:
Seja $N = (abc)_{10}$. Pelo Enunciado temos que: $a.b.c = 126 = 2.3^2.7$ e $b + c = 11$.
A expressão $b + c = 9$ possui as seguintes possibilidades de resposta:
$2 + 9 = 11 \quad 3 + 8 = 11 \quad 4 + 7 = 11 \quad 5 + 6 = 11$
Como $a.b.c = 2.3^2.7$, então temos apenas duas possibilidades para os dígitos de N: {2, 9, 7} ou {3, 6, 7}
Assim, para que $b + c = 11$ temos que duas possibilidades:
i) $b = 2$ e $c = 9 \Rightarrow a = 7$
ii) $b = 9$ e $c = 2 \Rightarrow a = 7$

10) (OBM-2000) Um certo número N de dois algarismos é o quadrado de um número natural. Invertendo-se a ordem dos algarismos desse número, obtém-se um número ímpar. A diferença entre os dois números é o cubo de um número natural. Podemos afirmar que a soma dos algarismos de N é:
A) 7 B) 10 C) 13 D) 9 E) 11
Solução:

Seja N = 10a − b. O número 10b + a (obtido invertendo-se os algarismos de N) é ímpar, logo a é ímpar. Portanto N = 16 ou N = 36, pois 16 e 36 são os únicos quadrados perfeitos de dois dígitos cujo algarismo das unidades é ímpar. Mas 61 − 16 = 45, que não é um cubo perfeito, e 63 − 36 = 27 = 3^3.
Então N = 36 e 3 + 6 = 9.

11) Um número inteiro de seis dígitos inicia com 1. Se este dígito é movido do extremo esquerdo para o extremo esquerdo sem mudar a ordem dos outros dígitos, o novo número é 3 vezes o original. A soma dos dígitos dos números é:
Solução:
Sejam $n = (1abcde)_{10}$ e $m = (abcde1)_{10}$ os números. Assim: $n = 10^5 + (abcde)_{10}$ e $m = (abcde)_{10}.10 + 1$.
Substituindo: $m = 10(n - 10^5) + 1 \Rightarrow m = 10n - 10^6 + 1$.
Como $m = 3n \Rightarrow 3n = 10n - 10^6 + 1 \Rightarrow 7n = 10^6 - 1 = 999999 \Rightarrow n = 142857$.
Desta forma, a resposta é 27.

12) Prove que o número $\underbrace{11...11}_{2n\ 1's} - \underbrace{222...22}_{n\ 2's}$ é, para todo n natural, um quadrado perfeito.

Solução:
Inicialmente notemos que: $11...1 = (99...9)/9 = (10^{2n} - 1)/9$
$222...22 = 2(111...11) = 2(999...99)/9 = 2(10^n - 1)/9$

Assim: $111...11 - 222...22 = \dfrac{10^{2n}-1}{9} - \dfrac{2.10^n - 2}{9} = \dfrac{10^{2n} - 2.10^n + 1}{9} = \left(\dfrac{10^n - 1}{3}\right)^2 = \left(\underbrace{333...33}_{n\ 3's}\right)^2$

13) (Olimpíada da Índia-98) Existe algum inteiro positivo N tal que o número formado pelos últimos dois dígitos da soma 1 + 2 + 3 + ... + N é 98?
Solução:

Suponha que exista N tal que $1 + 2 + 3 + ... + N = ...98$. Assim: $\dfrac{N(N+1)}{2} = ...98 \Rightarrow N(N+1) = ...96$

Como o dígito das unidades de N(N + 1) é 6, então as únicas possibilidades para o algarismo das unidades de N são 2 ou 7. Seja x o algarismo das dezenas de N. Assim, podemos armar o algoritmo para multiplicar N e N + 1:

$$\begin{array}{rrrr} & \ldots & a & 3 \\ \times & \ldots & a & 2 \\ \hline & \ldots & 2a & 6 \\ & \ldots & 3a & \\ \hline & \ldots & 5a & 6 \end{array} \qquad \begin{array}{rrrr} & \ldots & \overset{5}{a} & 8 \\ \times & \ldots & a & 7 \\ \hline & \ldots & 7a+5 & 6 \\ & \ldots & 8a & \\ \hline & \ldots & 15a+5 & 6 \end{array}$$

Note que nos dois casos o dígito das dezenas de N(N + 1) é sempre múltiplo de 5, não podendo valer 9. Assim, não existe nenhum inteiro N tal que o número formado pelos últimos dois dígitos da soma 1 + 2 + 3 + ... + N é 98.

14) Mostre que 1 é o único inteiro positivo que é igual a soma dos quadrados dos seus dígitos.
Solução:
a) Como $9^2 + 9^2 + 9^2 + 9^2 = 324 \Rightarrow$ o número deve possuir menos do que 4 dígitos, ou seja, $n = (xyz)_{10}$
$\therefore 100x + 10y + z = x^2 + y^2 + z^2 \Rightarrow (100 - x)x + (10 - y)y = z(z - 1)$
Como o valor máximo de z é 9, então o valor máximo de $z(z - 1)$ é 72. Como $100 - x \geq 91$, temos que $x = 0 \Rightarrow (10 - y)y = z(z - 1)$.
Os valores possíveis de $(10 - y)y$ são: 0, 9, 16, 21, 24, 25
Os valores possíveis de $z(z - 1)$ são: 0, 2, 6, 12, 20, 30, 42, 56, 72
Assim, $(10 - y)y = z(z - 1) = 0 \Rightarrow y = 0$ e $z = 1$.

15) (Seletiva Brasileira Olimpíada do Cone Sul-96) Prove que toda progressão aritmética de números naturais contém dois termos cuja soma dos algarismos são iguais.

Solução:

Sabemos que toda progressão aritmética pode ser expressa da forma $a_n = a + nr$, a é o primeiro termo e r é a razão da PA. Sejam x o número de dígitos de a e y o número de dígitos de r.

Calculemos agora os termos de ordem 10^x e 10^{x+1}: $a_{10^x} = (10^x)r + a$ e $a_{10^{x+1}} = (10^{x+1})r + a$.

Desde que a possui x dígitos e os últimos x dígitos de $(10^x)r$ são iguais a zero, então o número $a_{10^x} = (10^x)r + a$ é da forma $[ra]_{10}$, ou seja, os primeiros y dígitos são os dígitos de r e os últimos x dígitos são os dígitos de a.

Da mesma forma, como a possui x dígitos e os últimos x + 1 dígitos de $(10^{x+1})r$ são iguais a zero, então o número $a_{10^{x+1}} = (10^{x+1})r + a$ é da forma $[r0a]_{10}$, ou seja, os primeiros y dígitos são os dígitos de r, depois temos um zero e os últimos x dígitos são os dígitos de a.

Evidentemente, a soma dos dígitos de a_{10^x} e $a_{10^{x+1}}$ são iguais, uma vez que, com exceção de um dígitos zero em $a_{10^{x+1}}$, todos os outros dígitos destes números são todos iguais.

Na verdade, em uma PA de termos naturais existem infinitos termos com a mesma soma dos dígitos, uma vez que todos os termos da forma $a_{10^y} = (10^y)r + a$, com $y \geq x$ (x o número de dígitos de a), possuem a mesma soma dos dígitos.

16) (Olimpíada de Maio-98) Inês escolheu quatro dígitos distintos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Formou com eles todos os possíveis números de quatro cifras distintas e somou todos esses números de quatro cifras. O resultado é 193314. Encontre os quatro dígitos que Inês escolheu.

Solução:

Digamos que os números escolhidos são a, b, c e d.

Sabemos que todas as permutações destes 4 números é igual a 4! = 24.

Fixando um número por vez em cada posição, temos então a permutações dos outros 3, que é igual a 3! = 6, ou seja, existem 6 números iniciando com 1, 6 terminando em b, 6 com c como segundo dígito e assim por diante.

Deste modo, podemos escrever a soma dos números da seguinte forma:

$S = abcd + abde + acbd + acdb + \ldots + dcba \Rightarrow S = 6(10^3 + 10^2 + 10 + 1)(a + b + c + d) \Rightarrow$

$S = 6666(a + b + c + d) = 193314 \Rightarrow a + b + c + d = 29$

Como o maior valor da soma dos 4 números é 30 (9 + 8 + 7 + 6 = 30), devemos subtrair 1 de algum dos números, sem que seja obtido dois números iguais. Notamos que isto só é possível quando escolhemos 5 no lugar de 6, implicando que os números escolhidos são {5, 7, 8, 9}.

17) (IMO-68) Determine todos os números naturais n cujo produto dos seus dígitos decimais é igual a $n^2 - 10n - 22$

Solução:

Suponha que n possui $m > 1$ dígitos e que seu primeiro dígito (mais significativo) é d.

Inicialmente vamos provar que o produto dos dígitos decimais de n (P_n) é menor ou igual a n.

Note que P_n é máximo quando todos os dígitos de n (exceto o primeiro, que vale d) são iguais a 9 $\Rightarrow$ $P_n \leq d.9^{m-1}$. Por outro lado, n será mínimo se depois de seu primeiro dígito (que é d) existam $m - 1$ zeros $\Rightarrow$ $n \geq d.10^{m-1}$. Assim: $n \geq d.10^{m-1} \geq d.9^{m-1} \geq P_n$, para $m > 1$.

Deste modo, provamos que para todos os números naturais n com mais de um dígito, o produto dos dígitos decimais de n é sempre menor ou igual a n.

Assim: $P_n \leq n \Rightarrow n^2 - 10n - 22 \leq n \Rightarrow n^2 - 11n - 22 \leq 0 \Rightarrow 0 \leq n \leq 12$.

Entretanto sabemos que $P_n > 0 \Rightarrow n^2 - 10n - 22 > 0 \Rightarrow n \geq 12$.

Assim, n = 12 é a única possibilidade de solução.

Conferindo, vemos realmente que $P_{12} = (12)^2 - (10)(12) - 22 = 12$.

Exercícios

1) Achar um inteiro positivo de dois algarismos que seja igual ao quádruplo da soma dos seus algarismos.

2) Consideramos os números inteiros de 1 a 1000 inclusive. Somemos entre si todos os que tem todos seus dígitos pares e somemos entre si todos os que tem todos seus dígitos ímpares. Qual soma é maior?

3) O inteiro A consiste de 666 números 3, e o inteiro B possui 666 números 6. Quantos dígitos aparecem no produto A.B?

4) Quando um número de dois dígitos é somado a outro número de dois dígitos possuindo os mesmo dígitos em ordem inversa, a soma é um quadrado perfeito. Determine todos estes números de 2 dígitos.

5) A soma de um número de dois algarismos com outro que possui os mesmos dígitos, porém na ordem inversa, é 55. Achar o número sabendo que a diferença entre os algarismos das dezenas e das unidades é igual a 3.

6) A subtração de um número de dois algarismos com outro que possui os mesmos dígitos, porém na ordem inversa, é 36. Achar o número sabendo que a soma dos quadrados dos seus algarismos é igual 40.

7) Um número de três algarismos $(xyz)_{10}$ é igual a cinco vezes o número formado apenas pelos algarismos das unidades e dezenas $(yz)_{10}$. Determine este número sabendo que a soma dos seus algarismos é 8 ($x + y + z = 8$) e que a subtração entre os algarismos das unidades e das dezenas é 3 ($z - y = 3$).

8) Um número a de três algarismos $(xyz)_{10}$ é somado com outros dois números formados pelos mesmos algarismos, porém em outra ordem b = $(zxy)_{10}$ e c = $(yzx)_{10}$, e o resultado é 999. Sabendo que o algarismo das unidades é igual ao algarismo das centenas em a ($x = z$) e que $y + z = 7$, determine o número a.

9) Determine a soma de todos os números pares de 4 dígitos que podem ser escritos usando 0, 1, 2, 3, 4, 5 (e onde os dígitos podem ser repetidos).

10) Sejam os inteiros $a = \underbrace{11\ldots11}_{m\ 1's}$ e $b = \underbrace{1000\ldots005}_{m-1\ 0's}$. Prove que ab + 1 é um quadrado perfeito. Expresse a raiz quadrada de ab + 1 da mesma forma como a e b foram expressos.

11) Mostrar que o produto 12345679 x 9 x k, sendo $k \neq 0$ um algarismo, é kkk.kkk.kkk

12) O produto de um inteiro positivo de três algarismos por 7 termina à direita por 638. Determinar esse inteiro.

13) Se a = 3.643.712.546.890.623.517 e b = 179.563.128, determine o número de algarismos do produto a.b.

14) Achar o menor inteiro cujo produto por 21 é um inteiro formado apenas com algarismos 4.

15) Achar o menor inteiro positivo que multiplicado por 33 dá um produto cujos algarismos são todos 7.

16) O número de 4 dígitos 2pqr é multiplicado por 4 e o resultado é um número de 4 dígitos rqp2. Pode-se afirmar que p + q = ?
a) 8 b) 7 c) 6 d) 5 e) nda

17) Seja s(n) a soma dos dígitos de n. Por exemplo, s(197) = 1 + 9 + 7 = 17. Seja $s^2(n)$ = s(s(n)), $s^3(n)$ = s(s(s(n))), e assim por diante. Qual o valor de $s^{1999}(1999)$?
a) 28 b) 10 c) 1 d) 8 e) nda

18) É possível encontrar um número inteiro cujo produto dos dígitos seja igual a 66?

19) Mostrar que o produto de dois fatores entre 10 e 20 é o décuplo da soma do primeiro com as unidades do segundo, mais o produto das unidades dos dois.

20) Determine o último dígito da seguinte soma:
S = 1! + 2! + 3! + ... + 1995! + 1996!
a) 9 b) 7 c) 5 d) 3 e) 1

21) (Unifor-99) Seja n a diferença entre o maior número inteiro com 6 algarismos distintos e o maior número inteiro com 5 algarismos distintos. A soma dos algarismos de n é um número
a) primo. b) par. c) divisível por 11.
d) quadrado perfeito. e) múltiplo de 5.

22) (Mackenzie-2000) O número de algarismos do produto $4^{10}.5^{13}$ é:
a) 20 b) 22 c) 18 d) 15 e) 17

23) (UERJ-2002) Analise a expressão abaixo, na qual n é um número natural: $N = 10^n - n$.
a) Se n é um número par, então N também é um número par. Justifique esta afirmativa.
b) Determine o valor da soma dos algarismos de N quando n = 92.

24) (UFU-2000) Desenvolvendo o número $10^{65} - 92$ iremos encontrar todos os algarismos que o compõe. Assim, podemos afirmar que a soma desses algarismos é igual a:
a) 575 b) 573 c) 566 d) 585

25) (Covest-2002)
A tabela ao lado ilustra uma operação correta de adição, onde as parcelas e a soma estão expressas no sistema de numeração decimal e x, y e z são dígitos entre 0 e 9. Quanto vale x + y + z?

8x3	
y87	
+	
57z	
2296	

a) 17 b) 18 c) 19 d) 20 e) 21

26) (Fuvest-88)

1	a	b	c
		x	3
a	b	c	4

Acima está representada uma multiplicação, onde os algarismos a, b e c são desconhecidos. Qual o valor da soma a + b + c?
a) 5 b) 8 c) 11 d) 14 e) 17

27) (Fuvest-92) Seja $x = 2^{1000}$. Sabendo que $\log_{10} 2$ é aproximadamente igual a 0,30103 pode-se afirmar que o número de algarismos de x é:
a) 300 b) 301 c) 302 d) 1030 e) 2000

28) (Fuvest-2000) Um número inteiro positivo n de 4 algarismos decimais satisfaz às seguintes condições:
i) a soma dos quadrados dos 1º e 4º algarismos é 58;
ii) a soma dos quadrados dos 2º e 3º algarismos é 52;
iii) se deste número n subtrairmos o número 3816, obteremos um número formado pelos mesmos algarismos do número n, mas na ordem contrária.
Qual é esse número?

29) (Fuvest-2005) O menor número inteiro positivo que devemos adicionar a 987 para que a soma seja o quadrado de um número inteiro positivo é
a) 37 b) 36 c) 35 d) 34 e) 33

30) (Unicamp-2000) Um determinado ano da última década do século XX é representado, na base 10, pelo número abba e um outro, da primeira década do século XXI, é representado, também na base 10, pelo número cddc.
a) Escreva esses dois números.
b) A que século pertencerá o ano representado pela soma abba + cddc ?

31) (ESA-94) Um número é formado por três algarismos, cuja soma é 15. O algarismo das dezenas é o triplo do algarismo das unidades e o algarismo das centenas é o sucessor do algarismo das dezenas. Esse número é:
a) 276 b) 267 c) 726 d) 762 e) 627

32) (Colégio Naval-80) Um número natural de 6 algarismos começa, à esquerda, pelo algarismo 1. Levando-se este algarismo 1, para o último lugar, à direita, conservando a seqüência dos demais algarismos, o novo número é o triplo do número primitivo. O número primitivo é:
a) 100.006 d) maior que 180.000
b) múltiplo de 11 e) divisível por 5
c) múltiplo de 4

33) (Colégio Naval-96) Os números naturais M e N são formados por dois algarismos não nulos. Se os algarismos de M são os mesmos algarismos de N, na ordem inversa, então M + N, é necessariamente múltiplo de:
a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 11

34) (Colégio Naval-2000) Considere um sistema de numeração, que usa os algarismos indo-arábicos e o valor posicional do algarismo no numeral, mas numera as ordens da esquerda para a direita . Por exemplo: no número 3452 tem-se:
1ª Ordem : 3
2ª Ordem : 4
3ª Ordem : 5

4ª Ordem : 2

Além disso, cada 7 unidades de uma ordem forma 1 unidade da ordem registrada imediatamente à direita.

Com base nesse sistema, coloque (E) quando a operação for efetuada erradamente e (C) quando efetuada corretamente. Lendo o resultado final da esquerda para a direita, encontramos

245	620	360
-461	+555	× 4
543	416	543
( )	( )	( )

(A) (E) (E) (E) (B) (E) (C) (C)
(C) (C) (E) (C) (D) (C) (C) (E)
(E) (C) (C) (C)

35) (Colégio Naval-2003) Se a, b e c são algarismos distintos, no sistema de numeração decimal existe um único número de dois algarismos (ab) tal que $(ab)^2 - (ba)^2 = (cc)^2$. O valor de (a + b + c) é igual a:

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

36) (IME-86) No produto abaixo, o "*" substitui algarismos diferentes de "3" e não necessariamente iguais. Determine o multiplicando e o multiplicador.

```
  * * 3 *
x       * * 3
-------------
    3 * * *
  * * * 3 3
  * * * *
-------------
* * * * * * *
```

Questões de Olimpíadas – Nível Intermediário

37) (Brasília-86) Determine um número de 4 dígitos, sabendo que seus dois primeiros dígitos são iguais, que seus dois últimos dígitos também são iguais e que o número é um quadrado perfeito.

38) (Minas Gerais-86) Suponhamos que você pedisse a alguém escrever dois números quaisquer, um embaixo do outro e, em seguida, escrever abaixo a soma destes dois números, e continuar assim escrevendo a soma dos dois números imediatamente superiores, até completar 10 linhas. Você poderia então "adivinhar" a soma dos dez números, olhando rapidamente a coluna e multiplicando o sétimo número por 11. Explique por que isso sempre acontece.

39) (Goiás-97) Determine a soma dos algarismos do número $(999.....995)^2$, onde o número 999.....995 tem 99 dígitos iguais a 9.

40) (Campina Grande-99) Na subtração a seguir, A, B e C são algarismos. Quais são os valores de A, B e C?

$$\begin{array}{r} 8\ A\ 3\ 1 \\ -\ C\ 4\ 0\ A \\ \hline B\ 1\ C\ 6 \end{array}$$

41) (Campina Grande-2000) Encontre um número de 3 dígitos tal que a soma dele com o produto de seus dígitos dê 586.

42) (Campina Grande-2003) Na equação (XY).(ZY) = TTT, XY representa um número de algarismos distintos, o mesmo acontecendo com ZY, enquanto que TTT representa um número de 3 algarismos iguais. A soma X + Y + Z + T é igual a:

a) 21 b) 20 c) 22 d) 19 e) 23

43) (Rio Grande do Norte-95) A soma dos algarismos de um número natural N, de três dígitos, é 21. Formamos um novo número mudando a posição do algarismo das unidades com o das dezenas. O novo número é 45 unidades maior que N.

Então, o produto dos algarismos de N é:

44) (Rio Grande do Sul-2001) Um número inteiro positivo é dito tetra-legal se a soma dos seus algarismos for múltipla de quatro (4). A quantidade de números tetra-legais maiores que zero (0) e menores que cem (100) é igual a:

a) 24 b) 21 c) 20 d) 22 e) 25

45) (Rio Grande do Norte-2001) Existem quantos inteiros positivos de dois algarismos tais que a diferença entre o inteiro e o produto de seus algarismos seja 12?

46) (Rio Grande do Sul-2002) Determine todos os números naturais que possuem três algarismos não nulos e distintos e que são iguais a soma de todos os números de dois dígitos que podem ser formados a partir de seus algarismos resulta no próprio número.

47) (São Paulo-97) Prove que se o quadrado de um número de dois algarismos, escrito na base 10,

é subtraído do quadrado do número formado pelos mesmos algarismos em ordem inversa, então o resultado é um número divisível por 11.

48) (Brasil Preparação Cone Sul-99) Prove que o número $\underbrace{11\ldots11}_{1997}\underbrace{22\ldots225}_{1998}$ é um quadrado perfeito.

49) (Brasil Preparação Cone Sul-95) Ache todos os naturais p para os quais $p + S(p) + S(S(p)) = 1995$, onde S(p) é a soma dos dígitos de p, na base 10.

50) (OBM-98) Quantos números de 3 algarismos existem cuja soma dos algarismos é 25 ?
A) 2 B) 4 C) 6 D) 8 E) 10

51) (OBM-2001) O número N de três algarismos multiplicado por 7 deu como resultado um número que termina em 171. A soma dos algarismos de N é:
A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

52) (Uruguai-2000) Se subtrairmos de um número positivo N de dois dígitos o número que se obtém ao inverter seus dígitos, obtemos um cubo perfeito. Achar os possíveis valores de N.

53) (Uruguai-2002) Sejam x, y e z três dígitos diferentes, nenhum igual a zero. Deduzir valores de $(xyz)_{10}$ sabendo que $(xx)_{10} + (yy)_{10} + (zz)_{10} = (xyz)_{10}$.

54) (Argentina) $N = 9 + 99 + 999 + \ldots + 9999\ldots\ldots9$ onde cada somando tem um dígito 9 mais que o anterior e o último somando é o número formado por 1998 dígitos iguais a 9. Quantas vezes aparecerá o dígito 1 no número N?

55) (Argentina) Se for escrito o número 1997 e na continuação o ano em que nasceu Fernando, obtém-se um número de oito cifras que é um quadrado perfeito. Determine este número.

56) (Argentina-2000) Em um quadro negro está escrito um número de três dígitos, todos distintos. Ana troca de lugar o primeiro dígito com o último. A soma do número escrito no quadro negro mais o número de Ana é igual a 92 vezes a soma dos dígitos do número escrito no quadro negro. Determinar todos os possíveis valores do número escrito no quadro negro.

57) (Sonorense-97) Encontre todos os números N = abc de três dígitos tais que ao somarmos 9 obtém-se o número cab.

58) (Manhattan-97) É possível encontrar um número inteiro cujo produto dos dígitos seja igual a 66?

59) (New Brunswick-98) Sejam A = 6a3 e B = 2b5 dois números de 3 dígitos. Se 9 divide A + B, então um valor correto de a + b é:
a) 2 b) 9 c) 12 d) 18 e) nda

60) (Noruega-95) Quantos números naturais são iguais a três vezes a soma dos seus algarismos?

61) (Bélgica-90) O dígito das unidades de um número natural é 7. Quando este dígito é removido para a frente do número, um novo número 5n é formado. Quantos dígitos, pelo menos, possui este número n?
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 10

62) (Bélgica-98) Quantos números naturais consistindo de dois dígitos são iguais a soma dos seus dígitos mais o produto de seus dígitos?
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

63) (Hong Kong-91) Seja N = 99...99, onde o dígito 9 ocorre 1990 vezes. Calcule a soma dos dígitos do número N^2.

64) (Moldávia-99) Determine todos os números de quatro dígitos n tais que a soma dos dígitos de n é igual a 2027 – n.

65) (Maio-96) Considerando os números naturais de três dígitos, em quantos deles ao somar dois dos dígitos se obtém o dobro do terceiro? Justifique a sua resposta.

66) (Maio-98) Inês escolheu quatro dígitos distintos do conjunto {1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}. Formou com eles todos os possíveis números de quatro cifras distintas e somou todos esses números de quatro cifras. O resultado é 193314. Encontre os quatro dígitos que Inês escolheu.

67) (Cone Sul-97) A cada número inteiro positivo n, $n \leq 99$, subtrai-se a soma dos quadrados de seus

dígitos. Para quais valores de n, esta diferença é a maior possível?.

Questões de Olimpíadas – Nível Avançado

68) (OBM-93 Jr.) Sendo $d_kd_{k-1}...d_1d_0$ a representação decimal de um número natural n com k + 1 algarismos, diremos que n é um "superquadrado" se, e somente se,
d_0,
d_1d_0,
$d_2d_1d_0$,
...
$d_{k-1}...d_1d_0$ e
$d_kd_{k-1}...d_1d_0 = n$ são quadrados de números inteiros positivos.
Exemplos:
64 é superquadrado, pois $4 = 2^2$ e $64 = 8^2$.
4225 não é superquadrado, pois, apesar de $25 = 5^2$, $225 = 15^2$, e $4225 = 65^2$, 5 não é o quadrado de um inteiro.
a) Determine todos os superquadrados menores do que 1000.
b) Determine todos os números que são superquadrados.

69) (OBM-2001) Dizemos que um conjunto A formado por 4 algarismos distintos e não nulos é intercambiável se podemos formar dois pares de números, cada um com 2 algarismos de A, de modo que o produto dos números de cada par seja o mesmo e que, em cada par, todos os dígitos de A sejam utilizados. Por exemplo, o conjunto {1; 2; 3; 6} é intercambiável pois $21 \cdot 36 = 12 \cdot 63$. Determine todos os conjuntos intercambiáveis.

70) (OBM-2003) Dizemos que um número N de quatro algarismos é biquadrado quando é igual à soma dos quadrados de dois números: um é formado pelos dois primeiros algarismos de N, na ordem em que aparecem em N e o outro, pelos dois últimos algarismos de N, também na ordem em que aparecem em N.
Por exemplo, 1233 é biquadrado pois $1233 = 12^2 + 33^2$. Encontre um outro número biquadrado.

71) (Argentina) Determinar um número natural n tal que seu quadrado tenha 202 dígitos: os primeiros 100 (desde a esquerda) todos iguais a 1, os seguintes 100 todos iguais a 2 e os dois últimos, desconhecidos, ou seja, $n^2 = \underbrace{11...11}_{100}\underbrace{22...22}_{100}??$.

72) (Argentina-96) Usando os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, e sem repetir, formam-se 3 números de 2 dígitos cada um. Soma-se os 3 números de 2 dígitos formados. Quantos resultados diferentes podem ser obtidos mediante este procedimento?

73) (Argentina-97) Determinar todos os números naturais de quatro dígitos "abcd" tais que "ab" + "cd" = "bc" e b – c = d. Observação: "ab" é um número de dois dígitos, o primeiro é a e o segundo b.

74) (Argentina-2001) Com três dígitos distintos formam-se os seis números de três dígitos distintos. A soma destes seis números é 4218. A soma dos três números maiores menos a soma dos três menores é igual a 792. Achar os três dígitos.

75) (Argentina-2003) O número de dois dígitos x7 multiplicado pelo número de dois dígitos y9 é igual ao número de quatro dígitos zz33. Dar os possíveis valores dos dígitos x, y, z.

76) (Manhattam-97) Prove que o produto dos dígitos de inteiro positivo é sempre menor ou igual que o respectivo número.

77) (Portugal-2000) Encontre os algarismos A, B, C, D que tornam a operação seguinte correta:

$$\begin{array}{cccc} A & B & C & D \\ x & & & 9 \\ \hline D & C & B & A \end{array}.$$

78) (Espanha-99) Quais dígitos estão omitidos na seguinte multiplicação?

$$\begin{array}{cccc} & 2 & * & * \\ & & * & * \\ \hline & * & 6 & 1 \\ * & * & 4 & \\ \hline * & * & 0 & 1 \end{array}$$

79) (Rússia-70) Os dígitos de um número de 17 dígitos são rearranjados na ordem inversa. Prove que ao menos um dígito no inteiro que é a soma do novo número com o inicial é par.

80) (Estônia-2000) Em um inteiro positivo M, de três algarismos, o algarismo das centenas é menor do que o algarismo das dezenas e o algarismo das dezenas é menor que o algarismo das unidades simples. A média aritmética de M com todos os números de três algarismos obtidos pela reordenação dos algarismos de M termina em 5. Determine tais números M.

81) (Macedônia-97) Determine um número de 3 dígitos distintos que é 5 vezes menor que a soma de todos os outros números que podem ser formados com os mesmo dígitos.

82) (Maio-95) Considera-se inicialmente um número de três algarismos distintos, nenhum dos quais igual a zero. Trocando de lugar dois de seus algarismos, encontra-se um segundo número menor do que o primeiro. Se a diferença entre o primeiro e o segundo números é um número de dois algarismos e a soma do primeiro e do segundo é um número palíndromo menor que 500, quais são os palíndromos que podem ser obtidos?

Observação: Um número palíndromo é um número que pode ser lido indiferentemente da frente para trás ou de trás para frente, como por exemplo 191.

83) (Maio-99) Um número natural de três algarismos é chamado de tricúbico se é igual a soma dos cubos dos seus dígitos. Encontre todos os pares de números consecutivos tais que ambos sejam tricúbicos.

84) (Torneio das Cidades-94) Uma estudante esqueceu de escrever um sinal de multiplicação entre dois números naturais de 3 algarismos e escreveu esses dois números juntos, como se fosse um número de 6 algarismos. Esse número de 6 algarismos é 3 vezes maior do que o produto obtido pela multiplicação dos dois números originais. Ache esses números.

85) (Cone Sul-95) Achar um número de três dígitos, sabendo que a soma de seus dígitos é 9, o produto das mesmas é 24 e também o número lido da direita para a esquerda é 27/38 do número primitivo.

86) (Cone Sul-97) Seja n um número natural, $n > 3$. Demonstrar que entre os múltiplos de 9 menores que 10^n há mais números com a soma de seus dígitos igual a $9(n-2)$ que números com a soma de seus dígitos igual a $9(n-1)$.

87) (Cone Sul-92) Achar um número inteiro positivo $\underline{n}$ de maneira tal que se à sua expressão é colocado um 2 pela esquerda e um 1 pela direita, o número resultante seja igual a 33n.

88) (Irlanda-96) Para cada inteiro positivo n, seja S(n) a soma dos dígitos de n (quando n é escrito em base 10). Prove que para todo inteiro positivo n $S(2n) \leq 2S(n) \leq 10S(2n)$. Prove também que existe um inteiro positivo n com $S(n) = 1996S(3n)$.

89) (Hungria-1934) Seja n um inteiro positivo dado e $A = \frac{1.3.5...(2n-1)}{2.4.6...2n}$. Prove que ao menos um dos termos da seqüência A, 2A, 4A, 8A, ..., 2^kA, ... é um inteiro.

90) (IMO-62) Encontre o menor número natural com 6 como o último dígito, tal que se o dígito final 6 é movido para o início do número, ele é multiplicado por 4.

91) (Iberoamericana-91) Encontrar um número N de cinco dígitos diferentes e não nulos, que seja igual a soma de todos os números de três dígitos distintos que se podem formar com cinco dígitos de N.

92) (Iberoamericana-92) Para cada inteiro positivo n, seja a_n o último dígito do número $1 + 2 + 3 + ... + n$. Calcular $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1992}$.

93) (Rússia-99) Os algarismos de um inteiro positivo A em sua representação no sistema de numeração decimal crescem da esquerda para a direita. Determine a soma dos algarismos do número 9A.

94) (Torneio das Cidades-2001) Pode a soma do número de dígitos de n com o número de dígitos de n^3 valer 2001?

95) (Inglaterra-97) N é um número inteiro de 4 dígitos, não terminando em zero, e R(N) é o número inteiro de 4 dígitos obtido pela reversão dos dígitos de N; por exemplo R(3275) = 5723. Determine todos os inteiros N para os quais $R(N) = 4N + 3$.

CRITÉRIOS DE DIVISIBILIDADE

Abaixo estão listados e demonstrados os critérios de divisibilidade mais importantes. Estes critérios compreendem apenas os casos das divisibilidades por números primos (2, 3, 5, 7, 11, ...) ou potências de primos (4, 9, 16, ...) . No caso da análise da divisibilidade de determinado inteiro por um número composto, que não seja uma potência de um primo, deve-se fatorar este número composto como a multiplicação de termos com mdc igual a 1 e aplicar os critérios por cada um destes termos. Por exemplo, para a análise da divisibilidade de um inteiro por 18, deve-se aplicar os critérios de divisibilidade por 2 e 9.

Divisibilidade por 2: um número inteiro é divisível por 2 se seu último algarismo for divisível por 2.
Demonstração:
$N = (a_n a_{n-1}...a_2a_1a_0) = (a_n a_{n-1}...a_2a_1 0) + a_0 = 10(a_n a_{n-1}...a_2a_1) + a_0$
Como $10(a_n a_{n-1}...a_2a_1)$ é par. N é par se e somente se a_0 (que é o algarismo das unidades de N) é par.

Divisibilidade por 3: um número inteiro é divisível por 3 se a soma dos seus algarismos for divisível por 3.
Demonstração:
$N = (a_n a_{n-1}...a_2a_1a_0) = 10^n a_n + 10^{n-1}a_{n-1} + ... + 10a_1 + a_0$
$N = (\underbrace{99...9}_{n} + 1)a_n + (\underbrace{99...9}_{n-1} + 1)a_{n-1} + ... + (9+1)a_1 + a_0$
$N = \underbrace{99...9}_{n}a_n + \underbrace{99...9}_{n-1}a_{n-1} + ... + 9a_1 + a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$
$N = 3[\underbrace{33...3}_{n}a_n + \underbrace{33...3}_{n-1}a_{n-1} + ... + 3a_1] + a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ Como o primeiro termo é múltiplo de 3, para que N seja múltiplo de 3 devemos ter que $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ (que é a soma dos dígitos de n) seja múltiplo de 3.

Divisibilidade por 4: um número inteiro é divisível por 4 se o número formado por seus dois últimos algarismos for divisível por 4.
Demonstração:
$N = (a_n a_{n-1}...a_2a_1a_0) = (a_n a_{n-1}...a_2 00) + (a_1a_0) = 100(a_n a_{n-1}...a_2) + (a_1a_0)$
Como $100(a_n a_{n-1}...a_2)$ é divisível por 4, N é divisível por 4 se e somente se (a_1a_0) (que é o número formado pelos dois últimos algarismos de N) é divisível por 4.

Divisibilidade por 5: um número inteiro é divisível por 5 se o seu último algarismo for igual a 0 ou 5.
Demonstração:
$N = (a_n a_{n-1}...a_2a_1a_0) = (a_n a_{n-1}...a_2a_1 0) + a_0$
$N = 10(a_n a_{n-1}...a_2a_1) + a_0$
Como $10(a_n a_{n-1}...a_2a_1)$ é divisível por 5, N é divisível por 5 se e somente se a_0 (que é o algarismo das unidades de N) é divisível por 5, ou seja, se é igual a 0 ou 5.

Divisibilidade por 7: um número inteiro $N = a_n a_{n-1}...a_2a_1a_0$ é divisível por 7 quando o inteiro $a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + ...$ for divisível por 7.
Demonstração:
$N = (a_n a_{n-1}...a_2a_1a_0) = a_0 + 10a_1 + 10^2a_2 + 10^3a_3 + 10^4a_4 + 10^5a_5 + 10^6a_6 + 10^7a_7 + 10^8a_8 + 10^9a_9 + ... \Rightarrow$
$N = a_0 + (7+3)a_1 + (98+2)a_2 + (994+6)a_3 + (9996+4)a_4 + (99995+5)a_5 + (999999+1)a_6 + (9999997+3)a_7 + (99999998+2)a_8 + (999999994+6)a_9 + ... \Rightarrow$
$N = 7[a_1 + 14a_2 + 142a_3 + 1428a_4 + 14285a_5 + 142857a_6 + 1428571a_7 + 14285714a_8 + 142857142a_9 + ...] + a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + ...$
Como o primeiro termo é múltiplo de 7, para que N seja múltiplo de 7 devemos ter que a expressão $a_0 + 3a_1 + 2a_2 + 6a_3 + 4a_4 + 5a_5 + a_6 + 3a_7 + 2a_8 + 6a_9 + ...$ seja múltiplo de 7.

Divisibilidade por 8: um número inteiro é divisível por 8 se o número formado por seus três últimos algarismos for divisível por 8.

Demonstração:

$N = (a_n a_{n-1}...a_3 a_2 a_1 a_0) = (a_n a_{n-1}...a_3 000) + (a_2 a_1 a_0) = 1000(a_n a_{n-1}...a_3) + (a_2 a_1 a_0)$

Como $1000(a_n a_{n-1}...a_3)$ é divisível por 8, N é divisível por 8 se e somente se $(a_2 a_1 a_0)$ (que é o número formado pelos três últimos algarismos de N) é divisível por 8.

Divisibilidade por 9: um número inteiro é divisível por 9 se a soma dos seus algarismos for divisível por 9.

Demonstração:

$N = (a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0) = 10^n a_n + 10^{n-1} a_{n-1} + ... + 10a_1 + a_0$

$N = (\underbrace{99...9}_{n} + 1)a_n + (\underbrace{99...9}_{n-1} + 1)a_{n-1} + ... + (9+1)a_1 + a_0$

$N = \underbrace{99...9}_{n} a_n + \underbrace{99...9}_{n-1} a_{n-1} + ... + 9a_1 + a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$

$N = 9[\underbrace{11...}_{n} a_n + \underbrace{11...}_{n-1} a_{n-1} + ... + a_1] + a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$

Como o primeiro termo é múltiplo de 9, para que N seja múltiplo de 9 devemos ter que a expressão $a_n + a_{n-1} + ... + a_1 + a_0$ (que é a soma dos dígitos de n) seja múltiplo de 9.

Divisibilidade por 10: um número inteiro é divisível por 10 se seu último algarismo for igual a 0.

Demonstração:

$N = (a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0) = (a_n a_{n-1}...a_2 a_1 0) + a_0 = 10(a_n a_{n-1}...a_2 a_1) + a_0$

Como $10(a_n a_{n-1}...a_2 a_1)$ é divisível por 10, N é divisível por 10 se e somente se a_0 (que é o algarismo das unidades de N) é divisível por 10, ou seja, se é igual a 0.

Divisibilidade por 11: um número inteiro $N = a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0$ é divisível por 11 quando o inteiro $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + ... + (-1)^n a_n$ for divisível por 11.

Demonstração:

$N = (a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0) = a_0 + 10a_1 + 10^2 a_2 + 10^3 a_3 + 10^4 a_4 + 10^5 a_5 + ... + 10^n a_n$

$N = a_0 + (11 - 1)a_1 + (99 + 1)a_2 + (1001 - 1)a_3 + (9999 + 1)a_4 + (100001 - 1)a_5 + ... + (100...00 \pm 1)^n a_n$

$N = 11[a_1 + 9a_2 + 91a_3 + 999a_4 + 9091a_5 + ... +] + a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + ... + (-1)^n a_n$

Como o primeiro termo é múltiplo de 11, para que N seja múltiplo de 11 devemos ter que a expressão $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + ... + (-1)^n a_n$ seja múltiplo de 11.

Divisibilidade por 2^m ou 5^m, $m \geq 1$: um número inteiro de n algarismos é divisível por 2^m ou 5^m, $n \geq m \geq 1$, se o número formado por seus últimos m algarismos for divisível por 2^m ou 5^m, respectivamente.

Demonstração:

$N = (a_n a_{n-1}...a_3 a_2 a_1 a_0) = (a_n a_{n-1}...a_{n-m}00...0) + (a_{n-m-1}...a_1 a_0) = 10^m(a_n a_{n-1}...a_{n-m}) + (a_{n-m-1}...a_1 a_0)$

$N = 2^m 5^m (a_n a_{n-1}...a_{n-m}) + (a_{n-m-1}...a_1 a_0)$

Como $2^m 5^m (a_n a_{n-1}...a_{n-m})$ é divisível por 2^m ou 5^m, N é divisível por 2^m ou 5^m se e somente se $(a_{n-m-1}...a_1 a_0)$ (que é o número formado pelos últimos m algarismos de N) é divisível por 2^m ou 5^m, respectivamente.

Exemplos:

1) (UFRJ-98) Determine um número inteiro cujo produto por 9 seja um número natural composto apenas pelo algarismo 1.
Solução:
Como um número divisível por 9 possui a soma dos algarismos divisível por 9, então o menor número divisível por 9 formado apenas por 1's é 111111111. Logo: $9.x = 111111111 \Rightarrow x = 12345679$.

3) (Olimpíada do Pará-2001) Determinar todos os números de quatro dígitos $n = 1a7b$ que são múltiplos de 15. (a e b são dígitos não necessariamente distintos)
Solução:
Desde que $15 = 3.5$, temos aplicar os critérios de divisibilidade por 3 e 5. Para que $n = 1a7b$ seja divisível por 5, b deve ser igual a 0 ou 5:
i) $b = 0 \Rightarrow n = 1a70$
Para que n seja divisível por 3 temos que a soma dos dígitos de n deve ser divisível por 3:
$\therefore 1 + a + 7 + 0 = 8 + a = 3k$
se $k \leq 2 \Rightarrow 8 + a \leq 6 \Rightarrow a \leq -2$, que não é dígito
se $k = 3 \Rightarrow 8 + a = 9 \Rightarrow a = 1 \Rightarrow n = 1170$
se $k = 4 \Rightarrow 8 + a = 12 \Rightarrow a = 4 \Rightarrow n = 1470$
se $k = 5 \Rightarrow 8 + a = 15 \Rightarrow a = 7 \Rightarrow n = 1770$
se $k \geq 6 \Rightarrow 8 + a \geq 18 \Rightarrow a \geq 10$, que não é dígito
ii) $b = 5 \Rightarrow n = 1a75$
Para que n seja divisível por 3 temos que a soma dos dígitos de n deve ser divisível por 3:
$\therefore 1 + a + 7 + 5 = 13 + a = 3k$
se $k \leq 4 \Rightarrow 13 + a \leq 12 \Rightarrow a \leq -1$, que não é dígito
se $k = 5 \Rightarrow 13 + a = 15 \Rightarrow a = 2 \Rightarrow n = 1275$
se $k = 6 \Rightarrow 13 + a = 18 \Rightarrow a = 5 \Rightarrow n = 1575$
se $k = 7 \Rightarrow 13 + a = 21 \Rightarrow a = 8 \Rightarrow n = 1875$
se $k \geq 8 \Rightarrow 13 + a \geq 24 \Rightarrow a \geq 11$, que não é dígito
Portanto, todos os números são 1170, 1470, 1770, 1275, 1575, 1875.

3) (PUC/PR-2001) O número de três algarismos abc, menor que 500, tal que a, b e c formam uma progressão aritmética e que é divisível por 45, está contido no intervalo:
a) [0, 100) b) [100, 200) c) [200, 300) d) [300, 400) e) [400, 500)
Solução:
Se a, b e c formam uma PA então $a = b - r$ e $c = b + r$. Para que $(abc)_{10}$ seja múltiplo de 9:
i) $a + b + c = 9 \Rightarrow b - r + b + b + r = 9 \Rightarrow b = 3$.
Se c = 5 temos a = 1. Se c = 0 temos a = 6.
ii) $a + b + c = 18 \Rightarrow b - r + b + b + r = 18 \Rightarrow b = 6$.
Se c = 5 temos a = 7. Se c = 0 temos a = 12 (não convém).
Os números que satisfazem o enunciado são 135, 630 e 765. Destes, somente 135 é menor que 500.

4) O número de 8 algarismos, 1x9y9z55 é divisível por 33. Se $x < y < z$, quantos há de tais números?
a) Nenhum b) 05 c) 10 d) 45 e) 30
Solução:
Se 1x9y9z55 é divisível por 33, devemos aplicar a este número os critérios de divisibilidade por 3 e 11.
Assim, aplicando o critério de divisibilidade por 3:
$3k_1 = 1 + x + 9 + y + 9 + z + 5 + 5 = 29 + x + y + z \Rightarrow x + y + z = 3(k_1 - 10) + 1 = 3k_2 + 1$ (*)
Aplicando agora o critério de divisibilidade por 11:
$11k_3 = (5 + z + y + x) - (5 + 9 + 9 + 1) = 5 + x + y + z - 24 = 11k_3 \Rightarrow$
$x + y + z = 11(k_3 + 1) + 8 = 11k_4 + 8$ (**)

Como $z > y > x$ e $z \leq 9$ então $x + y + z \leq 7 + 8 + 9 = 24$.
Os números naturais menores ou iguais a 24 que deixam resto 8 na divisão por 11 (**) são 8 e 19. Destes dois somente 19 é da forma $3k + 1$ (*), ou seja, necessariamente devemos ter $x + y + z = 19$.
Analisemos todas as soluções naturais da equação $x + y + z = 19$ com a restrição $x < y < z$:
$2 + 8 - 9 = 3 + 7 + 9 = 4 + 6 + 9 = 4 + 7 + 8 - 5 + 6 + 8$.
Portanto, temos exatamente 5 soluções naturais possíveis, produzindo os seguintes números que são divisíveis por 33: 12989955, 13979955, 14969955, 14979855, 15969855.
Deste modo, existem 5 números.

5) Determine todos os inteiros positivos N de três dígitos tais que N e a soma dos seus dígitos seja divisível por 11.
Solução:
Seja N = [abc]. Como N é divisível por 11 então $a - b + c = 11.k_1$ (*)
Pelo enunciado a soma dos algarismos também deve ser divisível por 11: $a + b + c = 11.k_2$ (**)
Subtraindo (**) de (*): $2b = 11(k_2 - k_1) \Rightarrow 11 \mid b \Rightarrow$
$b = 0$ uma vez que $0 \leq b \leq 9$.
(*) + (**): $2(a + c) = 11(k_1 + k_2) \Rightarrow 11 \mid a + c \Rightarrow$
$(a, c) = \{(2, 9), (3, 8), (4, 7), (5, 6), (6, 5), (7, 4), (8, 3), (9, 2)\} \Rightarrow$
$N = \{209, 308, 407, 506, 605, 704, 803, 902\}$

6) (Olimpíada da Rússia-80) Todos os números de dois dígitos de 19 à 80 são escritos em linha reta sem espaços. É obtido o número 192021....7980. Este número é divisível por 1980?
Solução:
Fatorando 1980 temos: $1980 = 2^2.3^2.5.11$
I) Como x = 192021...7980 termina em 80 e 80 é divisível por 4, então x é divisível por 4.
II) $1 + 9 + 2 + 0 + 2 + 1 + 2 + 2 + ... + 7 + 9 + 8 + 0 =$
$= 1 + 10(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 8 + 9 + 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) =$
$= 1 + 270 + 17 + 270 = 558$
Como $5 + 5 + 8 = 18 = 9.2$ então x é divisível por 9
III) Como x termina em 0, então x é divisível por 5.
IV) Notamos que os dígitos de ordem ímpar são os dígitos das unidades de cada par, então:
$a = 9 + 6(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) = 279$
Notamos que os dígitos de ordem par são os dígitos das dezenas de cada par, então:
$b = 1 + 10(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7) + 8 = 279$
Como $a - b = 0$, então x também é divisível por 11.
Desta forma 192021...7980 é divisível por 1980.

7) Os inteiros de dois dígitos de 19 a 92 são escritos consecutivamente para formar o inteiro N = 19202122...909192. Se 3^k é a maior potência de 3 que é fator de N, então k =
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) mais de 3
Solução:
Calculemos a soma dos dígitos de N:
$S(N) = 1 + 9 + 10(2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8) + 3.9 + 7(1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9) + 1 + 2 \Rightarrow$
$S(N) = 705$.
Como $3 \mid S(N)$ então N é divisível por 3. Como 9 não divide S(N) então 9 não divide N.
Desta forma, k = 1.

Exercícios

1) Determinar os algarismos x e y de modo que o inteiro:
a) 67xy seja divisível por 5 e por 11.
b) 5x6y seja divisível por 3 e por 4.
c) 56x21y seja divisível por 9 e por 10.
d) 34xx58y seja divisível por 9 e por 11.
e) 231xy seja divisível por 5 e por 9.
f) 514xy seja divisível por 8 e por 9.

2) Determinar os algarismos x e y de modo que o inteiro:
a) x0y seja divisível por 12.
b) 5x2y seja divisível por 15.
c) 28x75y seja divisível por 33.
d) 1234xy seja divisível por 72.
e) 3262xy seja divisível por 36.
f) 7x36y5 seja divisível por 1375.

3) Determine todos os valores possíveis para n = $\underline{1a3b}$ sabendo que n é divisível por 12.

4) Demonstrar que um inteiro é divisível por 4 se e somente se a soma do algarismo das unidades com o dobro do algarismo das dezenas é divisível por 4.

5) Demonstrar que um inteiro é divisível por 8 se e somente se a soma do algarismo das unidades, mais o dobro do algarismo das dezenas, mais o quádruplo do algarismo das centenas é divisível por 8.

6) Demonstrar que um inteiro é divisível por 6 se e somente se a soma do algarismo das unidades com o quádruplo da soma de todos os outros algarismos é divisível por 6.

7) O inteiro xy243z é divisível por 396. Determinar os algarismos x, y e z.

8) Determinar x, y, z no número 33xy49z para que seja múltiplo de 693.

9) Sejam A e B dois números distintos de sete dígitos, cada um deles contendo todos os dígitos de 1 até 7. Prove que A não é divisível por B.

10) (ESA-94) Se o número 7x4 é divisível por 18 então o algarismo x:
a) não existe b) vale 4 c) vale 7 d) vale 9 e) vale 0

11) (EPCAr-2001) Seja o número m = 488*a*9*b*, onde "*b*" é o algarismo das unidades e "*a*" o algarismo das centenas. Sabendo-se que m é divisível por 45, então *a* + *b* é igual a
a) 1 b) 7 c) 9 d) 16

12) (EPCAr-2003) Seja um número m = 488a9b, onde "b" é o algarismo das unidades e "a", o algarismo das centenas. Sabe-se que m é divisível por 55, então o menor valor de a + b é igual a
a) 2 b) 7 c) 10 d) 13

13) (Colégio Naval-87) O número **583ab** é divisível por 9. O valor máximo da soma dos algarismos a e b, é:
a) indeterminado c) 18 e) 2
b) 20 d) 11

14) (Colégio Naval-2001) Seja N = xyzzyx um número natural escrito na base dez, onde x, y e z são algarismos distintos. Se N_1 e N_2 são os dois maiores números divisíveis por 3 e 25, obtidos a partir de N pela substituição de x, y e z, então $N_1 + N_2$ é igual a:
A) 1008800 B) 1108800 C) 1106650
D) 1157000 E) 1209800

15) (Colégio Naval-2003) Justapondo-se os números naturais conforme a representação abaixo, onde o sinal * indica o último algarismo, forma-se um número de 1002 algarismos.
12345678910
1112131415161718192021.....*
O resto da divisão do número formado por 16 é igual a.
a) 2 c) 6 e) 10
b) 4 d) 8

Questões de Olimpíadas – Nível Intermediário

16) (Rio Grande do Norte-97) O número 1234 não é divisível por 11, mas um número formado por uma permutação de seus algarismos pode ser divisível por 11. Por exemplo, 1243 é divisível por 11. Qual é número total de permutações do número 1234 que é divisível por 11?:
a) 11 b) 1 c) 15 d) 8 e) 10

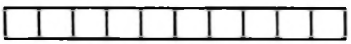
17) (Ceará-99) Azambuja escreveu __4__1__6__3__ no quadro de sua sala de aula.

Disse para seus colegas que eles dispunham dos algarismos 9, 8 e 5 para colocar dois deles em dois espaços vazios, apagar os espaços não preenchidos e assim obter um número de seis algarismos diferentes. Quais algarismos devem ser escolhidos e onde colocá-los para formar o maior número possível que seja divisível por 6?

18) (Pará-2001) Determinar todos os números de quatro dígitos n = 1*a*7*b* que são múltiplos de 15. (*a* e *b* são dígitos não necessariamente distintos)

19) (OBM-98) O número 1234a6 é divisível por 7. O algarismo *a* vale:
A) 0 B) 2 C) 5 D) 6 E) 8

20) (OBM-98) Coloque em cada quadradinho, no desenho a seguir, os algarismos 1, 2, 3, 4 ou 5, de forma que cada um deles apareça pelo menos uma vez e que o número formado seja o maior possível e múltiplo de 9.



No número que você construiu, o algarismo mais repetido apareceu:
a) 6 vezes b) 5 vezes c) 4 vezes
d) 3 vezes e) 2 vezes

21) (OBM-98 Nível 1) Encontre uma maneira de se escrever os algarismos de 1 a 9 em seqüência, de forma que os números determinados por quaisquer dois algarismos consecutivos sejam divisíveis ou por 7 ou por 13.

22) (OBM-2002) N = 05399840 é um número inteiro positivo com oito algarismos, sendo o primeiro e o último desconhecidos. Sabendo que N é um múltiplo de 198, encontre o algarismo das unidades de N / 198.

23) (Argentina) Utilizando exclusivamente dois dígitos distintos, 2 e *a*, forma-se o seguinte número de 90 cifras: 2*a*22*a*222*a*2222*a*...
Se este número de 90 cifras é múltiplo de 9, determinar todos os valores possíveis do dígito *a*.

24) (Argentina-98) Determinar os dígitos a e b tais que o número de 7 cifras 6a74b14 seja múltiplo de 9 e de 11. Dar todas as possibilidades.

25) (Ahsme-92) Os inteiros de dois dígitos de 19 a 92 são escritos consecutivamente para formar o inteiro N = 19202122...909192.
Se 3^k é a maior potência de 3 que é fator de N, então k =
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) mais de 3

26) (Aime-84) Determine o menor inteiro positivo n tal que todo dígito de 15n é 0 ou 8.

27) (México) Quantos números múltiplos de 6 menores que 1000 tem a propriedade de que a soma de suas cifras é 21?
(a) 6 (b) 9 (c) 12 (d) 15 (e) 18

28) (México) Ao dividir qualquer potência de 10 por 45, o resto é sempre 10. Com base nisto, descreva um critério (distinto da divisibilidade simultânea por 9 e por 5) para que um número $a_n a_{n-1} a_{n-2} \ldots a_0$ seja divisível por 45.

29) (Furman University-99) Um número é chamado *palíndromo* se lido da esquerda para a direita é igual ao número lido da direita para a esquerda. Qual é o maior inteiro k que é verdade afirmar que todos os números palíndromos de 4 dígitos são divisíveis por k?
a) 8 b) 9 c) 10 d) 11 e) nda

30) (University of South Carolina-87) Em base 10, o valor do dígito d para o qual o número d456d seja divisível por 18 é:
a) 0 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

31) (Canadá-80) Se a679b é um número de 5 dígitos (em base 10) que é divisível por 72, determine a e b.

32) (Suécia-93) O inteiro x é tal que a soma dos dígitos de 3x é igual a soma dos dígitos de x. Prove que x é divisível por 9.

33) (Bélgica-99) Se os números de 1 a 6 são escritos em uma ordem qualquer, um número consistindo de 6 dígitos é obtido. Qual a probabilidade que este número seja divisível por 6?
a) 1/6 b) 1/3 c) 1/2 d) 2/3 e) 5/6

34) (Hong Kong-90) O número de 6 dígitos *a*1989*b* é divisível por 72. Determine *a* e *b*.

35) (Hong Kong-98) Um inteiro positivo N é composto somente dos dígitos 0 e 1, e é divisível por 2475. Determine o menor número possível de dígitos de N.

36) (Leningrado-90) Existe um número de 6 dígitos divisível por 11, cujos dígitos são 1, 2, 3, 4, 5, 6 escritos em alguma ordem sem repetições?

37) (Moldávia-98) Sejam $A = (a_1a_2..a_{n-1}a_n)_{10}$ e $B = (a_1a_2..a_{n-1})_{10} + 4a_n$ onde $a_1, a_2, ..., a_n$ são os dígitos do número A. Prove que A é divisível por 13 se e somente se B é divisível por 13.

Questões de Olimpíadas – Nível Avançado

38) (Rio de Janeiro-2000) Determine o único número inteiro N de nove algarismos que satisfaz às seguintes condições:
(1) seus algarismos são todos distintos e diferentes de zero.
(2) para todo inteiro positivo n = 2, 3, 4, ..., 9, o número formado pelos n primeiros algarismos de N (da esquerda para a direita) é divisível por n.

39) (Argentina) Com os dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6, formar um número de seis cifras distintas *abcdef* tal que o número de três cifras *abc* seja múltiplo de 4, o número de três cifras *bcd* seja múltiplo de 5, o número de três cifras *cde* seja múltiplo de 3 e o número de três cifras *def* seja múltiplo de 11.

40) (Argentina-96) Quantos números de 15 dígitos que utilizam exclusivamente os dígitos 3 e 8 são múltiplos de 11?

41) (Argentina-2002) Achar o menor múltiplo de 84 formado exclusivamente por dígitos 6 e 7.

42) (Manhattan-97) Considere um inteiro positivo que, quando escrita a sua representação decimal, somente foram usados dígitos 0 e 1. Suponha que exatamente 300 1's são usados, e o resto dos dígitos são 0's. Pode este inteiro ser o quadrado de outro inteiro?

43) (Maio-2001) Na minha calculadora, uma das teclas de 1 a 9 está com defeito: ao pressioná-la aparece na tela um dígito entre 1 e 9 que não é o correspondente. Quando tentei escrever o número 987654321, apareceu na tela um número divisível por 11 e que deixa resto 3 ao ser dividido por 9. Qual é a tecla defeituosa? Qual é o número que apareceu na tela?

44) (Irlanda-98) Mostre que nenhum inteiro da forma xyxy em base 10 (onde x e y são dígitos) podem ser o cubo de um inteiro.

45) (Rússia-62) É dado um número de 1962 dígitos, que é divisível por 9. Seja x a soma dos seus dígitos. Seja y a soma dos dígitos de x. Seja z a soma dos dígitos de y. Calcule z.

46) (Rússia-98) Existem números de 5 algarismos M e N onde todos os algarismos de M sejam pares, todos os algarismos de N sejam ímpares, cada um dos algarismos de 0 a 9 ocorrendo exatamente uma vez entre M e N e tais que N divide M?

PROPRIEDADES DA DIVISIBILIDADE

Sejam a e b dois inteiros, sendo $a \neq 0$. Define-se que a divide b se e somente se existe um inteiro q (denominado de quociente da divisão) tal que $b = aq$. Se a divide b também afirma-se, em outros termos, que a é um divisor de b, que b é um múltiplo de a, que a é um fator de b ou que b é divisível por a. A notação "$a \mid b$" indica que $a \neq 0$ divide b.

Notemos também que se a é um divisor de b, então o inteiro $-a$ também é um divisor de b, porque a igualdade $b = aq$ necessariamente implica que $b = (-a)(-q)$, de forma que os divisores de um inteiro qualquer são dois a dois simétricos (iguais em valor absoluto e de sinais opostos).

5.1. PROPRIEDADES DA DIVISIBILIDADE

(1) $a \mid 0$, $1 \mid a$ e $a \mid a$
Demonstração:
$a \mid 0$ $(a \neq 0)$ pois existe o inteiro $q = 0$ tal que $0 = a.q$
$1 \mid a$ pois existe o inteiro $q = a$ tal que $a = 1.q$
$a \mid a$ $(a \neq 0)$ pois existe o inteiro $q = 1$ tal que $a = a.q$

(2) Se $a \mid 1$, então $a = \pm 1$
Demonstração:
Se $a \mid 1 \Rightarrow$ existe o inteiro q tal que $1 = a.q$
Como a e q são inteiros, as únicas possibilidades para a multiplicação de dois inteiros ser igual a 1 são:
i) $a = 1$ e $q = -1$; ii) $a = -1$ e $q = 1$.

(3) Se $a \mid b$ e se $c \mid d$, então $ac \mid bd$
Demonstração:
Se $a \mid b \Rightarrow$ existe o inteiro q_1 tal que $b = a.q_1$ (1)
Se $c \mid d \Rightarrow$ existe o inteiro q_2 tal que $d = c.q_2$ (2)
Multiplicando (1) e (2): $bd = (ac)(q_1q_2) \Rightarrow ac \mid bd$

(4) Se $a \mid b$ e se $b \mid c$, então $a \mid c$
Demonstração:
Se $a \mid b \Rightarrow$ existe o inteiro q_1 tal que $b = a.q_1$. Se $b \mid c \Rightarrow$ existe o inteiro q_2 tal que $c = b.q_2$
Assim: $c = bq_2 \Rightarrow c = a(q_1q_2) \Rightarrow a \mid c$

(5) Se $a \mid b$ e se $b \mid a$, então $a = \pm b$
Demonstração:
Se $a \mid b \Rightarrow$ existe o inteiro q_1 tal que $b = a.q_1$ (1)
Se $b \mid a \Rightarrow$ existe o inteiro q_2 tal que $a = b.q_2$ (2)
Multiplicando (1) e (2): $ab = (ab)(q_1q_2) \Rightarrow q_1q_2 = 1 \Rightarrow q_1 = \pm 1$. Substituindo em (1) temos $a = \pm b$.

(6) Se $a \mid b$, com $b \neq 0$, então $|a| \leq |b|$
Demonstração:
Se $a \mid b \Rightarrow$ existe o inteiro q tal que $b = a.q$. Aplicando módulo: $|b| = |a||q| \Rightarrow |q| = |b|/|a|$
Como q é inteiro $\Rightarrow |q| \geq 1 \Rightarrow |b|/|a| \geq 1 \Rightarrow |a| \leq |b|$

(7) Se $a \mid b$ e se $a \mid c$, então $a \mid (bx + cy)$, $\forall\, x, y \in Z$
Demonstração:
Se $a \mid b \Rightarrow$ existe o inteiro q_1 tal que $b = a.q_1$ (1)
Se $a \mid c \Rightarrow$ existe o inteiro q_2 tal que $c = a.q_2$ (2)
Assim: $bx + cy = aq_1x + aq_2y \Rightarrow bx + cy = a(q_1x + q_2y) \Rightarrow a \mid (bx + cy)$, $\forall\, x, y \in Z$

Exemplos:

1) Um número inteiro n é bom quando 4n + 1 é divisível por 5. Quantos números bons há entre 500 e 1.000?

A) 50 B) 51 C)100 D) 101 E) 102

Solução:

Como 4n + 1 sempre é ímpar, então para que 5 divida 4n + 1, seu dígito das unidades deve ser 5. Se o dígito das unidades de 4n + 1 é 5 então o dígito das unidades de 4n é 4. Observe agora o seguinte:

i) se n termina em 0 então 4n termina em 0; ii) se n termina em 1 então 4n termina em 4;
iii) se n termina em 2 então 4n termina em 8; iv) se n termina em 3 então 4n termina em 2;
v) se n termina em 4 então 4n termina em 6; vi) se n termina em 5 então 4n termina em 0;
vii) se n termina em 6 então 4n termina em 4; viii) se n termina em 7 então 4n termina em 8;
ix) se n termina em 8 então 4n termina em 2; x) se n termina em 9 então 4n termina em 6;

Deste modo, para que 4n termine em 4 teremos que n deve terminar em 1 ou 6. Como em cada dezena temos dois números terminando em 1 ou 6 e entre 500 e 1000 temos (1000 – 500)/10 = 50 dezenas, então existem 2.50 = 100 números n entre 500 e 1000 que são bons.

2) Prove que se a e b são números naturais, então a!b! | (a + b)!.

Solução:

Sabemos que a combinação de x elementos tomados y a y ($x \geq y$) é dada por $C_{x,y} = \frac{x!}{y!(x-y)!}$. onde $C_{x,y}$ é um valor inteiro positivo. Assim, fazendo x = a + b e y = a, temos que $C_{a+b,a} = \frac{(a+b)!}{a!b!}$, e como este valor é inteiro temos que a!b! | (a + b)!.

3) Prove que, para todo número natural k, o produto P = (a + 1)(a + 2)...(a + k) é divisível por k!.

Solução:

Temos que P = (a + 1)(a + 2)...(a + k) = (a + k)!/a!

Do exercício anterior, fazendo k = b, tiramos que b! | (a + k)!/a! $\Rightarrow$ k! | (a + 1)(a + 2)...(a + k)

Este exemplo demonstra uma das propriedades mais interessantes dos números naturais, que afirma que a multiplicação de n números naturais consecutivos, é divisível por n!. Desta forma, entre os 11 números naturais a + 1, a + 2, a + 3, a + 4, a + 5, a + 6, a + 7, a + 8, a + 9, a + 10, a + 11 ($a \geq 1$) podemos afirmar que existe um que é divisível por 11, um que é divisível por 10, um que é divisível por 9, um que é divisível por 8, um que é divisível por 7, um que é divisível por 6, 2 que são divisíveis por 5, 2 que são divisíveis por 4, 3 que são divisíveis por 3 e 5 que são divisíveis por 2.

4) Determine todos os inteiros positivos d tais que d divide ambos $n^2 + 1$ e $(n + 1)^2 + 1$ para todo inteiro n.

Solução:

Seja d | $(n^2 + 1)$ e d | $[(n + 1)^2 + 1]$.

Logo: d | $[(n^2 + 2n + 2) - (n^2 + 1)]$, $\Rightarrow$ d | (2n + 1) $\Rightarrow$ d | $(4n^2 + 4n + 1)$

Analogamente: d | $[4(n^2 + 2n + 2) - 4n^2 + 4n + 1)]$ $\Rightarrow$ d | (4n + 7)

Finalmente: d | [(4n + 7) – 2(2n + 1)] $\Rightarrow$ d | 5 $\Rightarrow$ d = 1 ou d = 5

5) Demonstrar que 60 divide o produto $(n^2 - 1)n^2(n^2 + 1)$, qualquer que seja o inteiro positivo n.

Solução:

$(n^2 - 1)n^2(n^2 + 1) = (n + 1)(n - 1)n^2[(n - 2)(n + 2) + 5] = n[(n - 2)(n - 1)n(n + 1)(n + 2) + 5(n - 1)n(n + 1)]$

Suponhamos que n seja par:

Como (n – 2)(n – 1)n(n + 1)(n + 2) é o produto de 5 números inteiros consecutivos então é divisível por 5! = 720, então entre estes 5 números temos 3 divisíveis por 2, pelos menos 2 divisíveis por 3, pelo menos 1 divisível por 4 e 1 divisível por 5.

Assim este multiplicação é divisível por $2^4.3^2.5 = 720$
Como $(n-1)n(n+1)$ é o produto de 3 inteiros consecutivos, então é divisível por 3! = 6, implicando que $5(n-1)n(n+1)$ seja divisível por 30
Desta forma a soma $[(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)]$ vai ser divisível por 30, implicando que $n[(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)]$ seja divisível por 60, uma vez que n é par.
Se n é ímpar, temos que $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ possui 2 termos divisíveis por 2, pelo menos 2 divisíveis por 3, 1 divisível por 4 e 1 divisível por 5. Assim o produto $(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2)$ é divisível por $2^3.3^2.5 = 360$
Se n é ímpar, então $(n-1)n(n+1)$ possui 2 termos divisíveis por 2, 1 divisível por 3 e 1 divisível por 4, implicando que $5(n-1)n(n+1)$ é divisível por $2^3.3.5 = 120$.
Assim, $[(n-2)(n-1)n(n+1)(n+2) + 5(n-1)n(n+1)]$ vai ser divisível por 120, quando n é ímpar.

6) (Olimpíada do Espírito Santo-99) Um dragão tem 100 cabeças. O dragão só morre se todas as suas cabeças forem cortadas. Um cavaleiro possui dois tipos diferentes de espadas. Com um golpe da primeira espada ele pode cortar exatamente 17 cabeças, mas, continuando vivo, nascem 11 novas cabeças no dragão. Com a segunda espada ele pode cortar exatamente 5 cabeças, mas, se ainda vivo, nascem 8 novas cabeças. Pode o dragão morrer desse jeito?
Solução:
Existem duas formas de matar o dragão. A primeira é que, em algum momento, o dragão possua exatamente 17 cabeças (83 cortadas), podendo o cavaleiro usar a 1ª espada e matar o dragão. Na segunda forma o dragão deve possuir, em algum momento, exatamente 5 cabeças (95 cortadas), podendo o cavaleiro matar o dragão usando a 2ª espada. Como usando a primeira espada temos um acréscimo de seis cabeças e usando a 2ª espada temos um decréscimo de três cabeças, então o número de cabeças cortadas é igual a $-6x + 3y$, onde x é a quantidade de vezes que utilizou-se 1ª espada e y é a quantidade de vezes que utilizou-se a 2ª espada.
No primeiro caso, temos que o número de cabeças cortadas é igual a 83, ou seja, $-6x + 3y = 83 \Rightarrow 3(-2x + y) = 83 \Rightarrow 3 \mid 83$ que é um absurdo. No segundo caso temos que $-6x + 3y = 95 \Rightarrow 3(-2x + y) = 95 \Rightarrow 3 \mid 95$ que também é um absurdo.
Desta forma, é impossível o dragão morrer deste jeito.

7) (Olimpíada do Ceará-96) Os lados de um triângulo são expressos, em cm, por três inteiros consecutivos e sua área, em cm^2, é dada por um inteiro. Prove que o menor lado do triângulo é ímpar.
Solução:
Sejam $a = x - 1$, $b = x$ e $c = x + 1$ os lados do triângulo. Assim, $p = (x - 1 + x + x + 1)/2 = 3x/2$.
A área é dada por $S = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} = \sqrt{\frac{3x}{2}\frac{(x+2)}{2}\frac{x}{2}\frac{x-2}{2}} = \sqrt{\frac{3.x^2.(x-2)(x+2)}{16}}$.
Como S é inteiro $\Rightarrow 16 \mid x^2.(x-2)(x+2)$
Como x, $x-2$ e $x+2$ possuem a mesma paridade $\Rightarrow 2 \mid x \Rightarrow x - 1$ é ímpar.

8) (Olimpíada Nórdica-96) Prove a existência de um inteiro positivo divisível por 1996 e cuja soma dos dígitos seja 1996.
Solução:
Seja S(n) e soma dos dígitos decimais do inteiro positivo n. Observe que:
$S(1996) = 25$ e $S(2 \times 1996) = S(3992) = 23$.
Notemos que é possível escrever 1996 da forma $25a + 23b$ (onde a e b são inteiros positivos) uma vez que $1996 = 25 \times 78 + 2 \times 23$. Desta forma podemos montar o seguinte número inteiro n que possui soma dos dígitos igual a 1996: n = 19961996...199639923992, onde temos 78 termos 1996 e 2 termos 3992.
Como $n = 3992 + 3992.10^4 + 1996.10^8 + ... + 1996.10^{4.79} \Rightarrow n = 1996(2 + 2.10^4 + 10^8 + ... + 10^{4.79})$ implicando que n é múltiplo de 1996.

9) (Olimpíada do Rio Grande do Norte-97) Qual é o menor número natural que é soma de 9 números naturais consecutivos, é soma de 10 números naturais consecutivos e é soma de 11 números naturais consecutivos?
a) 555 b) 466 c) 495 d) 695 e) 396
Solução:
Se o número x é soma de 9 números naturais consecutivos podemos escrever que:
$x = n-4+n-3+n-2+n-1+n+n+1+n+2+n+3+n+4 = 9n$
Se o número x é soma de 11 números naturais consecutivos podemos escrever que:
$x = m-5+m-4+m-3+m-2+m-1+m+m+1+m+2+m+3+m+4+m+5 = 11m$
Assim temos que x é divisível por 99: $x = 99k$
Se o número x é soma de 10 números naturais consecutivos podemos escrever que:
$x = y-4+y-3+y-2+y-1+y+y-1+y+2+y+3+y-4+y-5 = 10y+5 = 5(2y+1)$
Desta forma, x é divisível por 99 e 5. Portanto, $x_{min} = 99.5 \Rightarrow x = 495$.

10) (Olimpíada da Hungria-1908) Dados dois inteiros ímpares a e b. Prove que $a^n - b^n$ é divisível por 2^n se e somente se a – b é divisível por 2^n.
Solução:
Como $a^3 - b^3 = (a-b)(a^2+b^2+ab)$ é divisível por 2^n, então $(a-b)(a^2+b^2+ab) = k.2^n$.
Sendo a e b números ímpares, então a – b vai ser par e (a^2+b^2+ab) vai ser ímpar, pois é a soma de 3 números ímpares. Assim (a^2+b^2+ab) não vai ser divisível por nenhuma potência de 2, sendo a – b divisível por 2^n.

11) (Olimpíada da Rússia-96) Um número de 1996 dígitos inicia por 6 (dígito mais significativo). Todo número formado por dois dígitos consecutivos é divisível por 17 ou 23. Qual é o último dígito (das unidades)?
Solução:
Enumeremos todos os múltiplos de 17 e 23 que possuem dois dígitos: 17, 34, 51, 68, 85, 23, 46, 69, 92
Entre estes 9 números temos algumas características interessantes:
– Não temos nenhum dígito 0;
– Com exceção de 0 e 7, todos os outros dígitos ocupam a posição das dezenas em algum número;
– 6 é o único dígito que ocupa em dois números a posição de dígito das dezenas;
– Com exceção de 0, todos os outros dígitos ocupam uma só vez a posição de dígito das unidades.
Iniciando com 6 temos duas possibilidades:
i) 68 → 685 → 6851 → 68517 parou pois nenhum dos múltiplos começa por 7;
ii) 69 → 692 → 6923 → 69234 → 692346 a partir daqui é só repetir
Assim, temos um número de 1996 dígitos que é formado escrevendo (da esquerda para a direita) lado a lado o número 69234. Como 69234 possui 5 dígitos e 1996 = 5k + 1, então o dígito das unidades é igual ao primeiro dígito do período, ou seja, vale 6.

12) (Torneio Internacional das Cidades-97) Sejam a e b números inteiros. Dado que a^2+b^2 é divisível por ab, prove que $a = b$.
Solução:
Se a^2+b^2 é divisível por ab $\Rightarrow a^2+b^2 = kab \Rightarrow a^2 - a(kb) + b^2 = 0$.
Para que esta equação de 2º grau possua raízes inteiras seu discriminante deve ser um quadrado perfeito:
$\Delta = (kb)^2 - 4b^2 = x^2 \Rightarrow b^2(k^2-4) = x^2$
Desde que a multiplicação $b^2(k^2-4)$ deve ser um quadrado perfeito e b^2 é um quadrado perfeito, então:
$k^2-4 = y^2 \Rightarrow k^2 - y^2 = 4 \Rightarrow (k-y)(k+y) = 2^2$
Como k – y e k + y possuem a mesma paridade teremos: k – y = 2 e k + y = 2 $\Rightarrow$ k = 2 e y = 0.
Deste modo y = 0 $\Rightarrow$ x = 0 $\Rightarrow$ $k^2 - 4 = 0 \Rightarrow k = 2 \Rightarrow a^2+b^2-2ab \Rightarrow (a-b)^2 = 0 \Rightarrow a = b$

5.2. ALGORITMO DA DIVISÃO EUCLIDIANA

Sendo a e b dois inteiros, com $b > 0$, então existem e são únicos os inteiros q e r que satisfazem às condições: $\boxed{a = bq + r \quad e \quad 0 \le r < b}$

Denominamos a de dividendo, b de divisor, q de quociente e r de resto. Na divisão entre dois inteiros deve-se ressaltar que na maioria absoluta dos casos estamos interessados no resto da divisão. O algoritmo da divisão euclidiana fornece uma importante ferramenta no estudo de questões em que determinada propriedade deve ser analisada para todos os inteiros. Por exemplo, como na divisão euclidiana por 3 temos apenas os restos 0, 1 e 2, todos os inteiros podem ser escritos das seguintes maneiras: $3k$, $3k + 1$, $3k + 2$.

Deste modo, trabalhar com estas três expressões equivale a trabalhar com todos os inteiros, uma vez que cada inteiro pode ser escrito de uma destas três maneiras.

Na verdade, não é obrigatório trabalhar com os restos da divisão euclidiana. Assim, não é errado dizer que o resto da divisão de 39 por 4 é -1, uma vez que $39 = 4.10 - 1$. Esta expressão da divisão de 39 por 4 não é a expressão da divisão euclidiana, porém não está errada. Em alguns casos é mais vantajoso utilizar em uma divisão o resto -1 que o seu equivalente da divisão euclidiana, que no caso da divisão por 4 é o resto 3.

Exemplos:

1) Na divisão do inteiro $a = 427$ por um inteiro positivo b o quociente é 12 e o resto é r. Achar o divisor b e o resto r.

Solução:

Pelo algoritmo da divisão: $a = bq + r \quad e \quad 0 \le r < b \quad \Rightarrow \quad 427 = 12b + r \quad e \quad 0 \le r < b$

Como $b > r$, o primeiro valor de b que confere é $b = 33$, pois: $427 = (12)(33) + 31 \quad \Rightarrow \quad r = 31$

O segundo valor de b é 34: $427 = (12)(34) + 19 \Rightarrow r = 19$

O terceiro valor de b é 35: $427 = (12)(35) + 7 \Rightarrow r = 7$

Para $b = 36$ não é conferido o algoritmo da divisão, pois: $427 = (12)(36) - 5 \Rightarrow r = -5 < 0$

Desta forma: $b = 33$ e $r = 31$ ou $b = 34$ e $r = 19$ ou $b = 35$ e $r = 7$

2) (PUC/PR-2001) Numa divisão o quociente é 3 e o resto 6. A soma do dividendo, do divisor, do quociente e do resto é 107. Qual a diferença entre o dividendo e o divisor?

a) 23 b) 75 c) 52 d) 58 e) 79

Solução:

Pelo enunciado: $a = 3.b + 6$ e $a + b + 3 + 6 = 107 \Rightarrow 4b = 92 \Rightarrow b = 23 \Rightarrow a = 75 \Rightarrow a - b = 52$.

3) (UFMG-2002) O quadrado da diferença entre o número natural x e 3 é acrescido da soma de 11 e x. O resultado é, então, dividido pelo dobro de x, obtendo-se quociente 8 e resto 20. A soma dos algarismos de x é

a) 3 b) 4 c) 5 d) 2

Solução:

$(x - 3)^2 + (11 + x) = (2x)(8) + 20 \Rightarrow x^2 - 6x + 9 + 11 + x = 16x + 20 \Rightarrow x^2 - 21x = 0 \Rightarrow$

$x(x - 21) = 0 \Rightarrow x = 0$ (não convém) ou $x = 21$, cuja soma dos algarismos é 3.

4) (Mackenzie-2001) Na divisão

$$\begin{array}{r|l} n & 17 \\ \hline 3q & q \end{array}$$

n e q são naturais maiores que zero. A soma do maior com o menor dos possíveis valores de n é:

a) 120 b) 130 c) 110 d) 95 e) 105

Solução:

Escrevendo a expressão da divisão euclidiana equivalente à divisão proposta temos que: $n = 17.q + 3q$

Como $0 \le 3q < 17 \Rightarrow 0 \le q < 5,66...$

Uma vez que q é inteiro $\Rightarrow$ $0 \le q \le 5$.
Como o enunciado indica que $q > 0$, então q pode valer 1, 2, 3, 4 ou 5. Desde que $n = 20q$:
$n_{max} = 20.5 = 100$ e $n_{min} = 20.1 = 20$ $\Rightarrow$ $n_{max} + n_{min} = 120$

5) (UFU-2003) Considere a e b dois números inteiros, tais que $a - b = 23$, sendo $b > 0$. Sabendo-se que na divisão de a por b o quociente é 8 e o resto é o maior possível nessa divisão, então $a + b$ é igual a
a) 29 b) 26 c) 32 d) 36
Solução:
O maior resto possível na divisão por b é $b - 1$. Logo: $a = 8.b + b - 1 = 9.b - 1$.
Como $a = b + 23$ temos $b + 23 = 9b - 1$ $\Rightarrow$ $b = 3$ $\Rightarrow$ $a = 26$ $\Rightarrow$ $a + b = 29$.

6) Prove que se todos os quadrados perfeitos são divididos por 12, o resto 8 nunca é obtido, mas o resto 9 é obtido para uma infinidade de casos.
Solução:
Um número inteiro pode ser expresso das seguintes formas:
$12k$, 12 ± 1, $12k \pm 2$, $12k \pm 3$, $12k \pm 4$, $12k \pm 5$ e $12k + 6$
Observe que:
$(12k)^2 = 12^2.k^2 = 12x$
$(12k \pm 1)^2 = 12^2k^2 \pm 24k + 1 = 12(12k^2 + 2k) + 1 = 12x + 1$
$(12k \pm 2)^2 = 12^2k^2 \pm 48k + 4 = 12(12k^2 \pm 4k) + 4 = 12x + 4$
$(12k \pm 3)^2 = 12^2k2 \pm 72k + 9 = 12(12k^2 \pm 6k) + 9 = 12x + 9$
$(12k \pm 4)^2 = 12^2k^2 \pm 96k + 16 = 12x + 4$
$(12k \pm 5)^2 = 12^2k^2 \pm 120k + 25 = 12x - 1$
$(12k + 6)^2 = 12^2k^2 + 144k + 36 = 12x$
Assim, quando o número inteiro for da forma $12k \pm 3$, temos que o seu quadrado deixa resto 9 quando dividido por 12.

7) Um inteiro positivo dividido por 5 dá resto 3 e dividido por 9 dá resto 4. Determinar o resto da divisão deste inteiro por 45.
Solução:
$x = 5q + 3$ e $x = 9p + 4$ $\Rightarrow$ $9x = 45q + 27$ e $5x = 45p + 20$ $\Rightarrow$ $4x = 45(q - p) + 7$
$\therefore 5x - 4x = 45(p - q + p) + 20 - 7$ $\Rightarrow$ $x = 45(2p - q) + 13$ $\Rightarrow$ resto é igual a 13

8) (OBM-99) Contando-se os alunos de uma classe de 4 em 4 sobram 2 e contando-se de 5 em 5 sobra 1. Sabendo-se que 15 alunos são meninas e que nesta classe o número de meninas é maior que o número de meninos, o número de meninos nesta classe é igual a :
a) 7 b) 8 c) 9 d) 10 3) 11
Solução:
O número de alunos é pelo menos 15 e não mais que 29. Os únicos números neste intervalo que deixam resto igual a 2 quando divididos por 4 são 18, 22 e 26. Destes, o único que deixa resto igual a 1 quando dividido por 5 é 26 e o número de meninos é $26 - 15 = 11$.

9) (OBM-99) O número N = 11111 . . . 11 possui 1999 dígitos, todos iguais a 1. O resto da divisão de N por 7 é:
a) 1 b) 2 c) 4 d) 5 e) 6
Solução:
Os restos das divisões de 1, 11, 111, 1111, 11111, 111111 por 7 são respectivamente 1, 4, 6, 5, 2, 0, e isto se repete em ciclos de 6. Como o resto da divisão de 1999 por 6 é 1, então o resto da divisão de N por 7 é também 1.

10) (Olimpíada de Santa Catarina-99) Demonstrar que nenhum inteiro da seqüência: 11, 111, 1111, 11111, ... é um quadrado perfeito.

Solução:

Seja a_n um elemento qualquer da seqüência. Assim: $a_n = 111...111 = 111...100 + 11$.

Como o primeiro termo é divisível por 4 e o segundo deixa resto 3 na divisão por 4, todos os elementos da seqüência deixam resto 3 na divisão por 4. Agora observe que:

$n = 4k \Rightarrow n^2 = 16k^2 = 4x$

$n = 4k + 1 \Rightarrow n^2 = 16k^2 - 8k + 1 = 4x + 1$

$n = 4k + 2 \Rightarrow n^2 = 16k^2 + 16k + 4 = 4x$

$n = 4k + 3 \Rightarrow n^2 = 16k^2 + 24k + 9 = 4x + 1$

Do exposto acima concluímos que todo quadrado perfeito deixa resto 0 ou 1 na divisão por 4. Como os elementos da seqüência deixam resto 3 na divisão por 4, então nenhum deles pode ser um quadrado perfeito.

11) (OBM Jr.-97) No edifício mais alto de Terra Brasilis moram Eduardo e Augusto. O número do andar do apartamento de Eduardo coincide com o número do apartamento de Augusto. A soma dos números dos apartamentos dos dois é 2164. Calcule o número do apartamento de Eduardo, sabendo que há 12 apartamentos por andar. (Por exemplo, no primeiro andar estão os apartamentos de 1 a 12, no segundo de 13 a 24, e assim por diante).

Solução:

Sejam a e b os números dos andares onde moram, respectivamente, Eduardo e Augusto, e x e y os números dos apartamentos de cada um. Assim, podemos escrever que:

$x = 12(a - 1) + r_1$, onde $1 \le r_1 \le 12$ $y = 12(b - 1) + r_2$, onde $1 \le r_2 \le 12$. Do enunciado temos que: $a = b$ e $x + y = 2164$

Assim: $x = 12y - 12 + r_1$ e $y = 12b - 12 + r_2$

$\therefore x + y = 13y - 12 + r_1 \Rightarrow 2164 = 13y - 12 + r_1 \Rightarrow 2176 = 13y + r_1$

Notemos que esta equação é semelhante à divisão Euclidiana, pois $1 \le r_1 \le 12$. Quando dividimos 2176 por 13, o quociente é $y = 167$ e o resto é $r_1 = 5$

Desta forma, como $x + y = 2164 \Rightarrow x = 1997$

12) (OBM-81 banco) Dado um inteiro n, mostre que existe um múltiplo de n que se escreve com os algarismos 0 e 1 apenas. (Por exemplo, se n = 3, temos 111 ou 1011, etc...).

Solução:

Sejam os números 1, 11, 111, 1111, ..., 111...11 onde temos $n + 1$ números, com o último possuindo $n + 1$ dígitos iguais a 1. Se dividirmos todos estes números por n, obteremos $n + 1$ restos, todos entre 0 e $n - 1$. Como entre 0 e $n - 1$ temos n números, então temos pelo menos 2 restos iguais. Desta forma teremos a situação: $111...11 = q_1.n + r$ $111...11 = q_2.n + r$

Subtraindo obteremos: $111...1100...00 = n(q_1 - q_2)$

Assim provamos que sempre existe um múltiplo de qualquer natural n tal que este número inicie somente com dígitos 1's e termine somente com dígitos 0's.

13) (IMO-88 banco) Se r é o resto quando cada um dos números 1059, 1417 e 2312 é dividido por d, onde d é um inteiro maior que 1, determine o valor de $d - r$.

Solução:

Pelo enunciado temos que: $1059 = d.q_1 + r$ $1417 = d.q_2 + r$ $2312 = d.q_3 + r$

Subtraindo todos os pares de equações obtemos:

$358 = 2.179 = d(q_2 - q_1)$ $895 = 5.179 = d.(q_3 - q_2)$ $1253 = 179.7 = d.(q_3 - q_1)$

Assim, temos que $d = 179$ $q_2 - q_1 = 2$ $q_3 - q_2 = 5$ $q_3 - q_1 = 7$

Ou seja: $1059 = 179.(5) + 164$ $1417 = 179.(7) + 164$ $2312 = 179.(12) + 164$

Então $d - r = 179 - 164 = 15$.

Exercícios

1) Sejam a e b inteiros. Mostre que $10a - b$ é um múltiplo de 7 se e somente se $a - 2b$ também é.

2) Prove que $5 \mid n(n^2 + 1)(n^2 + 4)$.

3) Se n é um inteiro, mostre que $n(n - 1)(2n - 1)$ é divisível por 6.

4) Demonstrar que $a^2 + 2$ nunca é divisível por 4, qualquer que seja o inteiro a.

5) Demonstrar que $30 \mid (n^5 - n)$

6) Prove que a soma dos quadrados de cinco inteiros consecutivos não pode ser o quadrado de um inteiro.

7) Determinar os inteiros positivos que divididos por 17 deixam um resto igual ao quadrado do quociente.

8) Achar os inteiros positivos menores que 150 e que divididos por 39 deixam um resto igual ao quociente.

9) Na divisão de dois inteiros positivos o quociente é 16 e o resto é o maior possível. Achar os dois inteiros, sabendo que a sua soma é 341.

10) Prove que $(21n - 3)/4$ e $(15n + 2)/6$ não podem ser ambos inteiros para os mesmos valores inteiros de n.

11) Prove que para todo inteiro positivo n e todo inteiro positivo ímpar k, $1 + 2 + ... + n$ divide $1^k + 2^k + ... + n^k$.

12) O comandante de uma caravela promete, como recompensa a três dos seus mais valentes marujos, as moedas de ouro, entre 200 e 300, contidas numa arca. No dia seguinte, estas moedas seriam distribuídas em partes iguais. Durante a noite, um dos marujos resolveu retirar, em segredo, sua parte. Ao repartir em três as moedas, notou que sobrava uma. Temendo que esta moeda fosse causar uma contenda, jogou-a ao mar, tomando para si a sua parte. Pouco depois, o segundo marujo teve a mesma idéia. Ao dividir por três as moedas da arca, constata que sobrava uma. Joga esta moeda ao mar, crendo assim, evitar algum litígio, e toma o que julgava ser a sua parte. Algum tempo depois, o terceiro marujo tem a mesma idéia, e, desconhecendo a antecipação de seus companheiros repete a divisão em três partes iguais das moedas restantes da arca, na qual sobrava uma moeda, que é atirada ao mar, e retem consigo a parte que, ao seu ver, lhe cabia. No dia seguinte, o comandante toma as moedas da arca, faz a partilha e percebe que sobra uma moeda. Para evitar problemas, fica com esta moeda e distribui o restante, igualmente, entre os três marujos. É claro que nenhum dos marujos reclamou da divisão, pois todos julgavam já ter retirado sua parte. Quantas eram as moedas, originalmente, na arca?

13) Determine um número de 4 dígitos, que dividido por 131, deixa um resto igual a 112, e quando dividido por 132 deixa um resto de 98.

14) Prove que se n é um inteiro ímpar maior que 3, então $n^4 - 18n^2 + 17$ é divisível por 64.

15) Mostre que para quaisquer dois inteiros a e b, o número $(a + b)(a - b)ab$ é um múltiplo de 6.

16) Quais inteiros possuem a seguinte propriedade: Se o dígito final é apagado, o inteiro é divisível pelo novo número.

17) Determine todos os inteiros com primeiro dígito igual a 6 e que possui a seguinte propriedade: Se este primeiro dígito é apagado, o número resultante é igual a 1/25 do valor original.

18) Prove que não existe nenhum número inteiro com a seguinte propriedade: Se o primeiro dígito é apagado, o número resultante é 1/35 do número original.

19) Dado um inteiro A de 2n dígitos, no qual o número B, que representa os primeiros n dígitos, é duas vezes o número C, que representa os n dígitos seguintes. Prove que:
a) A é divisível por 200...001 (onde existem n – 1 zeros) e o quociente é B – C.
b) A é divisível por 666...667 (onde existem n – 1 seis) e o quociente é B + C.

20) Demonstre que a soma dos cubos de três números naturais consecutivos é múltiplo de 9.

21) Existe algum valor inteiro n tal que $\frac{n^3-1}{n^2+11n-12}$ seja inteiro?

22) Se n^2 é o quadrado de um inteiro que não divisível nem por 2 e nem por 3, mostre que o número $n^2 + 23$ é divisível por 24.

23) Demonstrar que $360 \mid a^2(a^2 - 1)(a^2 - 4)$, qualquer que seja o inteiro a.

24) (UFRGS-2003) Se n é um número natural qualquer maior que 1, então n! + n – 1 é divisível por
a) n – 1 b) n c) n + 1 d) n! – 1 e) n!

25) (Unifor-98) Dividindo-se um número inteiro e positivo n por 15, obtêm-se quociente e resto inteiros, tais que o quociente é igual à quarta parte do resto. Desejando-se determinar o valor de n, constata-se que o número de soluções desse problema é
a) 1 b) 3 c) 4 d) 14 e) 15

26) (Unifor-98) Um certo número de ingressos para um show foi dividido igualmente entre os alunos presentes em uma sala de aula. Sabe-se que, se houvesse 8 alunos a mais na sala, cada um deles receberia 1 ingresso a menos e se houvesse 10 alunos a menos, cada um receberia 2 ingressos a mais. Nessas condições, é correto afirmar que o número de ingressos que coube a cada aluno presente foi
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

27) (Unifor-99) Sabe-se que nas divisões de um número inteiro x por 16 e por 18 obtêm-se o mesmo resto 12. Se a soma dos quocientes dessas divisões é 68, determine x.

28) (PUC/SP-2003) Nas afirmações I, II e III, considere que x, y e z são números inteiros pares e consecutivos, tais que x < y < z.
I. x.y.z é divisível por 24.
II. x + y + z é múltiplo de 12
III. x + z = 2y
SOMENTE é verdadeiro o que se afirma em
a) I b) II c) III d) I e II e) I e III

29) (FEI-2000) Sabendo-se que um determinado valor inteiro k é um múltiplo de 3 e que a metade desse valor k é um número inteiro par, é certo afirmar-se que:
a) a metade de k é um múltiplo de 5.
b) o quadrado de k é um múltiplo de 18.
c) o quadrado de k é um múltiplo de 10.
d) a metade de k é um múltiplo de 9.
e) a metade de k é um múltiplo de 4.

30) (Mackenzie-99) Os naturais n, n < 100, que divididos por 4, 6 e 8 dão sempre resto 3, têm soma:
a) 177 b) 201 c) 252 d) 276 e) 304

31) (Mackenzie-2002) Se, na igualdade $30^n = 4x$, n é um número natural positivo e x um número ímpar, o produto n.x vale.
a) 450 b) 175 c) 275 d) 360 e) 130

32) (Mackenzie-2003) Se da soma de todos os números ímpares positivos de 2 algarismos subtrairmos a soma de todos os números pares positivos de 2 algarismos, o resultado será:
a) 55 b) 51 c) 50 d) 45 e) 46

33) (UFU-2001) Considere os números naturais ímpares 1, 3, 5, ..., 2001. Se x = 1 x 3 x 5 x ... x 2001, o algarismo que ocupa a ordem das unidades de x é:
a) 7 b) 3 c) 5 d) 1

34) (Covest-2002) Sobre o natural $2^{30} - 1$ é incorreto afirmar que ele é:
a) divisível por $2^{15} - 1$
b) divisível por $2^{20} + 2^{10} + 1$
c) divisível por $2^{15} + 1$
d) divisível por $2^{10} - 1$
e) um número primo

35) (Fuvest-87) A diferença entre o cubo da soma de dois números inteiros e a soma de seus cubos pode ser:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

36) (Fuvest-2000) Se x e y são dois números inteiros, estritamente positivos e consecutivos, qual dos números abaixo é necessariamente um inteiro ímpar?
a) 2x + 3y b) 3x + 2y c) xy + 1
d) 2xy + 2 e) x + y + 1

37) (Fuvest-2001) Uma senhora tinha entre trinta e quarenta ações de uma empresa para dividir igualmente entre todos os seus netos. Num ano,

quando tinha 3 netos, se a partilha fosse feita, deixaria 1 ação sobrando. No ano seguinte, nasceu mais um neto e, ao dividir igualmente entre os quatro netos o mesmo número de ações, ela observou que sobrariam 3 ações. Nesta última situação, quantas ações receberá cada neto?
a) 6 b) 7 c) 8 d) 9 e) 10

38) (Fuvest-2001) A diferença entre dois números inteiros positivos é 10. Ao multiplicar um pelo outro, um estudante cometeu um engano, tendo diminuído em 4 o algarismo das dezenas do produto. Para conferir seus cálculos, dividiu o resultado obtido pelo menor dos fatores, obtendo 39 como quociente e 22 como resto. Determine os dois números.

39) (Unicamp-92) Mostre que 3 divide $n^3 - n$ qualquer que seja o número natural n.

40) (Unicamp-96) a) Quais são o quociente e o resto da divisão de 3785 por 17?
b) Qual o menor número natural, maior que 3785, que é múltiplo de 17?

41) (Unicamp-97) Sabe-se que um número natural escrito na base 10 como $...a_5\ a_4\ a_3\ a_2\ a_1\ a_0$ é divisível por 11 se, e somente se, $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - a_5 + \ldots$ for um número divisível por 11.
a) Aplique o critério acima para mostrar que o número natural escrito na base 10 como 123456789 não é divisível por 11.
b) Qual o menor número natural que devemos subtrair do número 123456789 para que a diferença seja um número divisível por 11?

42) (Unicamp-2004) Sabe-se que o número natural D, quando dividido por 31, deixa resto r, e que o mesmo número D, quando dividido por 17, deixa resto $2r$.
a) Qual é o maior valor possível para o número natural r?
b) Se o primeiro quociente for igual a 4 e o segundo quociente for igual a 7, calcule o valor numérico de D.

43) (UFC-99) Determine o número inteiro n que satisfaz simultaneamente às seguintes condições:
i) n está compreendido entre 6 000 e 7 000;
ii) n dividido por 35, ou por 45, ou por 50 deixa sempre resto 11.

44) (ESA-98) O menor número que se deve subtrair de 21316 para se obter um número que seja simultaneamente divisível por 5 e por 9 é:
a) 29 b) 31 c) 33 d) 36 e) 37

45) (Epcar-2003) A soma de dois números é 475 e, se dividirmos o maior por 16 e o menor por 3, encontramos resto zero e quocientes iguais. Encontre os dois números e selecione a opção INCORRETA.
a) Um deles é quadrado perfeito.
b) O maior divisor comum dos números é 75.
c) O quociente do maior pelo menor é uma dízima periódica.
d) O menor múltiplo não nulo comum aos números é 1200.

46) (Colégio Naval-81) Um terreno deve ser dividido em lotes iguais por certo número de herdeiros. Se houvessem três herdeiros a mais, cada lote diminuiria de 20 m^2 e, se houvessem quatro herdeiros a menos, cada lote aumentaria de 50 m^2. O número de metros quadrados da área do terreno todo é:
a) 1600 b) 1400 c) 1200 d) 1100 e) 900

47) (Colégio Naval-90) Os números da forma $4^{k^2+50} + 4^{k^2+51}$, $4^{k^2+52} + 4^{k^2+53}$ são sempre múltiplos de:
a) 17 b) 19 c) 23 d) 29 e) 31

48) (Colégio Naval-2001) Sejam os conjuntos A = {x ∈ Z | x = 6n + 3, n ∈ Z} e B = {x ∈ Z | x = 3n, n ∈ Z}. Então A ∩ B é igual a:
A) {x ∈ Z | x é par e múltiplo de 3}
B) {x ∈ Z | x é ímpar e múltiplo de 3}
C) {x ∈ Z | x é múltiplo de 3}
D) {x ∈ Z | x é múltiplo de 6}
E) {x ∈ Z | x é ímpar}

49) (Colégio Naval-2002) Se a e b são números naturais e 2a + b é divisível por 13, então um número múltiplo de 13 é:
a) 91a+b b) 92a−b c) 93a+b
d) 94a+b e) 95a+b

50) (Colégio Naval-2002) Se a é um número natural, $a^5 - 5a^3 + 4a$ é sempre divisível por:
a) 41 b) 48 c) 50 d) 60 e) 72

51) (Colégio Naval-2003) O número de múltiplos de 12 compreendidos entre 357 e 3578 é igual a.

a) 268 b) 269 c) 270 d) 271 e) 272

52) (IME-2000) Considere quatro números inteiros *a, b, c* e *d*. Prove que o produto:
$(a - b)(c - a)(d - a)(d - c)(d - b)(c - b)$ é divisível por 12.

53) (IME-2001) Prove que para qualquer número inteiro k, os números k e k^5 terminam sempre com o mesmo algarismo (algarismo das unidades).

Questões de Olimpíadas – Nível Intermediário

54) (Goiás) Dada uma equação do segundo grau, com coeficientes inteiros, mostre que o seu discriminante não pode ser igual a 23.

55) (São José dos Campos-98) Provar que $n^3 + 2n$ é divisível por 3, onde $n \in N$.

56) (Espírito Santo-99) Um dragão tem 100 cabeças. O dragão só morre se todas as suas cabeças forem cortadas. Um cavaleiro possui dois tipos diferentes de espadas. Com um golpe da primeira espada ele pode cortar exatamente 17 cabeças, mas, continuando vivo, nascem 11 novas cabeças no dragão. Com a segunda espada ele pode cortar exatamente 5 cabeças, mas, se ainda vivo, nascem 8 novas cabeças. Pode o dragão morrer desse jeito?

57) (João Pessoa-2000) Quando passeavam numa cidade, três estudantes de matemática, observaram que o condutor de um automóvel infringiu o código de estrada. Nenhum dos estudantes se recordava do número da matrícula (que tinha quatro algarismos) mas como eram matemáticos, cada um deles notou uma particularidade de tal número. Um deles notou que os dois primeiros algarismos eram iguais. O segundo reparou que também os dois últimos eram iguais. E, por último, o terceiro garantia que o número de matrícula era um quadrado perfeito (ou seja o quadrado de um número inteiro). É possível determinar o número da matrícula do automóvel conhecendo-se apenas estes dados? Justifique sua resposta.

58) (Numeratizar-2003) Quando um número é dividido por 7, obtemos quociente 4 e resto 6. Qual é o número?
a) 17 b) 168 c) 34 d) 31 e) 46

59) (Rio Grande do Sul-99) Divide-se 271 por um inteiro A e 285 por um inteiro B, o resto das divisões é 11 e 9 respectivamente. Encontre o menor valor possível de A e de B.

60) (Brasil-81 banco) Mostre que se n é ímpar, então $n^2 - 1$ é divisível por 8.

61) (Brasil-82 banco) Se subtrairmos de um número positivo x, de 2 algarismos, o número obtido de x por troca de seus dígitos, obteremos um cubo perfeito. Ache os possíveis valores de x.

62) (Brasil-98) O menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 9 é 9990. Qual é o menor múltiplo de 1998 que possui apenas os algarismos 0 e 3?

63) (OBM-98) Hoje é sábado. Que dia da semana será daqui a 99 dias?
A) segunda-feira B) sábado C) domingo
D) sexta-feira E) quinta-feira

64) (OBM-2000) O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Ele teve mais de 39 filhos, incluindo muitos gêmeos. De fato, o historiador Ahmed Aab afirma num dos seus escritos que todos os filhos do emir eram gêmeos duplos, exceto 39; todos eram gêmeos triplos, exceto 39; todos eram gêmeos quádruplos, exceto 39. O número de filhos do emir é:
A) 111 B) 48 C) 51 D) 78 E) 75

65) (OBM-2000) Quantos números inteiros e positivos menores do que 1.000.000 existem cujos cubos terminam em 1?
a) 1.000 b) 10.000 c) 50.000
d) 100.000 e) 500.000

66) (OBM-2000) Qual é o menor inteiro positivo que é o dobro de um cubo e o quíntuplo de um quadrado?

67) (OBM-2001) Joana escreve a seqüência de números naturais 1, 6, 11, ..., onde cada número, com exceção do primeiro, é igual ao anterior mais cinco. Joana pára quando encontra o primeiro número de 3 algarismos. Esse número é:
A) 100 B) 104 C) 101 D) 103 E) 102

68) (OBM-2002) Quantos números inteiros positivos menores que 900 são múltiplos de 7 e terminam em 7?

A) 10 B) 11 C) 12 D) 13 E) 14

69) (OBM-2002) O resto da divisão por 9 de $\sqrt{111111111 - 22222}$ é:
A) 0 B) 1 C) 3 D) 6 E) 8

70) (Argentina) Sejam p = 2.3.5.7.11.13..... o produto de todos os números primos até 1997 e q = 3.5.7.9.11.13..... o produto de todos os números ímpares até 1997. Achar a penúltima cifra da direita do produto pq.

71) (Argentina) Um número a de três cifras é raro se existe um número b de duas cifras tal que ao dividir a por b, o resto é igual ao cubo do quociente. Por exemplo, 100 é raro porque ao dividi-lo por 46, o quociente é 2 e o resto é $8 = 2^3$. Quantos números raros de três cifras existem?

72) (Argentina-96) Determinar o maior número natural de 6 dígitos, todos distintos de zero, que é múltiplo do número que resulta ao apagar o primeiro dígito da esquerda.

73) (Argentina-2001) Determinar o menor número natural que satisfaz as seguintes três condições simultaneamente:
i) tem resto 24 na divisão por 57;
ii) tem resto 73 na divisão por 106;
iii) tem resto 126 na divisão por 159.

74) (Chile-91) Demonstre que as expressões 2x + 3y, 9x + 5y são ambas divisíveis por 17 para os mesmos valores inteiros de x e y.

75) (México) Encontre todos os inteiros positivos n tais que $n^2 + 1$ é um múltiplo de $n + 1$.

76) (Wisconsin-94) Determine todos os números de 3 dígitos que são iguais à média aritmética dos 6 números que podem ser obtidos pela permutação dos dígitos de m de todas as formas possíveis.

77) (Wisconsin-98) Prove que nenhuma potência de 2 pode ser escrita como soma de dois ou mais inteiros positivos consecutivos.

78) (Duke-98) Determine todos os inteiros n tais que $n - 3$ divide $n^2 + 2$.

79) (Canadá-78) Determine todos os pares a e b de inteiros positivos satisfazendo $2a^2 = 3b^3$.

80) (Inglaterra-71) Mostre que $2n^3 + 2n^2 + 2n + 1$ nunca é múltiplo de 3.

81) (Noruega-94) Se a e b são números naturais ($a, b \in \{1, 2, 3, ...\}$) e $a + b + ab = 54$, então a + b é igual a:
a) 12 b) 14 c) 15 d) 16 e) 17

82) (Bélgica-93) Para quantos valores inteiros de n (com $100 \le n \le 200$) a fração $\frac{n^2 - 3}{n^2 - 1}$ é irredutível?
a) 0 b) 25 c) 50 d) 75 e) 101

83) (Bélgica-97) Sejam $a, b, c \in \mathbb{N}_0$. Dividindo a por b encontramos o quociente q e o resto r, e dividindo q por c encontramos o quociente q' e o resto r'. A divisão de a por bc possui o resto:
a) r b) r' c) rr' d) $br' + r$ e) nda

84) (Bélgica-2003) O último dígito da soma $6^{2003} + 6^{2002} + ... + 6 + 1$ é igual a:
a) 5 b) 6 c) 7 d) 8 e) 9

85) (Rússia-92) Existe algum inteiro positivo de 4 dígitos tal que não é possível fazer nenhuma troca de qualquer conjunto de 3 dos seus dígitos de modo a formar um número que é múltiplo de 1992.

86) (OBM-2003) Para quantos inteiros positivos m o número $\frac{2004}{m^2 - 2}$ é um inteiro positivo?
a) um b) dois c) três
d) quatro e) mais que quatro

Questões de Olimpíadas – Nível Avançado

87) (Ceará-96) Os lados de um triângulo são expressos, em cm, por três inteiros consecutivos e sua área, em cm^2, é dada por um inteiro. Prove que o menor lado do triângulo é ímpar.

88) (Rio Grande do Sul-2002) Dizemos que um natural n é olímpico se nenhum de seus algarismos é zero e a soma deles divide o seu produto. Por exemplo, 257 é olímpico pois 2 + 5 + 7 = 14 divide 2 x 5 x 7 = 70, mas 89 não é olímpico porque 8 + 9 = 17 não divide 8 x 9 = 72.

Mostre que para todo inteiro k > 0 existe um olímpico de k algarismos.

89) (OBM-89) Seja k um inteiro positivo tal que $\frac{k(k-1)}{3}$ é um quadrado perfeito. Prove que $\frac{k}{3}$ e $(k+1)$ são quadrados perfeitos.

90) (OBM-94) Quantos números n do conjunto {1, 2, 3, ..., 100} existem de tal forma que o algarismo das dezenas de n^2 seja um número ímpar?
a) 10 b) 20 c) 30 d) 40 e) 50

91) (OBM-95) Quantos inteiros não-negativos menores que 61 não podem ser escritos da forma $2a + 2b + ab$, onde a, b são inteiros positivos?
a) 09 b) 10 c) 16 d) 26 e) 28

92) (OBM-97) O número de valores inteiros de m para os quais as raízes da equação $x^2 - (m + m^2)x + m^3 - 1 = 0$ são inteiras é igual a:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

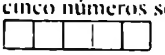
93) (OBM-2002) Determine o maior natural k para o qual existe um inteiro n tal que 3^k divide $n^3 - 3n^2 + 22$.

94) (Seletiva Brasileira Cone Sul-99) Sejam p, q, r, s inteiros não negativos tais que $(p + q)^2 + q = (r + s)^2 + s$. Prove que $p = r$ e $q = s$.

95) (Seletiva Brasileira Cone Sul-2002) Uma progressão aritmética infinita, formada por inteiros positivos dois a dois distintos, é tal que um de seus termos é um quadrado perfeito. Prove que tal seqüência contém infinitos termos que são quadrados perfeitos.

96) (Seletiva Brasileira Cone Sul-2003) Seja T o conjunto de todos as ternas (a, b, c) de inteiros tais que $1 \le a < b < c \le 2002$. Para cada terna (a, b, c) em T, considere o produto abc. Some todos estes produtos correspondentes a todas as ternas em T. Prove que a soma é divisível por 2003.

97) (Argentina) Colocar números naturais distintos e maiores que 1 nas casas de maneira que sempre o número de uma casa seja múltiplo do que está na casa anterior e que a soma dos cinco números seja 517.



98) (Argentina) Prove que $7 \mid a^2 + b^2$ somente quando $7 \mid a$ e $7 \mid b$.

99) (Argentina) Consideramos os números naturais N menores que 10000 que tem o dígito 2 no lugar das dezenas. Quantos destes números N deixam resto 5 na divisão por 12?

100) (Argentina) Sejam x e d números naturais tais que o resto de dividir x por d é igual a 4 e o resto de dividir $14x$ por d é 17. Achar o resto de dividir $210x$ por d.

101) (Argentina) Encontrar dois dígitos distintos entre si A e B tais que o número da forma BABABA seja múltiplo de AAA, de BBB e de AB, e, entretanto, BA não seja múltiplo de B.

102) (Argentina) Prove que não existe nenhum inteiro n tal que $n^2 + 3n + 4$ seja divisível por 49.

103) (Argentina-97) Achar todos os números naturais n menores que 1000 tais que n^2 termina em 44, ou seja, n^2 tem seus dois últimos dígitos iguais a 4.

104) (Argentina-98) Determinar o maior natural n tal que $4^{19} + 4^{98} + 4^n$ é um quadrado perfeito.

105) (Número de Ouro-97) Existem quatro números naturais consecutivos cujo produto seja um quadrado perfeito?

106) (Olimpíada Provincial-97) Achar todos os quadrados perfeitos que tem o primeiro dígito (da esquerda) igual a 1 e todos os restantes dígitos iguais a 4.

107) (Rioplatense-98) Prove que se são dados 101 números inteiros positivos quaisquer, é possível escolher 11 deles cuja soma seja divisível por 11.

108) (Rioplatense-2000) Existe um número natural n tal que a soma dos dígitos de n seja divisível por 23 e a soma dos dígitos de $(n + 1)$ também seja divisível por 23? Se a resposta é sim, determine o menor número n. Se é não, explicar por que.

109) (Rioplatense-2002) Encontre todos os números de dois algarismos que são múltiplos da soma de seus algarismos.

110) (Chile-95) Existem dois inteiros positivos a e b tais que sua soma seja 1995 e que seu produto seja um múltiplo de 1995?

111) (Chile-97) Para cada número inteiro positivo n, forma-se o número $K_n = n^2 + n + 1$. Prove que nenhum dos números K_n é um quadrado perfeito.

112) (México) Encontre todos os números de 4 dígitos com as seguintes propriedades:
a) A primeira e a terceira cifras são iguais;
b) A segunda e a quarta são iguais e o número mais 1 é um quadrado perfeito.

113) (Wisconsin-94) Suponha que n é um inteiro positivo. Determine o menor inteiro positivo x tal que 2^n divide $x^{1995} + 1$.

114) (Wisconsin-97) Suponha que a e b são inteiros tais que $a + 2b$ e $b + 2a$ são quadrados. Prove que a e b são múltiplos de 3.

115) (Wisconsin-2003) Suponha que $a^3 + b^3 + c^3$ é um múltiplo de 16, onde a, b e c são inteiros. Mostre que $a^3 + b^3 + c^3$ é um múltiplo de 64.

116) (Manhattan-98) John é um menino de 10 anos. Ele somente sabe escrever o dígito 1. Prove que, usando somente o dígito 1, John pode escrever um múltiplo de 1999. É possível caracterizar todos os inteiros n para os quais, usando somente o dígito 1, pode-se escrever um múltiplo de n?

117) (Putnam-56) Prove que todo inteiro positivo possui um múltiplo cuja representação decimal envolve todos os dez dígitos.

118) (Canadá-71) Mostre que, para todos os inteiros n, $n^2 + 2n + 12$ não é múltiplo de 121.

119) (Canadá-78) Seja n um inteiro. Se o dígito das dezenas de n^2 é 7, qual o dígito das unidades de n^2?

120) (Canadá Preparação IMO-2000) É possível dividir os números naturais 1, 2, ..., n em dois grupos disjuntos, tais que os quadrados dos membros em cada grupo possuem a mesma soma se (a) n = 40000; (b) n = 40002?

121) (Espanha-85) Seja n um número natural. Prove que a expressão $(n + 1)(n + 2)...(2n - 1)(2n)$ é divisível por 2^n.

122) (Inglaterra-2001) Determine todos os números naturais N de dois algarismos para os quais a soma dos algarismos de $10^N - N$ é divisível por 170.

123) (Alemanha-96) Determine o conjunto de todos os inteiros positivos n para os quais $n.2^{n+1} + 1$ é um quadrado perfeito.

124) (Repúblicas Tcheca e Eslovaca-99) Mostre que para todo número natural n o produto $\left(4-\frac{2}{1}\right)\left(4-\frac{2}{2}\right)\left(4-\frac{2}{3}\right)\cdots\left(4-\frac{2}{n}\right)$ é um inteiro.

125) (Polônia-94) Determine todos os pares (x, y) de números naturais tais que os números $\frac{x+1}{y}$ e $\frac{y+1}{x}$ são naturais.

126) (Hong Kong-91) Seja a_n um número de 3 dígitos iguais a 1: $a_n = 111...11$. Mostre que a_n é divisível por 3^n.

127) (Hong Kong-97) Determine o número de inteiros positivos $a < 100$ tal que $a^3 - 23$ é divisível por 24.

128) (Índia-96) Se x e y são inteiros positivos tais que $xy + 1$ é divisível por 24, mostre que $x + y$ é divisível por 24.

129) (Rússia-67) a) Os dígitos de número natural são rearranjados. Prove que a soma do número dado com o obtido não pode ser igual a 999...99 (1967 noves).
b) Os dígitos de um número natural são rearranjados. Prove que se a soma do número dado com o obtido é igual a 10^{10}, então o número dado era divisível por 10.

130) (Rússia-70) Todos os números de 5 dígitos desde 11111 até 99999 são escritos em cartões. Estes cartões são postos em linha em uma ordem arbitrária, resultando em um número de 444445 dígitos. Prove que este número não é uma potência de 2.

131) (Rússia-74) Entre todos os números representados como $36^m - 5^n$ (m e n são números naturais), determine o menor. Prove que ele é realmente o menor.

132) (Rússia-80) Um número natural contem seis dígitos distintos não-nulos e é divisível por 37. Prove que, rearranjando a ordem dos dígitos, é possível obter pelo menos mais 23 números que são divisíveis por 37.

133) (Rússia-83) Dados os números naturais n, m, k. Sabe-se que m^n é divisível por n^m; e n^k é divisível por k^n. Prove que m^k é divisível por k^m.

134) (Rússia-97) Os números de 1 a 37 são escritos em uma linha de modo que cada número divide a soma dos números anteriores. Se o primeiro número é 37 e o segundo é 1, qual é o terceiro número?

135) (International Talent Search) Note que se ao produto de dois membros distintos de {1, 16, 27} é acrescido 9, o resultado é o quadrado perfeito de um inteiro. Determine o único inteiro positivo n para o qual $n + 9$, $16n + 9$ e $27n + 9$ são também quadrados perfeitos.

136) (Báltica-99) Determine todos os inteiros positivos n com a propriedade que raiz cúbica de n é obtida pela remoção dos seus últimos 3 dígitos.

137) (Torneio das Cidades-86) Pode 1986 ser representado como a soma de 6 quadrados perfeitos?

138) (Torneio das Cidades-98) Sabe-se que o quadrado de um número inteiro termina em 09. Demonstrar que, em tal quadrado, o dígito das centenas é par.

139) (Cone Sul-banco) Mostre que qualquer número inteiro é a soma de 5 cubos.

140) (IMO-76) Determine o maior número que é produto de inteiros positivos cuja soma é 1976.

141) (IMO-88 banco) Se r é o resto quando cada um dos números 1059, 1417 e 2312 é dividido por d, onde d é um inteiro maior que 1, determine o valor de $d - r$.

142) (Torneio das Cidades-95) Prove que 40...09 (com uma quantidade arbitrária de zeros) não é um quadrado perfeito.

143) (Suécia-91) Determine todos os inteiros positivos m e n tais que $\frac{1}{m} + \frac{1}{n} - \frac{1}{mn} = \frac{2}{5}$.

144) (Hungria-53) Os inteiros positivos n e d são tais que d divide $2n^2$. Prove que $n^2 + d$ não é um quadrado perfeito.

145) (Seletiva Brasileira Cone Sul-2003) Encontre o menor inteiro positivo n tal que 3^{2003} é um divisor de $(n + 1)(n + 2)...(3n)$.

146) (Vietnã-74) Determine todos os inteiros n e b, com $0 < b < 10$, tais que se a_n é um inteiro positivo com n dígitos, todos iguais a 1, então $a_{2n} - b.a_n$ é um quadrado perfeito.

147) (Vietnã-76) Determine todas as soluções inteiras positivas do sistema $m^{m^n} = n^{12}$, $n^{m^n} = m^3$.

148) (Vietnã-80) Determine todas as soluções inteiras positivas de $2^a + 2^b + 2^c = 2336$.

149) (Inglaterra-2002) Determine todos os inteiros positivos m e n, onde n é ímpar, que satisfazem $\frac{1}{m} + \frac{4}{n} = \frac{1}{12}$.

150) (Rússia-84) Os dígitos x e y satisfazem a condição: para todo $n \geq 1$ o número xx...x6yy...y4 (n vezes x e n vezes y) é um quadrado perfeito. Determine todos os possíveis valores de x e y.

151) (Rússia-77) Chamamos de "fino" o número de 2n dígitos que é um quadrado perfeito e que os dois números representados pelos seus primeiros n dígitos (primeiro dígito diferente de zero) e últimos n dígitos (primeiro dígito pode ser zero mas todos os dígitos não podem ser nulos) são também quadrados perfeitos.
a) Determine todos os números "finos" de dois e quatro algarismos.
b) Existe algum número "fino" de seis algarismos?
c) Prove que existe um número "fino" de vinte dígitos.

NÚMEROS PRIMOS

6.1. DEFINIÇÃO:

Seja $p > 1$ um inteiro positivo. Diz-se que p é um número primo (ou apenas primo) se e somente se p apresenta como seus únicos divisores 1 e p. Se um inteiro positivo n maior que 1 não é primo então chama-se n de composto.

6.2. PROPRIEDADES:

(1) Se p é um primo tal que $p \mid ab$, então $p \mid a$ ou $p \mid b$.
(2) Se p é um primo tal que $p \mid a_1a_2...a_n$, então existe um índice k, com $1 \le k \le n$, tal que $p \mid a_k$.
(3) Se os inteiros $p, q_1, q_2, ..., q_n$ são todos números primos e se $p \mid q_1q_2...q_n$, então existe um índice k, com $1 \le k \le n$, tal que $p = a_k$.
(4) Todo inteiro composto possui um divisor primo.

Exemplos:

1) Determinar todos os primos p tais que $3p + 1$ é um quadrado perfeito.
Solução:
$3p + 1 = x^2 \Rightarrow 3p = x^2 - 1 \Rightarrow 3p = (x + 1)(x - 1)$
Como p é um número primo, então as possibilidades são:
i) $x + 1 = 3$ e $x - 1 = p \Rightarrow x = 2$ e $p = 1$ impossível pois 1 não é primo
ii) $x + 1 = p$ e $x - 1 = 3 \Rightarrow x = 4$ e $p = 5$

2) O menor número primo que divide $3^{11} + 5^{12}$ é:
a) 2 b) 3 c) 5 d) $3^{11} + 5^{12}$ e) nda
Solução:
Como 3^{11} e 5^{12} são números ímpares, então a sua soma vai ser um número par. Assim sendo, $3^{11} + 5^{12}$ é divisível por 2, que é o menor número primo.

3) (OBM-95) Quantos são os números primos p, para os quais $p^{1994} + p^{1995}$ é um quadrado perfeito?
Solução:
a) 0 b) 1 c) 22 d) 3 e) 4
Solução:
Notemos que $p^{1994} + p^{1995} = p^{1994}(p + 1)$
Desde que $p^{1994} = (p^{997})^2$ é um quadrado perfeito, então para que $p^{1994} + p^{1995}$ seja um quadrado perfeito basta que $p + 1$ seja um quadrado perfeito:
$p + 1 = x^2 \Rightarrow p = x^2 - 1 \Rightarrow p = (x - 1)(x + 1)$
Como p é primo, a única possibilidade é $x = 2 \Rightarrow p = 3$

4) Determine o menor inteiro positivo k tal que $(k + 1) + (k + 2) + ... + (k + 19)$ seja um quadrado perfeito.
Solução:
Calculando $(k + 1) + (k + 2) + ... + (k + 19) = 19k + 190 = 19(k + 10)$.
Desde que 19 é primo, para que $19(k + 10)$ seja quadrado perfeito então $k + 10$ deve ser divisível por 19. O menor valor ocorre quando $k + 10 = 19 \Rightarrow k = 9$.
Assim, para $k = 9$, temos $(k + 1) + (k + 2) + ... + (k + 19) = 19^2$.
No caso geral, $k + 10 = 19x^2 \Rightarrow k = 19x^2 - 10$.

5) (Competição Descartes-99) Se p_1 e p_2 são números primos distintos e $A = (p_1p_2 + 1)^4 - 1$, mostre que A possui ao menos 4 divisores primos distintos.
Solução:
Seja $p_3 = p_1p_2 + 2$.

Observe que: $A = (p_1^2p_2^2 - 2p_1p_2 - 1)^2 - 12 = (p_1^2p_2^2 + 2p_1p_2 + 1 - 1)(p_1^2p_2^2 + 2p_1p_2 + 1 + 1) \Rightarrow$
$A = p_1p_2(p_1p_2 + 2)(p_1^2p_2^2 + 2p_1p_2 + 2) \Rightarrow A = p_1p_2p_3(p_1p_2p_3 + 2)$
Suponhamos que $p_3 \mid p_1$. Desde que $p_3 = p_1p_2 + 2$ teremos $p_3 \mid 2$, que é falso por p_3 é ímpar e > 1.
Assim, p_3 não divide p_1. Analogamente temos que p_3 não divide p_2. Temos agora dois casos:
i) p_3 composto: $p_1p_2p_3$ possui ao menos 4 divisores primos $\Rightarrow$ A possui ao menos 4 divisores primos.
ii) p_3 primo. Seja $p_4 = p_1p_2p_3 + 2$. Novamente teremos que p_4 não divide nenhum dos números p_1, p_2 ou p_3, pois se dividisse então teríamos $p_4 \mid 2$, que é falso uma vez que p_4 é ímpar e maior que 1.
Logo p_4 contribui com pelo menos mais um divisor primo, implicando que A possua ao menos 4 divisores primos.

6) (Olimpíada da Hungria-1923) Prove que, se os termos de uma progressão aritmética infinita de números naturais não são todos iguais, então não podem ser todos primos.
Solução:
Seja $a_n = a_1 + (n - 1)r$, onde a_1, n e r são todos números naturais, $n = 1, 2, 3, \ldots$
Em algum momento teremos $n = a_1 + 1 = x \Rightarrow a_x = a_1 + (a_1 + 1 - 1)r = a_1 + a_1r = (r + 1)a_1$
Se $r + 1 \geq 2$ e $a_1 \geq 2$ teremos que a_x não é primo.
Para que a_x seja primo teremos que impor que $r = 0$ e a_1 sendo primo ou $a_1 = 1$ e $r + 1$ sendo primo.
Entretanto, quando $n = 1 \Rightarrow a_n = 1$ e 1 não é primo.
Portanto, a única possibilidade é para $r = 0$ e a_1 primo.

7) Mostre que o numerador de $1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{3} + \ldots + \frac{1995}{1996}$ é divisível por 1997.

Solução:

Fazendo $\frac{x-1}{x} = 1 - \frac{1}{x}$, temos:

$$\frac{p}{q} = 1 + 1 - \frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{4} + \ldots + 1 - \frac{1}{1995} + 1 - \frac{1}{1996} \Rightarrow \frac{p}{q} = 1997 - \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{1995} + \frac{1}{1996}\right)$$

Pode-se agora agrupar os termos eqüidistantes dos extremos, de modo que:

$$\frac{p}{q} = 1997 - \left[\left(1 + \frac{1}{1996}\right) + \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{1995}\right) + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{1994}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{998} + \frac{1}{999}\right)\right] \Rightarrow$$

$$\frac{p}{q} = 1997 - \left[\frac{1997}{1.1996} + \frac{1997}{2.1995} + \frac{1997}{3.1994} + \ldots + \frac{1997}{998.999}\right] \Rightarrow$$

$$\frac{p}{q} = 1997\left[1 - \left(\frac{1}{1.1996} + \frac{1}{2.1995} + \frac{1}{3.1994} + \ldots + \frac{1}{998.999}\right)\right] \Rightarrow \frac{p}{q} = 1997\frac{m}{n}$$

, onde n é a multiplicação de 1 até 1996, sendo que nenhum destes termos divide 1997, pois 1997 é um número primo. Assim, temos que p.n = 1997.q.m. e como n não divide 1997, então 1997 divide p.

8) Seja n um inteiro positivo maior ou igual a 5. Mostre que no máximo 8 membros do conjunto $\{n + 1, n + 2, \ldots, n + 30\}$ podem ser primos.
Solução:
Observe que todos os membros do conjunto $S_n = \{n + 1, n + 2, \ldots, n + 30\}$ podem ser expressos na forma $30N + i$, onde N é um inteiro não negativo e i varia de 0 até 29. Note que $30N + i$ é múltiplo de 2 para $i = 0, 2, 4, \ldots, 28$; é múltiplo de 3 para $i = 0, 3, 6, \ldots, 27$; é múltiplo de 5 para $i = 0, 5, 10, \ldots, 25$.
Ou seja, para $n \geq 5$, os únicos valores de i para os quais $30N + i$ pode ser primo são os inteiros positivos menores que trinta e tais que mdc $(30, i) = 1$, que são os valores 1, 7, 11, 13, 17, 19, 23 e 29. Portanto, para $n \geq 5$, existem no máximo 8 primos em S_n.

9) Seja p um primo, $p > 3$. Provar que se existe um inteiro a tal que p divide $(a^2 - a + 3)$, então existe um inteiro b tal que p divide $(b^2 - b + 25)$.
Solução:

Se p é um primo maior que 3 então p é ímpar p não divide 3.
Se fizermos $b = 3a - 1 \Rightarrow b^2 - b + 25 = (3a - 1)^2 - (3a - 1) + 25 = 9a^2 - 9a + 27 = 9(a^2 - a + 3)$.
Assim, como $p \mid (a^2 - a + 3)$ e p não divide 3 $\Rightarrow p \mid (b^2 - b + 25)$.

10) (Olimpíada Iberoamericana-93) Um número natural é palíndromo se ao escrevê-lo em notação decimal pode-se ler de igual forma da esquerda para a direita como da direita para a esquerda. Por exemplo: 8, 23432, 6446. Sejam $x_1 < x_2 < ... < x_i < x_{i+1} < ...$ todos os números palíndromos. Para cada i seja $y_i = x_{i+1} - x_i$. Quantos números primos distintos têm o conjunto $\{y_1, y_2, y_3 ...\}$?.
Solução:
Os primeiros números palíndromos são: 1, 2, 3, ..., 9, 11, 22, 33, ..., 99, 101, 111, ..., 191, 202, 212, ...
Notemos que $22 - 9 = 2 \quad 101 - 99 = 2 \quad 33 - 22 = 11 \quad 44 - 33 = 11 \quad 99 - 88 = 11$
Vamos provar que estes são os únicos valores que y_i pode assumir.
Se x_i e x_{i+1} possuem diferentes números de dígitos, então x_i é da forma 99...9 e x_{i+1} é da forma 10...01. então $y_i = x_{i+1} - x_i = 2$.
Se x_i e x_{i+1} possuem o mesmo número de dígitos e terminam no mesmo dígito então 10 divide y_i.
Se x_i e x_{i+1} possuem o mesmo número de dígitos e terminam em dígitos diferentes, digamos r e s, então temos que $s = r + 1$, x_i é da forma r999...9r, e x_{i+1} é da forma (r + 1)0...0(r + 1)
Então $y_i = x_i - x_{i+1} = \{r + 1\} - \{10 - r\} = 11$.
Portanto somente dois primos pertencem ao conjunto $\{y_1, y_2, ...\}$

11) (Olimpíada da Polônia-99) Prove que entre os números da forma $50^n + (50n + 1)^{50}$, onde n é um número natural, existem infinitos números compostos.
Solução:
Desde que $a^5 + b^5 = (a + b)(a^4 - a^3b + a^2b^2 - ab^3 + ab^4)$, então $a^5 + b^5$ é divisível por a + b.
Façamos n = 5k, ou seja, n múltiplo de 5. Assim:
$50^n + (50n + 1)^{50} = (50^k)^5 + [(250k + 1)^{10}]^5 = [50^k + (250k + 1)^{10}].X$, onde X é um inteiro qualquer, implicando que $50^n + (50n + 1)^{50}$ é composto quando n é múltiplo de 5, ou seja, para infinitos valores de n.

12) (a) Suponha que p é um primo ímpar e a e b são inteiros positivos tais que p^4 divide $a^2 + b^2$ e p^4 também divide $a(a + b)^2$. Prove que p^4 também divide $a(a + b)$.
(b) Suponha que p é um primo ímpar e a e b são inteiros positivos tais que p^5 divide $a^2 + b^2$ e p^5 também divide
$a(a + b)^2$. Mostre através de um exemplo que p^5 não necessariamente divide $a(a + b)$.
Solução:
(a) Notemos que $a(a + b)^2 = a(a^2 + b^2) + 2a^2b$. Como p^4 divide $a(a + b)^2$ e $a^2 + b^2$, então também divide $2a^2b$
Desde que p é um primo ímpar, então p^4 divide a^2b.
Suponhamos que p^2 não divide a, então as duas únicas potências de p que podem dividir a^2 são p ou p^2.
Como p^4 divide a^2b então p^2 divide b, implicando que p^4 divide b^2.
Entretanto isto é uma contradição, pois p^4 divide $a^2 + b^2$ e b^2, mas não divide a^2.
Deste modo, p^2 deve dividir a, implicando que p^4 divide a^2.
Como p^4 divide $a^2 + b^2$ e a^2, então p^4 divide b^2.
Como p^4 divide a^2 e b^2, então p^2 divide a e b, implicando também dividir a + b
Desde que p^2 divide a + b e a, então p^4 divide $a(a + b)$
(b) Da mesma forma que o item anterior, se p^5 divide $a^2 - b^2$, p^2 divide a e b, mas p^3 não divide a + b.
Fazendo $a = p^2x$ e $b = p^2y$, então p divide $x^2 + y^2$ e p não divide $x + y$.
Fazendo $x = 2$, $y = 1$ e $p = 5$, temos $a = 50$ e $b = 25$.

6.3. TEOREMA FUNDAMENTAL DA ARITMÉTICA

"Todo inteiro positivo $n > 1$ é igual a um primo ou igual a um produto de fatores primos."

Demonstração:

Se $\underline{n}$ é um número primo então a decomposição é o próprio primo. Se $\underline{n}$ for um número composto então, pela propriedade 4 do item anterior, ele possui um divisor primo p_1: $n = p_1n_1$, $1 < n_1 < n$.

Se n_1 é primo, então $\underline{n}$ seria o produto de dois primos, p_1 e n_1.

Se $\underline{n}$ for composto então admite um divisor primo p_2, ou seja: $n = p_1p_2n$, $1 < n_2 < n_1$.

Se n_2 é primo, então $\underline{n}$ seria o produto de três primos, p_1, p_2 e n_2. Entretanto, se n_2 for composto ele possui um divisor primo p_3, isto é, $n = p_1p_2p_3n_3$, $1 < n_3 < n_2$ e assim por diante.

Desta forma obtemos a seqüência decrescente: $n > n_1 > n_2 > n_3 \ldots > 1$. Como existe um número finito de inteiros positivos menores que $\underline{n}$ e maiores que 1, existe necessariamente um n_r que é um primo p_r ($n_r = p_r$). Desta forma, teremos $n = p_1p_2p_3\ldots p_r$.

6.3.1. Teorema: "A menos da ordem dos fatores, a decomposição de um inteiro positivo $n > 1$ como produto de fatores primos é única."

Demonstração:

Suponhamos que $\underline{n}$ admita duas decomposições como produto de fatores primos:

$N = p_1p_2\ldots p_r = q_1q_2\ldots q_s$, $(r \le s)$ onde p_i e q_j são inteiros primos e $p_1 \le p_2 \le \ldots \le p_r$, $q_1 \le q_2 \le \ldots \le q_s$

Como $p_1 \mid q_1q_2\ldots q_s$, então $\in \underline{k}$ $(1 \le k \le s)$ tal que $p_1 = q_k$.

Da mesma forma $p_2 = q_h$, $p_3 = q_m$, .. e assim por diante.

Se $r < s$, depois de $\underline{r}$ cancelamentos temos: $1 = q_{r+1}q_{r+2}\ldots q_s$, o que é um absurdo, pois $q_j > 1$.

Assim $r = s$ e cada p_i é igual a um q_j, ou seja, as decomposições são idênticas, a menos da ordem dos fatores. Deste modo, qualquer inteiro $n > 1$ admite somente uma representação da forma: $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}\ldots p_r^{k_r}$ onde, para $i = 1, 2, \ldots, r$, cada k_i é um inteiro positivo e cada p_i é um primo, com $p_1 < p_2 < \ldots < p_r$, denominada decomposição canônica do inteiro positivo n.

Exemplos:

1) (Mackenzie-2005) A soma dos fatores primos distintos do número $1{,}26 \times 10^6$ é:

a) 11 b) 13 c) 15 d) 17 e) 19

Solução:

Observe que $1{,}26.10^6 = 1260000 = 2^5.3^2.5^4.7$

Assim, a soma dos fatores é igual a $2 + 3 + 5 + 7 = 17$

2) Quantas vezes aparece o fator 2 na decomposição em fatores primos de $1 + 2 + 3 + \ldots + 10^{11}$?

(a) 8 (b) 9 (c) 10 (d) 11

Solução:

Sabemos que $1 + 2 + 3 + \ldots + n = n(n + 1)/2$.

Portanto: $1 + 2 + 3 + \ldots + 10^{11} = [10^{11}(10^{11} + 1)]/2 = [2^{11}.5^{11}(10^{11} + 1)]/2 = [2^{10}.5^{11}(10^{11} + 1)]$

Como $5^{11}.10^{11} + 1$ é ímpar, então o fator de 2 é 10.

3) (Olimpíada do Pará-2000) Prove que o quadrado de todo número primo maior que 3 deixa resto 1 na divisão por 12.

Solução:

Um número primo quando dividido por 6 deixa resto 1 ou 5.

Assim, $(6k + 1)^2 = 36k^2 + 12k + 1 = 12x + 1$ ou $(6k + 5)^2 = 36k^2 + 60k + 25 = 12y + 1$.

4) Considera-se um número $\underline{n}$ de quatro dígitos, quadrado perfeito, tal que todos seus dígitos são menores que 6. Se a cada dígito é somado 1, o número resultante é outro quadrado perfeito. Achar $\underline{n}$.

Solução:

Todos os números quadrados perfeitos de quatro dígitos (< 6) são quadrados de números de dois dígitos.

Note que: $78^2 = 6084$; $77^2 = 5929$; $31^2 = 961$; $32^2 = 1024$.

Portanto, todo quadrado perfeito de quatro dígitos (< 6): $n = x^2 \Rightarrow 77 \le x \le 31$.
i) $n = \underline{abcd} = 1000a + 100b + 10c + d$
ii) $m = \underline{(a+1)(b+1)(c+1)(d+1)} = 1000(a+1) + 100(b+1) + 10(c+1) + (d+1) \Rightarrow$
$m = 1111 + 1000a + 100b + 10c + d \Rightarrow m = 1111 + n \Rightarrow m - n = 1111 \Rightarrow y^2 - x^2 = 1111 \Rightarrow$
$(y-x)(y+x) = (11)(101) \Rightarrow y + x = 101$ e $y - x = 11 \Rightarrow y = 56$ e $x = 45$
Como $n = x^2 = 45^2 \Rightarrow n = 2025$. Conferindo: $n = 2025 \quad m = 3136 = (56)^2$

5) Determine todos os inteiros n tais que $n^2 - 11n + 63$ é um quadrado perfeito.
Solução:
Seja $n^2 - 11n + 63 = k^2 \Rightarrow 4n^2 - 44n + 252 = 4k^2 \Rightarrow (2n-11)^2 + 131 = (2k)^2 \Rightarrow (2k)^2 - (2n-11)^2 = 131 \Rightarrow (2k + 2n - 11)(2k - 2n + 11) = 131$.
Como 131 é primo temo somente duas possibilidades:
i) $2k + 2n - 11 = 131$ e $2k - 2n + 11 = 1 \Rightarrow n = 38$
ii) $2k + 2n - 11 = 1$ e $2k - 2n + 11 = 131 \Rightarrow n = -27$

6) (Olimpíada de Portugal-2001) O número de NOMEKOP é o menor número tal que seu dobro é um quadrado perfeito, o seu triplo é um cubo perfeito e seu quíntuplo é uma potência quinta perfeita. Determine o número de NOMEKOP.
Solução:
Seja n o número de NOMEKOP. A decomposição em fatores primos tem que ser da forma $n = 2^i 3^j 5^k$, com i, j, k números inteiros não negativos. Então n é o menor número tal que:
(a) $2n = 2^{i+1}3^j5^k$ é um quadrado perfeito, isto é, tal que os expoentes $i + 1$, j e k são todos pares;
(b) $3n = 2^i3^{j+1}5^k$ é um cubo perfeito, isto é, tal que os expoentes i, $j + 1$ e k são todos múltiplos de 3;
(c) $5n = 2^i3^j5^{k+1}$ é uma potência quinta perfeita, isto é, tal que os expoentes i, j e $k + 1$ são todos múltiplos de 5.
Assim, para que n verifique as condições anteriores:
(i) i tem que o menor múltiplo de $2.5 = 15$ tal que $i + 1$ seja par, ou seja, $i = 15$;
(ii) j tem que o menor múltiplo de $2.5 = 10$ tal que $j + 1$ seja múltiplo de 3, ou seja, $j = 20$;
(iii) k tem que o menor múltiplo de $2.3 = 6$ tal que $k + 1$ seja múltiplo de 5, ou seja, $k = 24$.
Portanto $n = 2^{15}3^{20}5^{24}$ é o número de NOMEKOP.

7) (Olimpíada da Irlanda-97) Determine (com prova) todos os pares de inteiros (x, y) satisfazendo a equação: $1 + 1996x + 1998y = xy$
Solução:
Podemos escrever a equação da seguinte forma:
$xy - 1996x - 1998y = 1 \Rightarrow (x-1996)(y-1998) - 1996.1998 = 1 \Rightarrow (x-1996)(x-1998) = 1 + 1996.1998 \Rightarrow$
$(x-1996)(x-1998) = 1 + (1997-1)(1997+1) = 1 + 1997^2 - 1 \Rightarrow (x-1996)(x-1998) = 1997^2$
Assim temos as possibilidades:
i) $x - 1996 = 1997$ e $y - 1998 = 1997 \Rightarrow x = 3993$ e $y = 3995$
ii) $x - 1996 = -1997$ e $y - 1998 = -1997 \Rightarrow x = -1$ e $y = 1$
iii) $x - 1996 = 1997^2$ e $y - 1998 = 1 \Rightarrow x = 1997^2 - 1996$ e $y = 1999$
iv) $x - 1996 = -1997^2$ e $y - 1998 = -1 \Rightarrow x = 1996 - 1997^2$ e $y = 1997$
v) $x - 1996 = 1$ e $y - 1998 = 1997^2 \Rightarrow x = 1997$ e $y = 1997^2 + 1998$
vi) $x - 1996 = -1$ e $y - 1998 = -1997^2 \Rightarrow x = 1996$ e $y = 1998 - 1997^2$

6.4. DOIS TEOREMAS CLÁSSICOS SOBRE NÚMEROS PRIMOS

Teorema: Sejam $a \geq 2$ e $k \geq 2$ números inteiros. Se $a^k - 1$ é primo, então k também é primo.

Demonstração:
Suponhamos que o inteiro $a^k - 1$ $(k \geq 2)$ seja primo.
Se o inteiro k fosse composto, então teríamos $k = r.s$, com $r > 1$ e $s > 1$, o que implica que:
$a^k - 1 = a^{rs} - 1 = (a^r)^s - 1$ ou seja: $a^k - 1 = (a^r - 1)(a^{r(s-1)} + a^{r(s-2)} + ... + a^r + 1)$
Como $r > 1$, os dois fatores do segundo membro são ambos maiores que 1, isto é, $a^k - 1$ é um inteiro composto, o que contraria a hipótese. Logo, k é primo.

Teorema: Sejam $a > 1$ e $n > 0$ dois números inteiros. Se $a^n + 1$ é primo, então n é uma potência de 2.

Demonstração:
Todo número inteiro pode decomposto na forma $n = 2^b.(2c + 1)$, onde $(2c + 1)$ é conhecida como a parte ímpar do número n. Evidentemente, para provar que um número inteiro n é igual a uma potência de 2, temos que provar que a parte ímpar de n (que vale $2c + 1$) é igual a 1.
Assim temos que: $a^n + 1 = a^{2^b(2c+1)} + 1 = (a^{2^b})^{2c+1} - (-1)^{2c+1} = X^{2c+1} - Y^{2c+1}$, que é divisível por $X - Y$, de forma que $a^n + 1$ não é primo se $2c + 1 > 1$.
Deste modo, concluímos que $2c + 1 = 1$, e que se $a^n + 1$ é primo então n é uma potência de 2.

Exemplos:

1) Dado um número primo cujos dígitos são todos iguais a 1 (em expansão decimal), prove que o número de dígitos deve ser um número primo.
Solução:
Seja n o número primo dado, possuindo os dígitos iguais a 1
Suponhamos, por absurdo, que o número de dígitos s, seja um número composto $\Rightarrow$ $s = ab$
$n = 111...111$ $\Rightarrow$ $9n = 999...999 = 10^s - 1$ $\Rightarrow$ $n = (10^{ab} - 1)/9$
Como $10^a - 1 \mid 10^{ab} - 1$ $\Rightarrow$ $(10^a - 1)/9 \mid (10^{ab} - 1)/9$ $\Rightarrow$ $(10^a - 1)/9 \mid n$ $\Rightarrow$ n não é primo. Contrariando o enunciado do exercício. Portanto s deve ser primo.

2) Seja n um número natural consistindo de 1991 uns: $n = \underbrace{1111.....111}_{1991\ 1's}$. Prove que n não é um número primo.
Solução:
Como $1991 = 11.181$, então: $n = 111...11$ $\Rightarrow$ $9n = 999...99 = 10^{1991} - 1 = 10^{11.181} - 1$
Assim, $9n = 10^{11.181} - 1 = (10^{11} - 1)(10^{1980} - 10^{1969} + 10^{1958} - 10^{1947} + 10^{1936} - ... + 10^{22} - 10^{11} + 1)$
Desta forma, $9n$ é divisível por $10^{11} - 1$, ou seja, $9n$ é divisível por 9999999999, implicando que n é divisível por 1111111111.

3) (IMO-92 banco) Prove que $N = \dfrac{5^{125} - 1}{5^{25} - 1}$ é um número composto.
Solução:

Inicialmente notemos que fazendo $x = 5^{25}$ temos $N = \dfrac{x^5 - 1}{x - 1} = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$.
Então: $N = x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = (x^2 + 3x + 1)^2 - 5x(x + 1)^2 =$
$= [(x^2 + 3x + 1) - \sqrt{5x}(x + 1)][(x^2 + 3x + 1) + \sqrt{5x}(x + 1)]$.
Como $x = 5^{25}$ temos: $N = [(5^{50} + 3.5^{25} + 1) - 5^{13}(5^{25} + 1)][(5^{50} + 3.5^{25} + 1) + 5^{13}(5^{25} + 1)]$, ou seja, N é a multiplicação de dois inteiros maiores que 1, implicando que N é composto.

6.5. A INFINITUDE DOS NÚMEROS PRIMOS

Teorema (devido à Euclides): Há um número infinito de primos.

Demonstração:
Suponhamos, por hipótese, que exista um primo p_n maior que todos os outros primos:
$p_1 = 2, p_2 = 3, p_3 = 5, p_4 = 7, ...$, e analisemos o número inteiro positivo P tal que: $P = p_1p_2p_3...p_n + 1$
Como $P > 1$, do "Teorema Fundamental da Aritmética" pode-se concluir que P possui pelo menos um divisor primo p. Contudo, $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ são os únicos primos existentes, implicando que p deve, necessariamente, ser igual a um desses n primos. Desta forma: $p \mid P$ e $p \mid p_1p_2p_3...p_n$ implicando que: $p \mid P - p_1p_2p_3...p_n$ ou $p \mid 1$
O que é um absurdo, pois $p > 1$ e o único divisor positivo de 1 é o próprio 1. Portanto, qualquer que seja o primo P_n, sempre existe um primo maior que P_n, isto é, o conjunto $\{2, 3, 5, 7, 11, 13, ...\}$ dos primos é infinito.

Exemplo:

1) (Olimpíada da Espanha-92) Seja a seqüência 3, 7, 11, 15, ... (progressão aritmética). Provar que em tal seqüência existem infinitos números primos.
Resolução:
PA: $\{3, 7, 11, 15, ...\} \Rightarrow a_n = 3 + 4(n - 1) \Rightarrow a_n = 4n - 1$
Suponhamos, por absurdo, que exista um número finito de primos da forma $p_i = 4n - 1$.
Seja o número $N = 4p_1p_2p_3...p_n - 1$, onde p_i são todos os primos da forma $4n - 1$.
Notemos que N também é da forma $4n - 1$ e é ímpar.
Fatorando N, temos que os primos que dividem N devem ser da forma $4n - 1$ e $4n + 1$.
Como $(4n_1 - 1)(4n_2 - 1) = 4(4n_1n_2 - n_1 - n_2) + 1 = 4k + 1$
$(4n_1 - 1)(4n_2 + 1) = 4(4n_1n_2 + n_1 - n_2) - 1 = 4k - 1$
$(4n_1 + 1)(4n_2 + 1) = 4(4n_1n_2 + n_1 + n_2) + 1 = 4k + 1$
Como $mdc(N, p_i) = 1$, então cada p_i não divide N
Entretanto, na fatoração de N temos que ter fatores primos da forma $4n - 1$, pois somente multiplicando um termo da forma $4n_1 - 1$ com outro da forma $4n_2 + 1$ conseguimos um número da forma $4k - 1$, que é a forma de N. Assim, este fator primo de N da forma $4n - 1$ deve ser distinto dos outros primos p_i da forma $4n - 1$, que é um absurdo.

6.6. DIVISORES PRIMOS DE UM INTEIRO COMPOSTO

Teorema: Se um inteiro positivo $a > 1$ é composto, então a possui um divisor primo $p \leq \sqrt{a}$.

Demonstração:
Se o inteiro positivo $a > 1$ é composto, então existem inteiros b e c, onde $1 < b < a$ e $1 < c < a$, tais que $a = bc$. Supondo que $b \leq c$, temos: $b^2 \leq bc = a \Rightarrow b \leq \sqrt{a}$
Sendo $b > 1$, o "Teorema Fundamental da Aritmética" afirma que b tem pelo menos um divisor primo p, de modo que $p \leq b \leq \sqrt{a}$. Como $p \mid b$ e $b \mid a$, implica que $p \mid a$, isto é, o inteiro primo $p \leq \sqrt{a}$ é um divisor de a.

Exemplos:

1) Prove que 1997 é um número primo.
Solução:
Observe que $\sqrt{1997} \cong 44{,}687$. Como 1997 não é divisível por nenhum primo que seja menor ou igual a 44 (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43) então podemos afirmar que 1997 é um primo.

2) (OBM-98) São dados 15 números naturais maiores que 1 e menores que 1998 tais que dois quaisquer são primos entre si. Mostre que pelo menos um desses 15 números é primo.
Solução:

Dado $1 < n < 1998$, se ele não for primo, ele tem que ter um fator primo menor que $\sqrt{1998}$, ou seja, um fator primo, menor que 45. Como só existem 14 primos menores que 45 (2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43), e são dados 15 números, então um desses não terá fator primo menor que 45, implicando que seja primo.

6.7. CRIVO DE ERATÓSTENES

Crivo de Eratótenes é uma representação de números primos, em forma de tabela, de modo que não excedam um dado inteiro n. Para construí-la deve-se escrever, na ordem natural, todos os inteiros desde 2 até n e, em seguida, eliminam-se todos os inteiros compostos que são múltiplos dos primos p tais que $p \leq \sqrt{n}$, isto é, 2p, 3p, 4p, ...

Exemplo: Construir a tabela de todos os primos menores que 100

	2	3	~~4~~	5	~~6~~	7	~~8~~	~~9~~	~~10~~
11	~~12~~	13	~~14~~	~~15~~	~~16~~	17	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	23	~~24~~	~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
31	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~	37	~~38~~	~~39~~	~~40~~
41	~~42~~	43	~~44~~	~~45~~	~~46~~	47	~~48~~	~~49~~	~~50~~
~~51~~	~~52~~	53	~~54~~	~~55~~	~~56~~	~~57~~	~~58~~	59	~~60~~
61	~~62~~	~~63~~	~~64~~	~~65~~	~~66~~	67	~~68~~	~~69~~	~~70~~
71	~~72~~	73	~~74~~	~~75~~	~~76~~	~~77~~	~~78~~	79	~~80~~
~~81~~	~~82~~	83	~~84~~	~~85~~	~~86~~	~~87~~	~~88~~	89	~~90~~
~~91~~	~~92~~	~~93~~	~~94~~	~~95~~	~~96~~	97	~~98~~	~~99~~	~~100~~

Os inteiros positivos que não foram eliminados são:
2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47, 53, 59, 61, 67, 71, 73, 79, 83, 89, 97,
que são todos os primos menores que 100.

6.8. PRIMOS GÊMEOS

Sendo a e b dois inteiros positivos, denomina-se a e b de primos gêmeos se os dois são primos, positivos, ímpares e consecutivos. Por exemplo, são pares de primos gêmeos: 3 e 5, 5 e 7, 11 e 13, 17 e 19, 29 e 31. Até hoje não é sabido se existe um número infinito de pares de primos gêmeos.
Um fato interessante é a existência de apenas um terno de inteiros positivos ímpares e consecutivos que são todos primos: 3, 5 e 7.

Exemplos:

1) (Olimpíada do Canadá-73) Prove que se p e p + 2 são ambos números inteiros primos maiores que 3, então 6 divide p + 1.
Solução:
Como p e p + 2 são ímpares e primos, então nenhum deles é divisível por 2 ou 3. Desde que p e p + 2 são primos ímpares, temos que p + 1 é par.
Como p, p + 1, p + 2 são três números consecutivos, então um deles é divisível por 3.
Como p e p + 2 não são divisíveis por 3, então p + 1 é divisível por 3, implicando que p + 1 é divisível por 6.

2) Mostrar que, se n > 3, os inteiros n, n + 2 e n + 4 não podem ser todos primos.
Solução:
Sejam os inteiros consecutivos: n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5
Suponhamos que n, n + 2, n + 4 sejam todos primos.
Como n e n + 2 são primos, e entre 3 números inteiros consecutivos sempre um deles é divisível por 3, então n + 1 é divisível por 3. Se n + 1 é divisível por 3 então n + 3 é divisível por 3, que é um absurdo, pois n + 4 é primo.

6.9. SEQÜÊNCIAS DE INTEIROS CONSECUTIVOS COMPOSTOS

Teorema: Para qualquer valor do inteiro positivo n, existem seqüências de n inteiros positivos consecutivos e compostos.

Demonstração:
Analisando a seguinte seqüência: $(n + 1)! + 2$, $(n + 1)! + 3$, $(n + 1)! + 4$, ..., $(n + 1)! + (n + 1)$ vemos que os todos seus n termos são inteiros positivos consecutivos, e também cada um deles é um número composto, pois $(n + 1)! + j$ sempre é divisível por j se $2 \le j \le n + 1$. Fazendo $n = 4$ temos a seguinte seqüência: $5! + 2$, $5! + 3$, $5! + 4$, $5! + 5$, cujos 4 termos são inteiros positivos consecutivos, sendo cada elemento um número composto, pois:
$5! + 2 = 122 = 2.61$ $\quad 5! + 3 = 123 = 3.41$ $\quad 5! + 4 = 124 = 4.31$ $\quad 5! + 5 = 125 = 5^3$

Exemplos:

1) (Olimpíada da Bélgica-90) Defini-se $n! = 1.2.3...n$. Então o número de primos p tais que: $77! + 1 < p < 77! + 77$ é dado por:
a) 0 b) 1 c) 7 d) 11 e) 17
Solução:
O conjunto dos inteiros p tais que $77! + 1 < p < 77! + 77$ equivale ao conjunto $77! + 2 \le p \le 77! + 76$, ou seja, $p_n = 77! + n$, onde $2 \le n \le 76$. Notemos que p_n sempre é divisível por n, pois como $2 \le n \le 76$, na fatoração de 77! certamente existe o fator n. Assim, nenhum p_n é primo.

2) (IMO-89) Prove que, para cada inteiro positivo n, existem n inteiros positivos consecutivos nenhum dos quais é uma potência inteira de um número primo.
Solução:
Sabemos que existe uma seqüência de n inteiros positivos compostos:
$(n + 1)! + 2, (n + 1)! + 3, (n + 1)! + 4, \ldots, (n + 1)! + r, \ldots, (n + 1)! + n - 1$
Cada um destes números é divisível por r.
Se formarmos a seqüência:
$(n + 1)!^2 + 2, (n + 1)!^2 + 3, (n + 1)!^2 + 4, \ldots, (n + 1)!^2 + r, \ldots, (n + 1)!^2 + n + 1$
Cada um destes números também é divisível por r

Notemos que: $\dfrac{(n+1)!^2+r}{r} = (n+1)!\left(\dfrac{(n+1)!}{r}\right)+1$

Como $(n+1)!\left(\dfrac{(n+1)!}{r}\right)$ é inteiro, e $(n + 1)!$ é divisível por r, então r não divide $(n+1)!\left(\dfrac{(n+1)!}{r}\right)+1$, pois se r dividisse este valor, então r deveria dividir 1, e somente 1 e – 1 dividem 1.
Como para cada r podemos escolher um primo p que divide r, então $(n + 1)!^2 + r$ é divisível por p, mas não por uma potência de p.

6.10. POSTULADO DE BERTRAND:

"Para todo inteiro positivo n, existe um primo p tal que $n \le p \le 2n$."

Exemplo:

1) Prove que o produto de n inteiros positivos consecutivos ($n \ge 2$) não é uma potência de algum inteiro (expoente maior ou igual a 2).
Solução:
Seja $P = k(k + 1)(k + 2)...(M - 1)M$.
Então, o maior primo $p \le M$ tem expoente 1 na decomposição do produto em fatores primos de P (implicando que P não é uma potência de um inteiro) pois, caso contrário, teríamos $2p \le M$ e, portanto, pelo postulado de Bertrand, existiria um primo q tal que $p < q < 2p \le M$, contrariamente ao fato de p ser o maior primo que é menor ou igual a M.

Exercícios

1) Achar as soluções inteiras e positivas da equação $x^2 - y^2 = 499$.

2) Mostrar que todo inteiro da forma $n^4 + 4$, com $n > 1$, é composto.

3) Determine todos os números primos p para os quais a equação $x^3 + y^3 = p$ possui solução nos inteiros positivos.

4) Mostrar que o único primo da forma $n^3 - 1$ é 7.

5) Mostrar que todo inteiro da forma $8^n + 1$, com $n \geq 1$, é composto.

6) Mostrar que, se $n^2 + 2$ é primo, então $3 \mid n$.

7) Prove que se $2n + 1$ e $3n + 1$ são quadrados perfeitos, então $5n + 3$ não é primo.

8) Prove que se $n - 10$, $n + 10$ e $n + 60$ são primos, então $n + 90$ também é.

9) Uma velhinha pergunta a um matemático quais são os números das linhas de ônibus que passam pelo Instituto de Matemática. Este responde que se lembra apenas que os números são de três algarismos distintos, cada um dos algarismos representando um número primo. Além disso, os números das linhas não são divisíveis por 2, por 3 ou por 5. A velha senhora conclui prontamente que o número de linhas de ônibus que passam pelo Instituto é :
(a) 4 (b) 3 (c) 2 (d) 1 (e) 0

10) Prove que o quadrado de todo número primo maior que 3 deixa resto 1 quando dividido por 12.

11) Determine todos os primos p tais que $17p + 1$ é um quadrado perfeito.

12) Prove que todo inteiro positivo é igual a diferença entre dois inteiros positivos compostos, porém primos entre si.

13) Prove que se 3 números primos, todos maiores que 3, formam uma progressão aritmética, então a razão da PA é divisível por 6.

14) (UECE-2001) Se a , b e c são dígitos escolhidos, aleatoriamente, no conjunto {2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9}, então o número de 6 dígitos abcabc:
a) possui pelo menos 3 fatores primos
b) possui somente 2 fatores primos
c) é múltiplo de 3, obrigatoriamente
d) não é divisível por 11

15) (Unifor-99) Três números primos, a,b,c são tais que $a < b < c$ e $a.b.c = 1001$. É verdade que
a) $a + b = 18$ b) $a + c = 24$ c) $b + c = 28$
d) $c - b = b - a$ e) $a . b = 55$

16) (Unifor-99) O produto de dois números naturais ímpares e consecutivos é 483. Nessas condições, é verdade que o
a) maior deles é um quadrado perfeito.
b) menor deles é menor que 18.
c) maior deles é um número primo.
d) menor deles é múltiplo de 6.
e) maior deles é múltiplo de 7.

17) (Unifor-2000) A soma de todos os números primos que são divisores de 30! é:
a) 129 b) 130 c) 132 d) 139 e) 140

18) (UFU-98) Se p é um número natural primo e a soma de todos os divisores positivos de p^2 é igual a 31, então p é igual a:
a) 5 b) 7 c) 3 d) 2 e) 11

19) (Fuvest-96) Qual, dos cinco números relacionados abaixo, não é um divisor de 10^{15}?
a) 25 b) 50 c) 64 d) 75 e) 250

20) (Fuvest-98) A diferença entre os quadrados de dois números naturais é 21. Um dos possíveis valores da soma dos quadrados desses dois números é:
a) 29 b) 97 c) 132 d) 184 e) 252

21) (UFC-2000) Se $\frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{4}} = \frac{p}{q}$, onde p e q são números inteiros positivos relativamente primos, determine $p + q$.

Questões de Olimpíadas – Nível Intermediário

22) (São José dos Campos-96) Ache, se possível, três números inteiros em progressão aritmética cujo produto é um número primo.

23) (OBM-81 banco) Se $n > 4$ é um número não primo, prove que $(n-1)!$ é múltiplo de n.

24) (OBM-88) Determine todos os primos que são soma e diferença de dois primos.

25) (OBM-2000) O número 10 pode ser escrito de duas formas como soma de dois números primos: $10 = 5 + 5$ e $10 = 7 + 3$. De quantas maneiras podemos expressar o número 25 como uma soma de dois números primos?
A) 4 B) 1 C) 2 D) 3 E) nenhuma

26) (OBM-2001) Quantos números de dois algarismos não são primos nem múltiplos de 2, 3 ou 5?
A) 1 B) 3 C) 2 D) 4 E) mais de 4

27) (OBM-2001) No conjunto {101, 1 001, 10 001, ..., 1 000 000 000 001} cada elemento é um número formado pelo algarismo 1 nas extremidades e por algarismos 0 entre eles. Alguns desses elementos são números primos e outros são compostos. Sobre a quantidade de números compostos podemos afirmar que:
A) é igual 11
B) é igual a 4
C) é menor do que 3
D) é maior do que 4 e menor do que 11
E) é 3

28) (Argentina-95) É possível escrever os 11 números desde 1985 até 1995 em alguma ordem de modo que o número de 44 dígitos obtido seja um número primo?

29) (Manhattan-98) Determine todos os números primos p para os quais $p + 10$ e $p + 14$ são também primos.

30) (University of South Carolina-93) Suponha que x e y são inteiros tais que $y > x > 1$ e $y^2 - x^2 = 187$. Então um valor possível de $x.y$ é:
a) 30 b) 36 c) 40 d) 42 e) 54

31) (British Columbia Colleges-2000) Determine o menor inteiro positivo k tal que $(k + 1) + (k + 2) + ... + (k + 19)$ seja um quadrado perfeito.

32) (Alberta Competition-98) Seja $S = 1 + 2 + 3 + ... + 10^{10}$. Quantos fatores de 2 aparecem da fatoração de S?

33) (Canadá-92) Prove que o produto dos primeiros n números naturais é divisível pela soma dos primeiros n números naturais se e somente se $n + 1$ não é um número primo ímpar.

34) (ProMath Competition) Considere a equação quadrática $x^2 + ax + b + 1 = 0$. Mostre que se as raízes desta equação são inteiros não nulos, então $a^2 + b^2$ é um número composto.

35) (Bélgica-2001) Se x é um número primo e $x^2 + y^2 = z^2$, onde $x, y, z \in N_0$, então $y =$
a) $(x^5 - 1)/2$ b) $(x^2 + 1)/2$ c) x
d) $x^2 - 1$ e) $x^2 + 1$

36) (University of South Carolina-90) Determine o número de pares ordenados (x, y), com x e y ambos inteiros, que satisfazem a equação $x^2 - 4y^2 = -3$.
a) 0 b) 2 c) 3 d) 4 e) 6

37) (Escócia-2001) Os inteiros positivos p e q são tais que p, $p + q$ e $p + 2q$ são primos. Prove que pq é múltiplo de 6.

38) (Hungria-1923) Prove que, se os termos de uma progressão aritmética infinita de números naturais não são todos iguais, então não podem ser todos primos.

39) (Hungria-1931) Seja p um primo maior que 2. Prove que $\frac{2}{p}$ pode expresso em somente uma forma como $\frac{1}{x} + \frac{1}{y}$ onde x e y são inteiros positivos com $x > y$.

40) (Noruega-97) Sejam x e y inteiros positivos. O menor valor possível de $|11x^5 - 7y^3|$ é:
a) 1 b) 2 c) 3 d) 4 e) nenhum destes

41) (Torneio das Cidades-2004) Encontre todos os inteiros positivos n para os quais há n sucessivos inteiros positivos cuja soma seja um número primo.

Questões de Olimpíadas – Nível Avançado

42) (Mathematical Excalibur) Vinte oito inteiros são escolhidos no intervalo [104, 208]. Mostre

que existem dois deles possuindo um mesmo divisor primo.

43) (Brasil-2002) Mostre que existe um conjunto A formado por inteiros positivos tendo as seguintes propriedades:
a) A tem 2002 elementos.
b) A soma de qualquer quantidade de elementos distintos de A (pelo menos um) nunca é uma potência perfeita.
Obs: Uma potência perfeita é um número da forma a^b, onde a e b são inteiros positivos e $b \geq 2$.

44) (Brasil-2003) Determine o menor número primo positivo que divide $x^2 + 5x + 23$ para algum inteiro x.

45) (Brasil Preparação Cone Sul-99) Prove que, ao expressarmos a soma $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+...+\frac{1}{109}+\frac{1}{110}$ como uma fração irredutível, o numerador é um múltiplo de 11.

46) (Irlanda-2001) Mostre que se um número primo ímpar p pode ser colocado sob a forma $x^5 - y^5$ para alguns inteiros x e y então $\sqrt{\frac{4p+1}{5}} = \frac{v^2+1}{2}$ para algum inteiro ímpar v.

47) (Brasil Seleção Cone Sul-2002) a) Prove que, para n > 1 inteiro, $1^3 + 2^3 + ... + n^3 = (1 + 2 + ... + n)^2$.
b) Seja p > 3 primo e k > 1 inteiro. Mostre que não é possível escrevermos p^k como soma dos cubos de dois ou mais inteiros positivos e consecutivos.

48) (Argentina-99) Sejam a, b, c, d, e, números naturais consecutivos tais que $a + b + c + d + e$ é um cubo perfeito e $b + c + d$ é um quadrado perfeito. Achar o mínimo valor possível de c.

49) (Argentina-99) Seja $d = a^{47} + b^{47} + c^{47}$, com a, b, c números inteiros tais que a + b + c = 0.
a) Decidir se é possível que d seja igual a 2.
b) Decidir se é possível que d seja um número primo.

50) (México-87) Demonstre que se duas frações são irredutíveis (simplificadas) e sua soma é um inteiro, então ambas frações tem o mesmo denominador.

51) (Manhattan-97) Suponha que p é um número primo. Mostre que o número: $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{p}$ não é um inteiro.

52) (Descartes-99) Se p_1 e p_2 são números primos distintos e $A = (p_1p_2 + 1)^4 - 1$, mostre que A possui ao menos 4 divisores primos distintos.

53) (Wisconsin-98) Determine todos os números primos p para os quais é possível escrever $\frac{1}{p} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2}$ com inteiros positivos a e b.

54) (AIME-99) Determine o menor valor de a_5, tal que a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 é uma progressão aritmética crescente com todos os termos primos.

55) (Putnam-88) Se n > 3 não é primo, mostre que é possível encontrar inteiros positivos a, b, c tais que n = ab + bc + ca + 1.

56) (Iuguslávia-80) Determine todos os inteiros x para os quais $x^2 + 3x + 24$ é um quadrado perfeito.

57) (Espanha-87) Seja C o conjunto dos números naturais C = {1, 5, 9, 13, 17, 21, ...}. Dizemos que um número é "primo relativo a C" se ele não pode ser escrito como um produto de números menores de C.
a) Mostre que 4389 é um membro de C que não pode ser representado em ao menos duas maneiras distintas como um produto de dois números primos relativos a C.
b) Determine outro membro de C com a mesma propriedade.

58) (Irlanda-2002) Suponha que n seja o produto de quatro números primos distintos a, b, c, d tais que :
(i) $a + c = d$
(ii) $a(a + b + c + d) = c\,(d - b)$
(iii) $1 + bc = bd$
Determine n.

59) (Suécia-77) Seja p um primo. Determine o maior inteiro d tal que p^d divide $p^4!$

60) (Wisconsin-94) Se m é um inteiro positivo, pode $m(m + 1)$ ser a sétima potência de um inteiro?

61) (Polônia-2001) Prove que para todos os inteiros $n \geq 2$ e para todos os números primos p o número $n^{p^p} + p^p$ é composto.

62) (Itália-2001) Dada a equação $x^{2001} = y^x$, determine todos os pares de soluções (x, y) tais que x seja um número primo e y um inteiro positivo. Determine todos os pares de soluções (x, y) tais que x e y são inteiros positivos.

63) (Hong Kong-2000) Determine todos os primos da forma $n^n + 1$, que são menores que 10^{19} (n é um inteiro positivo).

64) (Índia-96) Dado um inteiro positivo n, mostre que existem inteiros positivos x e y distintos tais que $x + j$ divide $y + j$ para $j = 1, 2, 3, ..., n$.

65) (Índia-98) Sejam n um inteiro positivo e $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ n números primos todos maiores que 5 e tais que 6 divide $p_1^2 + p_2^2 + p_3^2 + ... + p_n^2$. Prove que 6 divide n.

66) (Auckland-2001) Quantas soluções inteiras positivas possui a equação $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2001}$.

67) (Austrália-82) A seqüência $p_1, p_2, p_3, ...$ é definida por $p_1 = 2$ e $p_n =$ o maior divisor primo de $p_1p_2...p_{n-1} + 1$, $n \geq 2$. Prove que 5 não é um membro desta seqüência.

68) (Rússia-64) Determine todos os números naturais n tal que $n!$ não é divisível por n^2.

69) (Báltica-94) Seja $p > 2$ um número primo e $1 + 1/2^3 + 1/3^3 + ... + 1/(p-1)^3 = m/n$, onde m e n são primos entre si. Mostre que m é múltiplo de p.

70) (Báltica-96) Sejam a, b, c, d inteiros positivos tais que $ab = cd$. Prove que $a + b + c + d$ não é primo.

71) (Torneio das Cidades-96) Existe um inteiro n tal que os três números:
a) $n - 96$, n, $n + 96$;
b) $n - 1996$, n, $n + 1996$ são primos (positivos)?

72) (Torneio das Cidades-2004) Uma progressão aritmética finita de números inteiros tem como soma uma potência de dois. Prove que o número de termos na progressão também é uma potência de dois.

73) (Cone Sul-94) Pedro e Cecília participam em um jogo com as seguintes regras:
Pedro escolhe um número inteiro positivo a e Cecília ganha o jogo se encontra um número inteiro positivo b, primo com a, tal que na decomposição em fatores primos de $a^3 - b^3$ aparecem pelo menos três fatores primos distintos. Demonstrar que Cecília sempre pode ganhar.

74) (Cone Sul-99) Achar o menor inteiro positivo n tal que as 73 frações
$\frac{19}{n+21}, \frac{20}{n+22}, \frac{21}{n+23}, ..., \frac{91}{n+93}$ sejam todas irredutíveis.

75) (Iberoamericana-99) Seja B um inteiro maior que 10 tal que cada um dos seus dígitos pertence ao conjunto $\{1, 3, 7, 9\}$. Demonstre que B tem fator primo maior ou igual a 11.

76) (IMO-69) Prove que existem infinitos inteiros positivos m, tal que $n^4 + m$ não é primo para todo inteiro positivo n.

77) (IMO-70) Determine todos os inteiros n tais que o conjunto $\{n, n + 1, n + 2, n + 3, n + 4, n + 5\}$ pode ser particionado em dois subconjuntos tal que o produto dos números de cada subconjunto é igual.

78) (IMO-79) Sejam m e n inteiros positivos tais que $\frac{m}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + ... - \frac{1}{1318} + \frac{1}{1319}$.
Prove que m é divisível por 1979.

80) (Seletiva Brasileira Cone Sul-2004) Ache o menor número de elementos do conjunto $\{1, 2, 3, ..., 24\}$ que devem ser apagados para garantir que o produto dos elementos restantes seja um cubo perfeito.

81) (Torneio das Cidades-98) Existem 10 inteiros positivos tais que nenhum é dividido por outro, mas o quadrado de cada número é dividido por cada um dos outros números?

MÁXIMO DIVISOR COMUM

7.1. DEFINIÇÃO: Sejam a e b dois inteiros não simultaneamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$). O inteiro positivo d é o máximo divisor comum de a e b se:

(1) $d \mid a$ e $d \mid b$ (2) $c \mid a$ e $c \mid b \Rightarrow c \mid d$.

Observa-se que a condição (1) garante que d é um divisor comum de a e b e a condição (2) afirma que d é o maior dentre todos os divisores comuns de a e b. Por mdc (a, b) indica-se o máximo divisor comum entre a e b. Uma outra notação bastante comum é (a, b).

Observações:

(i) mdc (a, b) = mdc (b, a)

(ii) mdc (0, 0) não existe

(iii) mdc (a, 1) = 1, para qualquer inteiro a

(iv) se $a \neq 0$, então mdc (a, 0) = |a|

(v) se $a \mid b$, então mdc (a, b) = |a|

7.2. EXISTÊNCIA E UNICIDADE DO MDC

Sendo a e b dois inteiros não simultaneamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$), então existe e é único o mdc (a, b). Afirma-se também que existem os inteiros x e y tais que mdc (a, b) = ax + by isto é, o mdc (a, b) é uma combinação linear entre os valores de a e b.

7.3. INTEIROS PRIMOS ENTRE SI

Sendo a e b dois inteiros que não são simultaneamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$), pode-se afirmar que a e b são primos entre si se e somente se o **mdc (a, b) = 1**. Conclui-se, portanto, que dois inteiros a e b primos entre si somente admitem como divisores os inteiros 1 e – 1.

7.3.1. Teorema: Sejam a e b dois inteiros não simultaneamente nulos ($a \neq 0$ ou $b \neq 0$). Os inteiros a e b são primos entre si se e somente se existem inteiros x e y tais que **ax + by = 1**.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Se a e b são primos entre si, então o mdc (a, b) = 1 e por conseguinte existem inteiros x e y tais que ax + by = 1.

($\Leftarrow$) Se existem inteiros x e y tais que ax + by = 1 e se o mdc (a, b) = d, então $d \mid a$ e $d \mid b$.

Logo, $d \mid (ax + by)$ e $d \mid 1$, o que implica que d = 1 ou mdc (a, b) = 1, isto é, a e b são primos entre si.

7.4. PROPRIEDADES

(1) Se o mdc (a, b) = d, então o mdc (a/d, b/d) = 1.

Demonstração:

Se mdc (a, b) = d então $ax + by = d \Rightarrow (a/d)x + (b/d)y = 1 \Rightarrow$ mdc (a/d, b/d) = 1.

(2) Se $a \mid b$ e se o mdc (b, c) = 1, então o mdc (a, c) = 1.

Demonstração:

Se mdc (b, c) = 1 então bx + cy = 1. Se $a \mid b$ então b = ak.

Logo $(ak)x + cy = 1 \Rightarrow a(kx) + cy = 1 \Rightarrow$ mdc (a, c) = 1.

(3) Se $a \mid c$, se $b \mid c$ e se o mdc (a, b) = 1, então ab | c.

Demonstração:

Se $a \mid c$ e $b \mid c$ então $c = k_1 a$ e $c = k_2 b$.

Se mdc (a, b) = 1 então $ax + by = 1 \Rightarrow \frac{c}{k_1}x + \frac{c}{k_2}y = 1 \Rightarrow c(k_2x + k_1y) = k_1k_2 \Rightarrow$

$abc(k_2x + k_1y) = abk_1k_2 \Rightarrow abc(k_2x + k_1y) = c^2 \Rightarrow ab(k_2x + k_1y) = c \Rightarrow ab \mid c$.

(4) Se mdc (a, b) = 1 = mdc (a, c), então o mdc (a, bc) = 1.
Demonstração:
Se mdc (a, b) = 1 então $ax + by = 1$ e se mdc (a, c) = 1 então $az + cw = 1$ $\Rightarrow$
$1 = (ax + by)(az + cw) = a(axz + byz + cxw) + bc(yw) = a(m) + bc(n)$ $\Rightarrow$ mdc (a, bc) = 1.

(5) Se o mdc (a, bc) = 1, então mdc (a, b) = 1 = mdc (a, c).
Demonstração:
Se mdc (a, bc) = 1 então $ax + bcy = 1$ $\Rightarrow$ $1 = ax + b(cy) = ax + c(by)$ $\Rightarrow$ mdc (a, b) = 1 = mdc (a, c).

(6) (de Euclides) Se a | bc e se o mdc (a, b) = 1, então a | c.
Demonstração:
Se a | bc então $bc = ka$. Se mdc (a, b) = 1 então $ax + by = 1$ $\Rightarrow$ $acx + bcy = c$ $\Rightarrow$ $acx + kay = c$ $\Rightarrow$
$a(cx + ky) = c$ $\Rightarrow$ a | c.

(7) mdc (a, b, c) = mdc (mdc (a, b), c).
Demonstração:
Se d = mdc (a, b, c) então $ax + by + cz = d$.
Se mdc (a, b) = d' então existem inteiros m e n tais que $am + bn = d'$ e d' é o menor valor que podemos obter em uma combinação linear de a e b. Qualquer outro valor que podemos obter como combinação linear de a e b deve ser múltiplo de d'. Logo: $ax + by = d'k$.
Assim: $d = ax + by + cz = d'(k) + cz$ $\Rightarrow$ d = mdc (d', c) = mdc (mdc (a, b), c).

7.5. CÁLCULO DO MDC A PARTIR DAS FATORAÇÕES CANÔNICAS

Suponha que seja pedido o cálculo do mdc de alguns inteiros. Uma maneira prática é utilizando a fatoração canônica destes inteiros. Inicialmente deve-se fatorar em fatores primos todos os inteiros. O mdc destes valores é igual ao número que obtém tomando os fatores primos comuns a todos os inteiros elevados aos respectivos menores expoentes.

Por exemplo, para calcular o mdc de $2^2 3^3 5^2$, $2^3 5^5 7^3$ e $2^4 3^4 5^2 13^4$ devemos observar quais são os fatores primos comuns a todos os inteiros, ou seja, 2 e 5, e depois tomar os menores expoentes destes primos nos inteiros. Desde que o menor expoente de 2 nos inteiros é 2 e o menor expoente de 5 nos inteiros é 2, temos que mdc $(2^2 3^3 5^2, 2^3 5^5 7^3$ e $2^4 3^4 5^2 13^4) = 2^2 5^2$.

Exemplos:

1) Demonstrar que, se a | c, se b | c e se o mdc (a, b) = d, então ab | cd.
Solução:
Se a | c e b | c temos: $c = k_1.a$ e $c = k_2.b$
Se mdc (a, b) = d $\Rightarrow$ $ax + by = d$ $\Rightarrow$ $acx + bcy = cd$ $\Rightarrow$ $ak_2bx + bk_1ay = cd$ $\Rightarrow$
$ab(k_2x + k_1y) = cd$ $\Rightarrow$ ab | cd.

2) Qual é a soma dos dígitos do menor inteiro positivo que é divisível por todos os inteiros de 1 até 10 (inclusive)?
Solução:
Como n é divisível por 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10, então n é um múltiplo de mdc (1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 e 10) = $2^3.3^2.5.7 = 2520$. Desta forma, o menor valor de n é 2520, cuja soma dos dígitos é 9.

3) (PUC/MG-2003) O maior número que divide 200 e 250, deixando como restos 15 e 28, respectivamente, é:
a) 37 b) 47 c) 57 d) 67
Solução:
Seja n o número pedido. Assim: $200 = n.q_1 + 15$ e $250 = n.q_2 + 28$ $\Rightarrow$ $n.q_1 = 185$ e $n.q_2 = 222$.

Estas últimas expressões implicam que n divide 185 e n divide 222 e deve ser o maior possível. Logo, temos que n = mdc (185, 222) = mdc (5.37, 2.3.37) = 37.

4) (PUC/PR-2003) O produto de 2 números, não primos entre si é 990, então o máximo divisor comum entre eles é:
a) 2 b) 3 c) 5 d) 9 e) 11
Solução:
Segundo o enunciado: a.b = 990 $\Rightarrow$ a.b = $2.3^2.5.11$.
Como o único fator primo da fatoração de 990 que possui expoente ≥ 1 é 3, então mdc (a, b) = 3.

5) (Mackenzie-2003) Nas últimas eleições, três partidos políticos tiveram direito, por dia, a 90 s, 108 s e 144 s de tempo gratuito de propaganda na televisão, com diferentes números de aparições. O tempo de cada aparição, para todos os partidos, foi sempre o mesmo e o maior possível. A soma das aparições diárias dos partidos na TV foi de:
a) 15 b) 16 c) 17 d) 19 e) 21
Solução:
Seja $t \in \mathbb{N}$ o tempo de cada aparição. Assim, existem x, y, $z \in \mathbb{N}$ tal que t.x = 90, t.y = 108 e t.z = 144.
Assim concluímos que t divide 90, 108 e 144 e é o maior valor possível, ou seja, t = mdc (90, 108, 144) = mdc $(2^2.5, 2^2.3^3, 2^4.3^2) = 2.3^2 = 18$.
Logo: x = 5, y = 6 e z = 8 $\Rightarrow$ x + y + z = 19.

6) (OBM-2000) Qual é o maior inteiro positivo *n* tal que os restos das divisões de 154, 238 e 334 por *n* são iguais?
Solução:
Dois números deixam o mesmo resto quando divididos por *n* se e só se sua diferença é múltipla de *n*. Logo, as diferenças 238 − 154 = 84 e 334 − 238 = 96 são ambas múltiplas de *n*. Como *n* é o maior possível, concluímos que *n* deve ser o maior divisor comum de 84 e 96, que é 12.

7) (Olimpíada da Bélgica-2001) O máximo divisor comum de 878787878787 e 787878787878 vale:
a) 3 b) 9 d) 27 d) 101010101010 e) 303030303030
Solução:
Perceba que:
878787878787 = 87(101010101010) = 29(303030303030)
787878787878 = 78(101010101010) = 26(303030303030)
Como mdc (29, 26) = 1 $\Rightarrow$ mdc (878787878787, 787878787878) = 303030303030

8) (Olimpíada da Rússia-61) Dados a, b, p inteiros arbitrários, prove que sempre existem primos relativos m e n, tal que (am + bn) é divisível por p.
Solução:
Dividamos inicialmente a e b por p: a = xp + r_1 e b = yp + r_2
Assim: am + bn = mxp + mr_1 + nyp + nr_2 = p(mx + ny) + mr_1 + nr_2
Seja d = mdc (r_1, r_2) $\Rightarrow$ mdc (r_1/d, r_2/d) = 1 $\Rightarrow$ mdc (− r_1/d, r_2/d) = 1
Fazendo m = r_2/d e n = − r_1/d, temos que mr_1 + nr_2 = 0 $\Rightarrow$ am + bn = p(mx + ny) $\Rightarrow$ p | am + bn, onde mdc (m, n) = 1.

9) Prove que se m e n são números naturais e m é ímpar, então mdc $(2^m - 1, 2^n + 1) = 1$.
Solução:
Seja d o mdc entre $2^m - 1$ e $2^n + 1$. Como d é impar e $2^m - 1 = kd$ $2^n + 1 = pd$ $\Rightarrow$
$2^m = kd + 1$ $2^n = pd - 1$
$(2^m)^n = 2^{mn} = (kd + 1)^n = (kd)^n + n(kd)^{n-1} + ... + n(kd) + 1 = d[k^n d^{n-1} + nk^{n-1}d^{n-2} + ...+ nk] + 1$ $\Rightarrow$
$2^{mn} = td + 1$
Analogamente: $(2^n)^m = 2^{mn} = (pd - 1)^m = ud - 1$ pois m é ímpar

Então $td + 1 = ud - 1 \Rightarrow d(u - t) = 2 \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 1$ pois d é ímpar

10) Para todo inteiro positivo n, seja $T_n = 2^{2^n} + 1$. Mostre que se $m \neq n$, então T_m e T_n são primos relativos.

Solução:

Notemos que: $T_n - 2 = 2^{2^n} - 1 = 2^{2\,2^{n-1}} - 1 = (T_{n-1} - 1)^2 - 1 = T_{n-1}^2 - 2T_{n-1} = T_{n-1}(T_{n-1} - 2) =$

$= T_{n-1}T_{n-2}(T_{n-2} - 2) = \ldots = T_{n-1}T_{n-2}\ldots T_1T_0(T_0 - 2) = T_{n-1}T_{n-2}\ldots T_1T_0$.

para todo n. Desta forma, todo divisor comum de T_m e T_n deve dividir 2. Mas como cada T_n é ímpar, então T_m e T_n são primos entre si.

11) Mostrar que o mdc $(5n + 6, 5n + 8) = 1$, onde n é um inteiro ímpar.

Solução:

Se n é ímpar $\Rightarrow$ $5n + 6$ e $5n + 8$ também são ímpares $\Rightarrow$ mdc $(5n + 6, 5n + 8)$ é ímpar.

Se $d = \text{mdc}(5n - 6, 5n - 8) \Rightarrow d \mid (5n + 8) - (5n + 6) \Rightarrow d \mid 2 \Rightarrow d = 1$ pois d é ímpar.

12) (Olimpíada do México-88) Se a e b são dois inteiros positivos primos relativos e n é um inteiro, prove que o máximo comum divisor de $a^2 + b^2 - nab$ e $a + b$ divide $n + 2$.

Solução:

Seja $d = \text{mdc}\,|(a + b), (a^2 + b^2 - nab)| \Rightarrow a + b = k_1.d$ e $a^2 + b^2 - nab = k_2.d$

Se $d \mid (a + b)$ e $d \mid (a^2 + b^2 - nab) \Rightarrow d \mid (a + b)^2 - (a^2 + b^2 - nab) \Rightarrow d \mid ab(n + 2)$

Como a e b são primos entre si e $d \mid (a + b)$, então d não divide nem a e nem b. Deste modo, temos que $d \mid (n - 2)$

13) (Olimpíada do Ceará-2000) Cinqüenta bolas, numeradas de 2 a 51, devem ser colocadas em 5 caixas, de modo que o máximo divisor comum (m. d. c) dos números de duas bolas quaisquer de uma caixa não seja o número correspondente a uma bola desta caixa. Quais são as bolas de cada uma das 5 caixas? Justifique.

Solução:

Dados dois números inteiros positivos distintos (a e b; $a > b$), tais que um é múltiplo do outro, temos que m.d.c. $(a, b) = b$ e $a \geq 2b$. Assim, é fácil ver que:

a) As bolas de números 2, 4, 8, 16 e 32 devem estar em caixas diferentes. Suponhamos, então, que essas bolas estejam respectivamente na primeira, segunda, terceira, quarta e quinta caixa;

b) Entre 32 e 63; 16 e 31; 8 e 15; 4 e 7, e entre 2 e 3 não existem dois números tais que um seja múltiplo do outro. Logo, uma maneira fácil de repartir essas bolas, de acordo com o enunciado, seria:

Caixas	Bolas	
1ª	2, 3	$\Rightarrow$ 2 bolas
2ª	4, 5, 6, 7	$\Rightarrow$ 4 bolas
3ª	8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15	$\Rightarrow$ 8 bolas
4ª	16, 17, 18, 19, ..., 30, 31	$\Rightarrow$ 16 bolas
5ª	32, 33, 34, 35, ..., 50, 51	$\Rightarrow$ 20 bolas

7.6. ALGORITMO DE EUCLIDES

A fim de demonstrar o algoritmo de Euclides, necessitamos do seguinte resultado.

Teorema: Sejam a e b dois inteiros positivos e $a = bq + r$, com $0 \leq r < b$. Então mdc (a, b) = mdc (b, r).

Demonstração:

Com efeito, se $a = bq + r \Rightarrow r = a - bq$. Seja k um divisor comum de a e b $\Rightarrow k \mid a$ e $k \mid b$.

Assim, $k \mid r$, ou seja, k é um divisor comum de b e r. Reciprocamente, como $a = bq + r$, vem imediatamente que todo divisor de comum de b e de r é divisor de b e de a.

Desta forma, o conjunto dos divisores comuns de a e de b é igual ao conjunto dos divisores comuns de b e de r. Logo, mdc (a, b) = mdc (b, r).

Algoritmo de Euclides: Sejam a e b inteiros positivos, com $a \geq b$. Usando sucessivamente o algoritmo da divisão:

$a = bq_1 + b_1$, $\quad 0 < b_1 < b$,

$b = b_1q_2 + b_2$, $\quad 0 < b_2 < b_1$,

$b_1 = b_2q_3 + b_3$, $\quad 0 < b_3 < b_2$,

.....

$b_{n-2} = b_{n-1}q_n + b_n$, $\quad 0 < b_n < b_{n-1}$

$b_{n-1} = b_nq_{n+1}$.

Então mdc (a, b) = b_n.

Demonstração:

Inicialmente notemos que o processo acima realmente chega ao fim. De fato, como $0 < b_n < b_{n-1} < \ldots < b_1 < b$, vemos que esse processo não pode repetir-se indefinidamente, pois temos uma seqüência estritamente decrescente de inteiros positivos e há um número finito de inteiros entre 0 e b.

Pelo Teorema anterior, mdc (a, b) = mdc (b, b_1) = mdc (b_1, b_2) = mdc (b_2, b_3) = ... = mdc (b_{n-1}, b_n).

Entretanto, mdc (b_{n-1}, b_n) = b_n, pois b_{n-1} é um múltiplo de b_n, o que conclui a demonstração.

Exemplos:

1) Aplicar o Algoritmo de Euclides para calcular mdc (243, 37).

Solução:

$243 = (37)(6) + 21$

$37 = (21)(1) + 16$

$21 = (16)(1) + 5$

$16 = (5)(3) + 1$

$5 = (1)(5)$

Assim, temos que mdc (243, 37) = 1.

2) Os inteiros positivos m e n são tais que mdc (m, n) = d. Mostrar que mdc $(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^d - 1$.

Solução:

Seja $m = nq + r$. Sabemos que $2^m - 1 = (2^n - 1)(2^{n(q-1)} + 2^{n(q-2)} + \ldots + 2^n + 1)$

Assim, todo divisor comum de $2^m - 1$ e $2^n - 1$ também dividirá $2^r - 1$.

Analogamente, os divisores de $2^n - 1$ e $2^r - 1$ também dividem $2^m - 1$, por isso também são divisores comuns de $2^m - 1$ e $2^n - 1$. Deste modo mdc $(2^m - 1, 2^n - 1)$ = mdc $(2^n - 1, 2^r - 1)$

Aplicando o Algoritmo de Euclides:

$m = nq + r$

$n = rq_1 + r_1$

$r = r_1q_2 + r_2$

.....

$r_{n-1} = r_nq_{n+1}$ onde r_n = mdc (a, b)

Assim:

$(2^m - 1, 2^n - 1) = (2^n - 1, 2^r - 1) = (2^r - 1, 2^{r_1} - 1) = \ldots = (2^{r_{(n-1)}} - 1, 2^{r_n} - 1) = 2^{r_n} - 1 = 2^{\text{mdc}(m,n)} - 1$.

Mínimo Múltiplo Comum

7.7. DEFINIÇÃO: Sendo a e b dois inteiros diferentes de zero ($a \neq 0$ e $b \neq 0$), define-se mínimo múltiplo comum de a e b o inteiro positivo m ($m > 0$) que satisfaz às seguintes condições:
(1) $a \mid m$ e $b \mid m$
(2) se $a \mid c$ e se $b \mid c$, com $c > 0$, então $m \leq c$.
Observa-se que a condição (1) garante que m é um múltiplo comum de a e b e a condição (2) afirma que m é o menor dentre todos os múltiplos comuns positivos de a e b. Por mmc (a, b) indica-se o mínimo múltiplo comum de a e b.
Como o produto ab é um dos múltiplos comuns de a e b, temos que: $\text{mmc}(a, b) \leq |ab|$.
Nota-se também que, se $a \mid b$, então $\text{mmc}(a, b) = |b|$.

7.8. CÁLCULO DO MMC A PARTIR DAS FATORAÇÕES CANÔNICAS

Suponha que seja pedido o cálculo do mmc de alguns inteiros. Inicialmente deve-se fatorar em fatores primos todos os inteiros. O mmc destes valores é igual ao número que obtém tomando todos os fatores primos existentes nas fatorações canônicas dos inteiros elevados aos respectivos maiores expoentes. Por exemplo, para calcular o mmc de $2^2 3^3 5^2$, $2^3 5^5 7^3$ e $2^4 3^4 5^2 13^4$ devemos observar quais são os fatores primos existentes nestes inteiros, ou seja, 2, 3, 5, 7 e 13, e depois tomar os maiores expoentes destes primos nos inteiros. Assim, temos que mmc ($2^2 3^3 5^2$, $2^3 5^5 7^3$ e $2^4 3^4 5^2 13^4$) = $2^4 3^4 5^5 7^3 13^4$.

Exemplos:

1) (UFRN-2005) Uma espécie de cigarra que existe somente no leste dos EUA passa um longo período dentro da terra alimentando-se de seiva de raízes, ressurgindo após 17 anos. Em revoada, os insetos dessa espécie se acasalam e produzem novas *ninfas* que irão cumprir novo ciclo de 17 anos. Em 2004, ano bissexto, os EUA presenciaram outra revoada dessas cigarras. O próximo ano bissexto em que ocorrerá uma revoada da futura geração de cigarras será
a) 2072. b) 2068. c) 2076. d) 2080.
Solução:
O tempo que se deve passar até o próximo ano bissexto com revoada deve ser o menor múltiplo de 4 e 17, ou seja, igual ao mmc (4, 17) = 68. Portanto, o próximo ano é 2004 + 68 = 2072.

2) (UFRN-2001) Para os festejos natalinos, uma fábrica de doces lançará uma caixa de chocolates. O número de chocolates poderá ser dividido igualmente (sem fracioná-los) entre 2, 3, 4, 5 e 6 pessoas, não havendo sobra. O menor número de chocolates que essa caixa deverá conter será:
a) 180 b) 120 c) 60 d) 30
Solução:
O número deve de chocolates deve ser múltiplo de 2, 3, 4, 5 e 6.
O menor valor é igual a mmc (2, 3, 4, 5, 6) = 60.

3) Suponha que três planetas descrevem órbitas circulares em torno de uma estrela com períodos 30, 50 e 84 anos, respectivamente. Dentro de quantos anos estarão, pela primeira vez, nas mesmas posições que ocupam agora em relação à estrela?
Solução:
Note que o primeiro planeta volta a ocupar a posição original depois de uma quantidade de anos que seja múltiplo de 30, o segundo planeta depois de uma quantidade de anos que seja múltiplo de 50 e o terceiro depois de uma quantidade de anos que seja múltiplo de 84. Assim, estes 3 planetas ocupam simultaneamente a posição original depois de quantidade de anos que seja múltiplo de 30, 50 e 84, sendo o menor destes valores o mmc entre $30 = 2.3.5$, $50 = 2.5^2$ e $84 = 2^2.3.7$, que vale $2^2.3.5^2.7 = 210$ anos.

4) Achar o menor inteiro $a > 2$ tal que: $2 \mid a$, $3 \mid (a - 1)$, $4 \mid (a + 2)$, $5 \mid (a - 3)$ e $6 \mid (a + 4)$.
Solução:

I) $2 \mid a \Rightarrow a = 2x_1$ II) $3 \mid (a+1) \Rightarrow a+1 = 3x_2 \Rightarrow a = 3x_2 - 1 \Rightarrow a = 3(x_2 - 1) + 2$
III) $4 \mid (a+2) \Rightarrow a+2 = 4x_3 \Rightarrow a = 4x_3 - 2 \Rightarrow a = 4(x_3 - 1) + 2 \Rightarrow a - 2 = 4(x_3 - 1)$
IV) $5 \mid (a+3) \Rightarrow a+3 = 5x_4 \Rightarrow a = 5x_4 - 3 \Rightarrow a = 5(x_4 - 1) + 2 \Rightarrow a - 2 = 5(x_4 - 1)$
V) $6 \mid (a+4) \Rightarrow a+4 = 6x_5 \Rightarrow a = 6x_5 - 4 \Rightarrow a = 6(x_5 - 1) + 2 \Rightarrow a - 2 = 5(x_5 - 1)$
Como $a - 2$ é divisível por 4, 5 e 6, então o menor valor que pode assumir $a - 2$ é o mínimo múltiplo comum entre 4, 5 e 6. Assim: $a - 2 = \text{mmc}(4, 5, 6) \Rightarrow a - 2 = 60 \Rightarrow a = 62$.

5) (Mackenzie-2004) Os números compreendidos entre 400 e 1500, divisíveis ao mesmo tempo por 18 e 75, têm soma:
a) 1600 b) 2350 c) 1350 d) 2700 e) 1800
Solução:
Os números divisíveis ao mesmo tempo por 18 e 75 são divisíveis por mmc (18, 75) = 450. Entre 400 e 1500 os múltiplos de 450 são: 450, 900 e 1350, cuja soma é 2700.

6) (PUC MG-2005) O mínimo múltiplo comum dos números naturais 8, 4.3^n e 30 é 360. É CORRETO afirmar que o número n pertence ao intervalo fechado à esquerda e aberto à direita:
a) [0, 2[b) [2, 4[c) [4, 6[d) [6, 8[
Solução:
Fatorando obtemos mmc $(2^3, 2^2.3^n, 2.3.5) = 2^3.3^2.5$. Os fatores 2^3 e 5 do mmc são devidos os números 2^3 e 2.3.5. Entretanto, como a maior potência de 3 que existe em 2^3 e 2.3.5 é 3, então o fator 3^2 do mmc é devido à $2^2.3^2$. Assim, devemos ter n = 2.

7) (OBM-99) Um edifício muito alto possui 1000 andares, excluindo-se o térreo. Do andar térreo partem 5 elevadores: O elevador *A* pára em todos os andares. O elevador *B* pára nos andares múltiplos de 5, isto é, 0, 5, 10, 15, ... O elevador *C* pára nos andares múltiplos de 7, isto é, 0, 7, 14, 21, ... O elevador *D* pára nos andares múltiplos de 17, isto é, 0, 17, 34, 51, ... O elevador *E* pára nos andares múltiplos de 23, isto é, 0, 23, 46, 69, ...
a) Mostre que, excetuando-se o andar térreo, não existe nenhum andar onde param os 5 elevadores.
b) Determine todos os andares onde param 4 elevadores.
Solução:
a) O elevador *B* pára nos múltiplos de 5. O elevador *C* pára nos múltiplos de 7. O elevador *D* pára nos múltiplos de 17. O elevador *E* pára nos múltiplos de 23.
Como 5, 7, 17 e 23 são números primos, para que todos parem num mesmo andar, este tem que ser múltiplo de $5 \times 7 \times 17 \times 23 = 13685$ e o prédio só tem 1000 andares.
b) Para que num andar parem exatamente quatro elevadores, devem parar *A*, que pára em todos, e três dos restantes.
B, *C* e *D* param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 17 = 595$
B, *C* e *E* param nos múltiplos de $5 \times 7 \times 23 = 805$
B, *D* e *E* param nos múltiplos de $5 \times 17 \times 23 = 1955$
C, *D* e *E* param nos múltiplos de $7 \times 17 \times 23 = 2737$
Logo, os andares onde param 4 elevadores são o 595 e o 805.

7.9. RELAÇÃO ENTRE MDC E MMC

Teorema: Sejam a e b dois inteiros positivos, então: $\boxed{\text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b) = ab}$

Demonstração:

Seja $\text{mdc}(a, b) = d$ e $\text{mmc}(a, b) = m$.

Como $a \mid a(b/d)$ e $b \mid b(a/d)$, segue-se que ab/d é um múltiplo comum de a e b.

Portanto, existe um inteiro positivo k tal que $ab/d = mk$, $k \in N$, o que implica: $a/d = (m/b)k$ e $b/d = (m/a)k$, isto é, k é um divisor comum dos inteiros a/d e b/d. Mas, a/d e b/d são primos entre si, de modo que $k = 1$. Assim sendo, temos $ab/d = m$ ou $ab = dm$, isto é $ab = \text{mdc}(a, b).\text{mmc}(a, b)$

Exemplos:

1) Determinar os inteiros positivos a e b sabendo que $ab = 4032$ e $\text{mmc}(a, b) = 336$.

Solução:

I) $\text{mdc}(a, b) \cdot \text{mmc}(a, b) = ab \Rightarrow [\text{mdc}(a, b)][336] = 4032 \Rightarrow \text{mdc}(a, b) = 12$

Se $\text{mdc}(a, b) = 12$ então existem os inteiros p e q, primos entre si, tais que $a = 12p$ e $b = 12q$

II) $ab = 4032 \Rightarrow 144pq = 4032 \Rightarrow pq = 28$

Como p e q são primos entre si, então existem duas possibilidades: $p = 4$ e $q = 7$ ou $p = 1$ e $q = 28$

Então: $p = 48$ e $q = 84$ ou $p = 12$ e $q = 336$

2) (Unicamp-2003) Sejam a e b dois números inteiros positivos tais que ***mdc*** $(a, b) = 5$ e o ***mmc*** $(a, b) = 105$.

a) Qual é o valor de b se $a = 35$?

b) Encontre todos os valores possíveis para (a, b).

Solução:

a) Como $ab = \text{mdc}(a, b).\text{mmc}(a, b)$ então $35.b = 5.105 \Rightarrow b = 15$

b) Se $\text{mdc}(a, b) = 5$ então $a = 5a'$ e $b = 5b'$, onde $\text{mdc}(a', b') = 1$.

Logo: $ab = \text{mdc}(a, b).\text{mmc}(a, b) \Rightarrow 5a'.5b' = 5.105 \Rightarrow a'.b' = 21 \Rightarrow a'.b' = 3.7$.

Existem (a menos da ordem) duas possibilidades:

i) $a' = 1$ e $b' = 3.7 \Rightarrow a = 5$ e $b = 105$.

ii) $a' = 3$ e $b' = 7 \Rightarrow a = 15$ e $b = 35$.

Assim, todos os pares ordenador são (5, 105), (105, 5), (15, 35) e (35, 5).

3) (Olimpíada da Rússia-95) Para dois inteiros positivos m e n, seja mmc (m, n) o mínimo múltiplo comum de m e n e mdc (m, n) o máximo divisor comum de m e n. Se mmc (m, n) + mdc (m, n) = m + n, então prove que um dos números m e n é múltiplo do outro.

Solução:

Seja $d = \text{mdc}(m, n)$, ou seja, $m = dm_1$ e $n = dn_1$, para m_1 e n_1 inteiros primos entre si.

Como $\text{mmc}(m, n).\text{mdc}(m, n) = m.n \Rightarrow \text{mmc}(m, n).d = d^2m_1n_1 \Rightarrow \text{mmc}(m, n) = dm_1n_1$

Assim: $\text{mmc}(m, n) + \text{mdc}(m, n) = m + n \Rightarrow m_1n_1d + d = m_1d + n_1d \Rightarrow m_1n_1 + 1 = m_1 + n_1 \Rightarrow$

$m_1n_1 - m_1 - n_1 + 1 = 0 \Rightarrow (m_1 - 1)(n_1 - 1) = 0$.

Assim, temos duas opções:

i) $m_1 = 1 \Rightarrow m = d \Rightarrow m$ divide n

ii) $n_1 = 1 \Rightarrow n = d \Rightarrow n$ divide m

Exercícios – MDC

1) Demonstrar que, se n = abc + 1, então o mdc (n, a) = mdc (n, b) = mdc (n, c) = 1.

2) Os restos das divisões dos inteiros 4933 e 4435 por um inteiro positivo n são respectivamente 37 e 19. Achar o inteiro n.

3) Dividindo-se dois inteiros positivos pelo seu mdc, a soma dos quocientes obtidos é 8. Determinar os dois inteiros, sabendo que a sua soma é 384.

4) Sabendo que o mdc (n, 54) = mdc (n, 126) = 6, calcular o inteiro n.

5) O mdc de dois inteiros positivos é 10 e o maior deles é 120. Determinar o outro inteiro.

6) Determinar os inteiros positivos a e b sabendo: $a^2 - b^2 = 7344$ e mdc (a, b) = 12

7) O mdc entre a e 60 é 15. Se a está entre 25 e 50, calcule a.

8) Calcular mdc (5a + 7b, 2a + 3b), sabendo que mdc (a,b) = 3 .

9) Achar o mdc (a, b) sabendo:
$a = 2^{30}.5^{21}.19.23^3$ e $b = 2^6.3.7^4.11^2.19^5.23^7$

10) Em um parque de diversões pode-se entrar a todos os jogos com os mesmos vales. Cada jogo custa uma certa quantidade de vales, segundo seu preço. Existem jogos de R$0,90, de R$1,50 e de $2,10. Qual é o preço de um vale, se a quantidade de vales que são usados é a menor possível?

11) Sejam a e b dois números naturais, não primos entre si, cujo produto é 420. Determine o máximo divisor comum de a e b.

12) Demonstre que para todo, $n \in N$, 30n + 7 e 21n + 5 são primos entre si.

13) Demonstrar que o mdc (n + k, k) = 1 se e somente se o mdc (n, k) = 1.

14) Demonstrar que, se a | bc e se o mdc (a, b) = d, então a | cd.

15) O mdc (a, 4) = 2 = mdc (b, 4). Demonstrar que o mdc (a + b, 4) = 4.

16) Demonstrar que mdc (a, b) = mdc (a, c) implica mdc (a, b) = mdc (a, b, c).

17) Prove que mdc (a, b, c) = mdc (mdc (a, b), mdc (a, c)).

18) Sejam a e b inteiros positivos reais que ab é um quadrado perfeito e o mdc (a, b) = 1. Demonstrar que a e b são quadrados perfeitos.

19) Sejam a, b, c, d (b ≠ d) inteiros tais que o mdc (a, b) = mdc (c, d) = 1. Mostrar que a soma a/b + c/d não é um inteiro.

20) Provar que, dados 5 números compostos menores que 100, existe ao menos dois que não são primos entre si.

21) Para cada terno de inteiros positivos (a, b, c) tais que $a^2 + b^2 = c^2$ considera-se o numero $n = a.b.(b^2 - a^2)$. Achar o maior numero natural que é divisor comum de todos os números n considerados.

22) Determine todos os valores possíveis para mdc $(n^3 + 1, n^2 + 2)$, para todo n.

23) (UFG-2005) Uma confecção atacadista tem no seu estoque 864 bermudas e 756 calças e deseja vender toda essa mercadoria dividindo-a em pacotes, cada um com n_1 bermudas e n_2 calças, sem sobrar nenhuma peça no estoque. Deseja-se montar o maio número de pacotes nessas condições. Nesse caso, o número de peças n ($n = n_1 + n_2$), em cada pacote, deve ser igual a
a) 9 b) 12 c) 15 d) 18 e) 20

24) (UFAC-2002) Dado o número inteiro a = 111222. Podemos afirmar com certeza que:
a) a é múltiplo de 5. b) a não é múltiplo de 6.
c) mdc (a , 2) = 3. d) mdc (a, 3) = 3.
e) mmc (a , 6) = 6.

25) (UFSC-95) Qual o menor número possível de quadrados iguais em que se pode dividir um retângulo cujos lados medem 30 m e 105 m?

26) (PUC/MG-97) Os números naturais a e b são tais que $ab = 2^3.3^2.5$ e a/b = 0,4. O máximo divisor comum de a e b é:

a) 6 b) 8 c) 10 d) 12 e) 30

27) (Vunesp-2001) Durante um evento, o organizador pretende distribuir, como brindes, a alguns dos participantes, caixas (kits), com mesmo conteúdo, formado de camisetas e chaveiros. Sabe-se que ele possui exatamente 200 camisetas e 120 chaveiros.
a) Decomponha os números 200 e 120 em fatores primos.
b) Determine o número máximo de caixas, com mesmo conteúdo, que o organizador conseguirá formar utilizando todos os chaveiros e camisetas disponíveis.

28) (UFU-99) Se o máximo divisor comum entre os números 144 e $(30)^p$ é 36, em que p é um inteiro positivo, então o expoente p é igual a:
a) 1 b) 3 c) 4 d) 2

29) (UFU-2000) Considere a função f: N → N, (onde N representa o conjunto dos números naturais) dada por f(n) = mdc (2n + 4, 4n + 2). Então, o valor mínimo de f é igual a:
a) 4 b) 1 c) 6 d) 2 e) 8

30) (UFV-2002) Sejam m e n números naturais com máximo divisor comum diferente de 1, e tais que o produto entre eles seja igual a 840. Sobre os números m e n é CORRETO afirmar que:
a) um é par e o outro é ímpar.
b) têm mdc igual a 3.
c) são números pares.
d) são números ímpares.
e) têm mdc igual a 5.

31) (Fuvest-95) O produto de dois números inteiros positivos, que não são primos entre si, é igual a 825. Então o máximo divisor comum desses dois números é:
a) 1 b) 3 c) 5 d) 11 e) 15

32) (Fuvest-2002) Maria quer cobrir o piso de sua sala com lajotas quadradas, todas com lados de mesma medida inteira, em centímetros. A sala é retangular, de lados 2 m e 5 m. Os lados das lajotas devem ser paralelos aos lados da sala, devendo ser utilizadas somente lajotas inteiras. Quais são os possíveis valores do lado das lajotas?

33) (ESA-2001) A forma fatorada de um número natural x é $2^3 \cdot 3 \cdot 5^2$ e a forma fatorada de um número natural y é $2^4 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7$. Então, podemos afirmar que o MDC de (x,y) é:
a) 102 b) 120 c) 840 d) 3600 e) 5880

34) (EEAR-2002) Se $m = 2^2 \cdot 3^a \cdot 5^2 \cdot 7^3$ e $n = 2^3 \cdot 3^5 \cdot 5^3 \cdot 7^b \cdot 11$, e mdc (m,n) = 18.900, então os valores de a e b são, respectivamente.
a) 3 e 1 b) 2 e 3 c) 3 e 2 d) 2 e 2

35) (Colégio Naval-82) A diferença entre dois números naturais que têm para produto 2304 e para máximo divisor comum 12, é:
a) 180 b) 72 c) 0 d) 192 e) 168

36) (Colégio Naval-87) O número 12 é o máximo divisor comum entre os números 360, a e b tomados dois a dois. Sabendo que $100 < a < 200$, e que $100 < b < 200$, pode-se afirmar que a + b vale:
a) 204 b) 228 c) 288 d) 302 e) 372

37) (Colégio Naval-2003) Se x e y são números inteiros e positivos, representa-se o máximo divisor comum de x e y por mdc (x, y); assim, o número de pares ordenados (x, y) que são soluções do sistema $\begin{cases} x + y = 810 \\ \text{mdc}(x, y) = 45 \end{cases}$ é igual a.
a) 6 b) 8 c) 10 d) 16 e) 18

Questões de Olimpíadas – Nível Intermediário

38) (Sergipe-99) Dois números têm por razão 5/8, e m.d.c. 21. Achar os números.

39) (Espírito Santo-97) A soma de um número natural com o máximo divisor comum entre ele e 99 é 121. Encontre este número.

40) (Rio Grande do Sul-2000) Determine todos os números inteiros positivos $N < 100$ que possuem, em relação a 420, o máximo divisor comum 6, ou seja, mdc (N, 420) = 6.

41) (Goiás-99) Deseja-se cercar com arame uma área na forma de um quadrilátero de lados 150m, 100m, 90m, 75m. A cerca deve conter postes igualmente espaçados e ainda conter um poste em cada vértice. Calcule o número mínimo de postes necessários para cercar a área.

42) (OBM-97) Um ladrilho, em forma de polígono regular, foi retirado do lugar que

ocupava em um painel. Observou-se então que esse ladrilho, se sofresse uma rotação de 40° ou de 60° em torno de seu centro, poderia ser encaixado perfeitamente no lugar que ficou vago no painel. O menor número de lados que pode ter esse ladrilho é:
a) 6 b) 9 c) 12 d) 15 e) 18

43) (Brasil Preparação Cone-Sul-95) Para que n = 1, 2, ..., seja d_n = mdc $(n^2 + 1995, (n + 1)^2 + 1995)$. Ache o maior valor que d_n pode assumir.

44) (Argentina-98) Leandro elege um número natural n e faz o seguinte: calcula $a = n^2 + 5$; calcula $b = (n + 1)^2 + 5$; Determina o máximo divisor comum entre a e b e anota tal máximo divisor comum no papel. Qual é o maior número que pode anotar?

45) (Chile-90) Encontre todos os números naturais n tais que $\frac{n+81}{2n-5}$ é um número natural.

46) (México) Se (a, b) denota o máximo divisor comum de a e b, o valor de $(a^4 - b^4, a^2 - b^2)$ é:
(a) a – b (b) a + b (c) $a^2 - b^2$ (d) $a^2 + b^2$

47) (México-87) Demonstre que se n é um inteiro positivo, então $(n^2 + n - 1)/(n^2 + 2n)$ é uma fração irredutível (simplificada).

48) (University of South Carolina-91) Qual é o máximo divisor comum de $2^{15} + 3^{15}$ e $2^{25} + 3^{25}$?
a) 5 b) 11 c) 55 d) 275 e) um número > 300

49) (Colorado-98) Todos os dígitos de um número N de 1998 dígitos são iguais a 1. Determine o máximo divisor comum entre N e 1111.

50) (Bélgica-2001) Qual é o maior valor que pode assumir o máximo divisor comum de 6 números naturais diferentes escritos com 2 dígitos?

51) (Índia-97) Determine o máximo divisor comum de todos os números de 6 dígitos obtidos usando cada um dos dígitos 1, 2, 3, 4, 5, 6 exatamente uma vez.

52) (Índia-97) Para cada inteiro positivo n, define-se $a_n = 20 + n^2$, e d_n = mdc (a_n, a_{n+1}). Determine o conjunto de todos os valores que pode assumir d_n e mostre um exemplo para cada um destes valores.

53) (Rússia-63) Os números naturais a e b são primos entre si. Prove que o máximo divisor comum entre (a + b) e $(a^2 + b^2)$ está entre 1 ou 2.

54) (IMO-59) Prove que $(21n + 4)/(14n + 3)$ é uma fração irredutível para todo número natural n.

Questões de Olimpíadas – Nível Avançado

55) (Crux Mathematicorum) Sabe-se que todo número natural maior que 6 pode ser escrito como uma soma de dois números primos entre si, cada um deles maior que 1. Determine todos os números naturais que podem ser expressos como uma soma de 3 números primos entre si, cada um deles maior que 1.

56) (Panamá-2004) Neste ano bissexto houve eleições presidenciais no Panamá. Se as eleições se realizam a cada cinco anos, a última vez que ocorrerá eleições em ano bissexto antes do ano 3000 será:
a) 2984 b) 2986 c) 2990 d) 2994 e) 2996

57) (OBM-81) a) 2 ladrões roubaram um barril totalmente cheio com 8 litros de vinho. Para dividir o produto do roubo só tinham 2 garrafas com 5 e 3 litros de capacidade, respectivamente. Como foi possível fazer a divisão (em partes iguais de 4 litros) sabendo que nenhum dos 3 recipientes tem qualquer graduação?
Generalizamos o problema, para considerar, em vez de 3, 5 e 8, quantidades a, b e a + b, a e b inteiros e a + b par.
a) Mostre que, se a divisão é possível, então (a + b)/2 é múltiplo do MDC de a e b.
c) Mostre que, reciprocamente, se (a + b)/2 é múltiplo do MDC de a e b, então a divisão é possível.

58) (OBM-99) Determine o maior natural n para o qual existe uma reordenação (a, b, c, d) de (3, 6, 9, 12) (isto é, {a, b, c, d} = {3, 6, 9, 12}) tal que o número $\sqrt[n]{3^a 6^b 9^c 12^d}$ seja inteiro. Justifique sua resposta.

59) (OBM-2002) Dado um inteiro $a_0 > 1$ definimos uma seqüência $(a_n)_{n \geq 0}$ da seguinte forma: para cada $k \geq 0$, a_{k+1} é o menor inteiro a_k -

$1 > a_k$ tal que mdc $(a_{k-1}, a_0.a_1 .. a_k) = 1$. Diga para quais valores de a_0 temos que todos os termos a_k da seqüência são primos ou potências de primos.

60) (Brasil Seleção Cone Sul-2001) Bruno tenta descobrir um inteiro positivo $X \leq 100$, escolhido por seu amigo Bernardo. Ele pode escolher dois inteiros M e N menores do que 100 e perguntar: "Qual é o máximo divisor comum de $X + M$ e N?". Sabendo que Bernardo sempre responderá corretamente às perguntas, prove que Bruno pode determinar X após, no máximo, 7 questões.

61) (Argentina-98) Dos 999 números: mdc(1; 1998), mdc(2; 1998), mdc(3; 1998), mdc(4; 1998), ..., mdc(997; 1998), mdc(998; 1998), mdc(999; 1998), quantos são números maiores que 19?

62) (Espanha-96) Os números naturais a e b são tais que $\frac{a+1}{b} + \frac{b+1}{a}$ é inteiro. Demonstrar que o máximo divisor comum de a e b é maior que $\sqrt{a+b}$.

63) (Bélgica-96) Seja o conjunto de todos os primos estritamente maiores que 5. Determine o máximo divisor comum entre todos os inteiros $p^8 - 1$, onde $p \in P$.

64) (Irlanda-1999) Uma função $f : N \to N$ satisfaz às condições:
$f(ab) = f(a)f(b)$ se o máximo divisor comum de a e b é 1;
$f(p + q) = f(q) + f(q)$ para todos os números primos p e q.
Mostre que $f(2) = 2$, $f(3) = 3$ e $f(1999) = 1999$.

65) (Irlanda-2000) Prove que em cada conjunto de 10 inteiros consecutivos existe um que é primo relativo com todos os outros inteiros. Por exemplo, tomando 114, 115, 116, 117, 118, 119, 120, 121, 122, 123 os números 119 e 121 são cada um primos relativos com todos os outros.

66) (Polônia-2000) Seja $n \geq 3$ um inteiro positivo. Prove que a soma dos cubos de todos os números naturais, primos relativos com n e menores que n, é divisível por n.

67) (Hungria-1901) Seja d o máximo divisor comum de a e b. Mostre que exatamente d elementos de {a, 2a, 3a, ..., ba} são divisíveis por b.

68) (Hungria-1913) Se d é o máximo divisor comum de a e b, e D é o máximo divisor comum de A e B. Mostre que dD é o máximo divisor comum de aA, aB, bA e bB.

69) (Rússia-78) Seja $f(x) = x^2 + x + 1$. Prove que para todo número natural $m > 1$, os números m, f(m), f(f(m)), ... são primos relativos.

70) (Japão-96) Sejam m e n inteiros positivos com mdc (m, n) = 1. Calcule mdc $(5^m + 7^m, 5^n + 7^n)$.

71) (Torneio das Cidades-2003) Existe alguma progressão aritmética crescente, formada por cem inteiros positivos, de modo que os termos sejam dois a dois primos entre si?

72) (Bélgica-90) Prove que se a e b $(a > b)$ são dois números primos, consistindo de ao menos dois dígitos, então $a^4 - b^4$ é divisível por 240. Ainda mais, 240 é o máximo divisor comum de todos os números $a^4 - b^4$ obtidos desta forma.

73) (Espanha-93) Determine todos os números naturais n tais que o número $n(n + 1)(n + 2)(n + 3)$ possui exatamente 3 divisores primos.

74) (Alemanha-96) Determine o conjunto de todos os inteiros positivos n para os quais $n.2^{n-1} + 1$ é um quadrado perfeito.

75) (Grécia-2000) Determine o número primo p para o qual o número $1 + p + p^2 + p^3 + p^4$ é um quadrado perfeito.

76) (Polônia-99) Sejam m e n inteiros positivos tais que $mn \mid m^2 + n^2 + m$. Prove que m é o quadrado de um inteiro.

77) (Lituânia-97) São dados dois números naturais distintos a e b. Prove que existem infinitos números naturais n tais que $a + n$ e $b + n$ são primos entre si.

78) (IMO-83 banco) Sejam a e b números inteiros. É possível encontrar inteiros p e q tais que os inteiros $p + na$ e $q + nb$ são primos entre si para todo n?

Exercícios – MMC

1) Prove que:
a) mdc [mmc (a, b), a)] = a.
b) mmc [mdc (a, b), a] = a.

2) No alto de uma torre de uma emissora de televisão duas luses "piscam" com freqüências diferentes. A primeira "pisca" 15 vezes por minuto e a segunda "pisca" 10 vezes por minuto. Se num certo instante as luzes piscam simultaneamente, após quantos segundos elas voltarão a piscar simultaneamente?
a) 12 b) 10 c) 20 d) 15 e) 30

3) Sabendo que $588 = 2^2.3.7^2$ e $936 = 2^3.3^2.13$, calcule mdc(588, 936) e mmc(588, 936).

4) Qual o mmc de dois números cujo produto é 6480, sendo o mdc igual a 36?

5) O mdc de dois números é 3 e o mmc é 1260. Se um dos números é 36, qual é o outro?

6) Da Praça da República partem, às 6 horas da manhã, dois bondes das linhas X e Y, iniciando o serviço do transporte de passageiros. Sabendo-se que o bonde X volta ao ponto de partida ao cabo de 50 minutos, e o Y, ao cabo de 45 minutos, pergunta-se a que horas os dois bondes partirão novamente juntos da praça da República?

7) Tenho três réguas divididas em partes iguais. Cada parte da primeira tem 3 mm, da segunda, 5 mm, e da terceira, 12 mm. Coloco as três réguas uma do lado da outra, de modo que as suas extremidades coincidam. Quais são os traços de divisão das três réguas que coincidem?

8) Determine o menor inteiro que, quando dividido por 2, 3, 4, ... 10, deixa os restos 1, 2, 3, ... 9 respectivamente.

9) Se o mdc entre dois números é 6 e o mmc é 90, quais podem ser esses números?

10) Determinar os inteiros positivos a e b sabendo:
a) mdc (a, b) = 4 e o mmc (a, b) = 60
b) $a + b = 589$ e $\frac{mmc(a,b)}{mdc(a,b)} = 84$

11) Demonstrar que, se a e b são inteiros positivos tais que o mdc (a, b) = mmc (a, b), então a = b.

12) Sejam a, b e c inteiros positivos. Mostre que:
$$mmc(a,b,c) = \frac{abc.mdc(a,b,c)}{mdc(a,b).mdc(a,c).mdc(b,c)}$$

13) Prove que:
mmc(mdc(a, b), mdc(a, c)) = mdc(a, mmc(b, c)).

14) (UECE-2001) Dois relógios tocam uma música periodicamente, um deles a cada 60 segundos e o outro a cada 62 segundos. Se ambos tocaram (simultaneamente) às 10 horas, que horas estarão marcando os relógios quando voltarem a tocar juntos (simultaneamente) pela primeira vez após as 10 horas?
a) 10 horas e 31 minutos c) 13 horas e 30 minutos
b) 11 horas e 02 minutos d) 17 horas

15) (UECE-2004) Seja n o menor inteiro positivo para o qual $\frac{n}{2}.\frac{n}{3}.\frac{n}{4}.\frac{n}{5}.\frac{n}{6}.\frac{n}{7}.\frac{n}{8}e\frac{n}{9}$ são números inteiros. O produto dos algarismos do número n é:
a) 0 b) 5 c) 10 d) 20

16) (UECE-2005) Sendo n um número inteiro positivo, a notação M_n designa o conjunto de todos os múltiplos positivos de n. O valor de p para $M_p = M_{18} \cap M_{24}$ é:
a) 42 b) 54 c) 66 d) 72

17) (Unifor-99) Indica-se por M(n) o conjunto dos múltiplos positivos do número inteiro n. Considere o conjunto $M(12) \cap M(15) \cap M(20)$. A soma dos três menores números desse conjunto é
a) 240 b) 360 c) 420 d) 540 e) 680

18) (UFSC-99) Determine a soma dos números associados à(s) proposição(ões) VERDADEIRA(S).
01. Sejam x e y o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de 15 e 18, respectivamente. Então o produto xy = 270.
02. Se A = {1, 4, 9, 16, 25, 36, 49}, então, A é equivalente a $\{x^2 / x \in N \text{ e } 1 < x < 7\}$.
04. Numa divisão, cujo resto não é nulo, o menor número que se deve adicionar ao dividendo para que ela se torne exata é (d – r), sendo d o divisor e r o resto.

19) (UFMG-2001) Seja S o conjunto formado por todos os números naturais n tais que o mínimo múltiplo comum de n e 504 é igual a 5040. Determine todos os elementos do conjunto S.

20) (PUC/MG-2000) As afirmativas abaixo se referem a números naturais:
I. Dado um número natural, existe sempre um número natural maior do que ele.
II. Entre 10 e 20 há cinco números ímpares dos quais somente três são primos.
III. O mínimo múltiplo comum de 6 e 14 é múltiplo de 4.
IV. O máximo divisor comum de 12 e 34 é divisor de 6.
O número de afirmativas verdadeiras é:
a) 0 b) 1 c) 2 d) 3 e) 4

21) (Unesp-2004) Três viajantes partem num mesmo dia de uma cidade *A*. Cada um desses três viajantes retorna à cidade *A* exatamente a cada 30, 48 e 72 dias, respectivamente. O número mínimo de dias transcorridos para que os três viajantes estejam juntos novamente na cidade *A* é:
a) 144 b) 240 c) 360 d) 480 e) 720

22) (ESA-94) Sejam a e b inteiros positivos não nulos e *a* divisível por *b*. Então mmc (*a*, *b*) é:
a) 1 b) a c) b d) ab e) nda

23) (EEAR-2002) Sendo $A = 2^3 \times 3^2 \times 5$, $B = 2^4 \times 3^3$ e $C = 2^5 \times 3^4$, então o quociente da divisão do m.m.c. pelo m.d.c. dos números A, B e C é
a) 36 b) 90 c) 180 d) 450

24) (Epcar-2001) Ao separar o total de suas figurinhas, em grupos de 12, 15 e 24, uma criança observou que sobravam sempre 7 figurinhas. Se o total de suas figurinhas está compreendido entre 240 e 360, pode-se afirmar que a soma dos algarismos significativos desse total é
a) 6 b) 9 c) 10 d) 13

25) (Epcar-2003) Seja n ∈ IN tal que n dividido por 5 deixa resto 3, n dividido por 4 deixa resto 2 e n dividido por 3 deixa resto 1. Os três primeiros números naturais que satisfazem as condições de n pertencem ao intervalo
a) [57, 60] b)]58, 116] c) [60, 180[d)]57, 178]

26) (UFMG-2005) No sítio de Paulo, a colheita de laranjas ficou entre 500 e 1500 unidades. Se essas laranjas fossem colocadas em sacos com 50 unidades cada um, sobrariam 12 laranjas e, se fossem colocadas em sacos com 36 unidades cada um, também sobrariam 12 laranjas. Assim sendo, quantas laranjas sobrariam se elas fossem colocadas em sacos com 35 unidades cada um?
a) 4 b) 6 c) 7 d) 2

27) (Colégio Naval-90) Se o m.d.c (a; b; c) = 100 e o m.m.c (a; b; c) = 600, podemos afirmar que o número de conjuntos de três elementos distintos a, b e c é:
a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) 10

28) (Colégio Naval-2001) Dois sinais luminosos fecham juntos num determinado instante. Um deles permanece 10 segundos fechado e 50 segundos aberto, enquanto o outro permanece 10 segundos fechado e 40 segundos aberto. O número mínimo de segundos necessários, a partir daquele instante, para que os dois sinais voltem a fechar juntos outra vez é de:
a) 110 b) 120 c) 150 d) 200 e) 300

29) (Colégio Naval-2002) O mínimo múltiplo comum entre dois números naturais a e b é 360 e ab = 3600. Qual o menor valor que a + b pode assumir?
a) 120 b) 130 c) 150 d) 200 e) 370

30) (Colégio Naval-2004) Se $mmc(x, y) = 2^3 3^3 5^2 7$ e $mdc(x, y) = 2^3 3^2 5$, x e y números naturais, quantos são os valores possíveis para x?
a) 16 b) 8 c) 6 d) 4 e) 2

Questões de Olimpíadas – Nível Intermediário

31) (Mathematical Excalibur) Determine todos os pares ordenados de inteiros positivos (a, b) tais que mdc (a, b) + mmc (a, b) = a + b + 6.

32) (Rio Grande do Norte-95) Os inteiros de 1 a 1.000 são escritos ordenadamente em torno de um círculo. Partindo de 1, cada décimo quinto número é riscado (isto é, são riscados 1, 16, 31, ...). O processo continua até se atingir um número já previamente riscado. Quantos números sobrarão sem riscos?
a) 800 b) 934 c) 933 d) 862 e) Nda

33) (Rio Grande do Norte-2000) Quatro amigos subiram correndo uma escada. Um deles sobe de dois em dois degraus, outro sobe de três em três degraus, outro sobe de quatro em quatro e outro de cinco em cinco. Os únicos degraus que os quatro amigos pisaram foram o primeiro e o último. Quantos degraus foram pisados exatamente uma única vez?

34) (Campina Grande-2000) Certo jogo de cartas foi planejado para ter de 2 a 5 participantes. Todas as cartas devem ser distribuídas aos jogadores e todos devem receber a mesma quantidade de cartas. Qual é o número mínimo de cartas que esse jogo pode ter?
a) 20 b) 30 c) 40 d) 120 e) 60

35) (Goiás-92) Duas professoras, A e B, vão e voltam juntas do trabalho, a cada dia no carro de uma delas. As distâncias das casas de A e B até o trabalho são, respectivamente, 13 km e 16 km enquanto que a distância entre as casas é de 5km. Supondo que cada dia uma professora vá até a casa da outra e daí até o trabalho, voltando pelo mesmo trajeto, responda:
a) Qual é o menor número de vezes que as professoras deverão ir ao trabalho para que cada uma percorra, no seu carro, a mesma distância que a outra?
b) Quantas vezes cada professora irá no seu próprio carro?

36) (Ceará-99) Achar todos os conjuntos de quatro inteiros consecutivos tais que o maior desses inteiros divida o mmc dos outros três.

37) (Espírito Santo-99) Qual é o menor número natural que é múltiplo de 7 e que quando dividido por 2, 3, 4, 5 e 6 deixa resto 1?

38) (Espírito Santo-2002) Quatro cometas passam pela terra de tempos em tempos. O primeiro passa de 2 em 2 anos. O segundo de 7 em 7 anos. O terceiro de 11 em 11 anos e o quarto de 13 em 13 anos. Se os quatro passaram juntos na terra no ano 2000, em que ano eles novamente passarão juntos na terra, pela primeira vez?

39) (Pará-2003) Os torcedores do clube A.B.C. celebram, desde 1902 e de 5 em 5 anos, uma festa em honra do seu clube. Por sua vez, os torcedores do clube rival C.B.A. celebram, desde 1903 e de 7 em 7 anos, uma festa em honra do seu clube. Quais os anos em que ambos os clubes foram festejados até hoje?

40) (OBM-94) Considere todos os números maiores que 8, tais que quando divididos por 2, por 3, por 4, por 5, por 6, por 7 e por 8 deixam sempre resto 1. A soma dos dois menores desses números é:
a) 842 b) 2522 c) 3362 d) 912 e) 2532

41) (OBM-2000) O emir Abdel Azir ficou famoso por vários motivos. Ele teve mais de 39 filhos, incluindo muitos gêmeos. De fato, o historiador Ahmed Aab afirma num dos seus escritos que todos os filhos do emir eram gêmeos duplos, exceto 39; todos eram gêmeos triplos, exceto 39; todos eram gêmeos quádruplos, exceto 39. O numero de filhos do emir é:
a) 111 b) 48 c) 51 d) 78 e) 75

42) (OBM-2000) Escrevem-se, em ordem crescente, os números inteiros e positivos que sejam múltiplos de 7 ou de 8 (ou de ambos), obtendo-se 7, 8, 14, ... O 100º número escrito é:
a) 406 b) 376 c) 392 d) 384 e) 400

43) (OBM-2003) Seja N o menor inteiro positivo que pode ser escrito como a soma de 9, 10 e 11 inteiros positivos consecutivos. A soma dos algarismos de N é igual a:
a) 9 b) 18 c) 22 d) 27 e) 30

44) (Argentina-2001) Achar o menor número natural que satisfaz as seguintes três condições simultaneamente: tem resto 24 na divisão por 57; tem resto 73 na divisão por 106 e tem resto 126 na divisão por 159.

45) (Uruguai-2001) O mdc de a e b é d e o mmc de a e b é m. Demonstrar que se $3a + b = 3m + d$, então $a = b$.

46) (Furman University-97) Determine o produto entre o mdc e o mmc de {12, 24, 72, 120, 288}
a) 8640 b) 17280 c) 34560 d) 11520 e) nda

47) (Novo Mexico-95) a) Determine todos os pares de inteiros positivos que possuem mdc igual a 95 e mmc igual a 1995.
b) Determine todos os ternos de inteiros positivos que possuem mdc igual a 95 e mmc igual a 1995.

48) (Portugal-95) Os cantores Luciano Pavão, Ácido Domingos e José Camionetes são muito supersticiosos: Luciano Pavão só dá concertos de 10 em 10 dias. Ácido Domingos só dá concertos de 6 em 6 dias, enquanto que José Camionetes só dá concertos de 11 em 11 dias. Sabendo que no dia 29 de Fevereiro de 1996 os três darão um concerto, em quantos concertos poderão os três cantar em conjunto no período de quatro anos que se segue? Em que datas se poderão realizar tais concertos?

49) (Portugal-2002) O Antônio e a Catarina começaram a trabalhar no mesmo dia. O horário do Antônio consiste em 3 dias de trabalho e depois um dia de descanso, enquanto que a Catarina trabalha 7 dias seguidos e descansa nos três dias seguintes. Quantos dias de descanso tiveram em comum nos primeiros 1000 dias?

50) (Portugal-2002) Luke Skywalker e Han Solo defrontam-se numa corrida com as suas naves espaciais mais potentes. Luke dá cada volta na pista em 45 segundos e Han em 48 segundos. As naves espaciais de Luke e Han só se cruzam no momento em que Luke Skywalker termina a corrida. Quantas voltas têm a corrida?

51) (Bélgica-90) Seja n o número de inteiros (≥ 0) menores ou iguais a 10.000, que são divisíveis por todos os inteiros positivos menores ou iguais a 10. Então:

a) $n = 0$ b) $1 \leq n \leq 5$ c) $5 \leq n \leq 10$

d) $10 \leq n \leq 15$ e) $15 \leq n$

Questões de Olimpíadas – Nível Avançado

52) (OBM-99) Um professor de matemática passou aos seus alunos a adição $\frac{A}{B}+\frac{C}{D}$ onde A, B, C e D são inteiros positivos, as frações estão simplificadas ao máximo e os denominadores são números primos entre si. Os alunos adicionaram as frações tirando o mínimo múltiplo comum dos denominadores das parcelas e escrevendo este como o denominador do resultado. Mostre que a fração que os alunos encontraram como resultado está simplificada.

53) (Argentina-2000) Dos números naturais A e B sabe-se que $B = (A^2 - 1)/8$ e que o mínimo múltiplo comum entre A e B é igual a 3720. Determinar A e B.

54) (Argentina-2000) Determinar a quantidade de pares de números naturais (a, b) que verificam simultaneamente as seguintes duas condições: o máximo divisor comum entre a e b é igual ao produto dos 5 primeiros números naturais; o mínimo múltiplo comum entre a e b é igual ao produto dos 15 primeiros números naturais. Ou seja, mdc (a, b) = 1.2.3.4.5 e mmc (a, b) = 1.2.3.4.5.6.7.8.9.10.11.12.13.14.15.

55) (Aime-87) Quantos termos ordenados (a, b, c) existem de modo que mmc (a, b) = 1000, mmc (b, c) = 2000 e mmc (c, a) = 2000?

56) (Canadá-97) Quantos pares de inteiros positivos x, y existem, com $x \leq y$, e tais que mdc (x, y) = 5! e mmc (x, y) = 50!

57) (USAMO-72) Os símbolos (a, b, ..., g) e [a, b, ..., g] significam o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum, respectivamente, dos inteiros positivos a, b, ..., g. Prove que:

$$\frac{[a,b,c]^2}{[a,b][a,c][b,c]} = \frac{(a,b,c)^2}{(a,b)(a,c)(b,c)}$$

58) (Catalunha) Caracterize todos os inteiros positivos a e b tais que a + b + mdc (a, b) ≤ mmc (a, b), e determine quando vale a igualdade.

59) (Hungria-98) Para quais inteiros positivos n existem os inteiros positivos x, y tais que mmc (x, y) = n! e mdc (x, y) = 1998?

60) (Índia-98) Determine o menor valor possível do mmc de vinte (não necessariamente distintos) números naturais cuja soma é 801.

61) (Austrália-91) Seja M_n o mínimo múltiplo comum dos números 1, 2, 3, ..., n; isto é, $M_1 = 1$, $M_2 = 2$, $M_3 = 6$, $M_4 = 12$, $M_5 = 60$, $M_6 = 60$. Para quais inteiros positivos $M_{n-1} = M_n$ é válido?

62) (Austrália-2001) Seja L(n) o menor inteiro positivo divisível por 2, 3, ... e n. Determine todos os números primos p e q tais que q = p + 2 e $L(q) > q.L(p)$.

DIVISORES

8.1. TEOREMA: Se $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$ é a decomposição canônica do inteiro positivo $n > 1$, então os divisores positivos de n são os inteiros d da forma: $d = p_1^{h_1} p_2^{h_2} ... p_r^{h_r}$ onde $0 \le h_i \le k_i$ $(i = 1, 2, ..., r)$.

Demonstração:

Pode-se observar que $d \in \mathbb{N}$ divide $p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$ se, e somente se, d divide $p_1^{k_1}$ e d divide $p_2^{k_2}$ e ... e d divide $p_r^{k_r}$. Logo, conclui-se que $d = p_1^{h_1} p_2^{h_2} ... p_r^{h_r}$, com $0 \le h_i \le k_i$ $(i = 1, 2, ..., r)$.

Exemplos:

1) O número de cubos perfeitos positivos que dividem 9^9 é:

Solução:

Evidentemente $9^9 = 3^{18}$. Desta forma, os divisores 3^{18} que são cubos perfeitos são da forma 3^x, onde $3 \mid x$, $0 \le x \le 18$. Ou seja, são os números 3^0, 3^3, 3^6, 3^9, 3^{12}, 3^{15} e 3^{18}. Portanto são 7 números.

2) (Bay Area Olympiad-1999) Prove que entre 12 inteiros consecutivos existe ao menos um que é menor que a soma dos seus divisores próprios (os divisores próprios de um inteiro positivo n são os inteiros positivos diferentes de 1 e n que dividem n).

Solução:

Sabemos que entre 12 números inteiros consecutivos existe um múltiplo de 12, isto é, $a = 12n$. Entre os divisores próprios de a estão os inteiros $2n$, $3n$, $4n$, $6n$. A soma destes divisores próprios é igual a $15n$, que é maior que a.

8.2. NÚMERO DE DIVISORES POSITIVOS

Seja n um inteiro positivo. O número de divisores positivos de n (inclusive 1 e n) indica-se por $d(n)$. Se $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$ é a decomposição canônica do inteiro positivo $n > 1$, então:

$$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)...(k_r + 1)$$

Demonstração:

Sabemos que se $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_r^{k_r}$ é a decomposição canônica do inteiro positivo $n > 1$, então os divisores positivos de n são da forma: $p_1^{h_1} p_2^{h_2} ... p_r^{h_r}$, onde $0 \le h_i \le k_i$ $(i = 1, 2, ..., r)$. Assim, para h_1 temos $k_1 + 1$ possibilidades, para h_2 temos $k_2 + 1$ possibilidades, ..., para h_r temos $k_r + 1$ possibilidades. Como para cada escolha dos valores de $h_1, h_2, ..., h_r$ temos um divisor positivo diferente, então o número de divisores positivos de n é $d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1)...(k_r + 1)$

Exemplos:

1) (UFPE-2004) O número $N = 6^3.10^4.15^x$, sendo x um inteiro positivo, admite 240 divisores inteiros e positivos. Indique x.

Solução:

Observe que: $N = 6^3.10^4.15^x = (2^3.3^3)(2^4.5^4)(3^x.5^x) = 2^7.3^{3+x}.5^{4+x}$.

Logo: $d(N) = 240 \Rightarrow (8)(4 + x)(5 + x) = 240 \Rightarrow x^2 + 9x + 20 = 30 \Rightarrow x^2 + 9x - 10 = 0 \Rightarrow$
$(x + 10)(x - 1) = 0 \Rightarrow x = 1$.

2) (UFU-2004) Sabendo-se que $302400 = 64 \times 27 \times 25 \times 7$, pode-se concluir que o número de divisores positivos de 302400, que são múltiplos de 6, é igual a:

a) 36. b) 18. c) 168. d) 108.

Solução:

Fatorando obtemos $302400 = 2^6.3^3.5^2.7$. Os divisores de 302400 são da forma $2^a.3^b.5^c.7^d$. Destes, os múltiplos de 6 ocorrem quando $1 \le a \le 6$ (6 possibilidades), $1 \le b \le 3$ (3 possibilidades), $0 \le c \le 2$ (3 possibilidades), $0 \le d \le 1$ (2 possibilidades). Assim, existem 6.3.3.2 = 108 divisores positivos de 302400 que são divisíveis por 6.

3) (UFMG-99) Sabe-se que o número $2^{13} - 1$ é primo. Seja $n = 2^{17} - 16$. No conjunto dos números naturais, o número de divisores de **n** é

a) 5 b) 8 c) 6 d) 10

Solução:

Inicialmente observe que: $n = 2^{17} - 16 = 2^{17} - 2^4 = 2^4(2^{13} - 1) = 2^4.p$, onde p é um primo.

Assim, $d(n) = (4 + 1)(1 + 1) = 10$.

4) (OBM-99) Quantos são os possíveis valores inteiros de x para que $\frac{x+99}{x+19}$ seja um número inteiro?

a) 5 b) 10 c) 20 d) 30 e) 40

Solução:

Note inicialmente que $\frac{x+99}{x+19} = 1 + \frac{80}{x+19}$. Como 1 é inteiro, para que $\frac{x+99}{x+19}$ seja inteiro basta que $\frac{80}{x+19}$ seja também um número inteiro. Para que $\frac{80}{x+19}$ seja inteiro, temos que $x + 19$ é um divisor de 80. Fatorando: $80 = 2^4.5 \Rightarrow d(80) = (4 + 1)(1 + 1) \Rightarrow d(80) = 10$.

Como estamos interessados em todos os divisores de 80 (positivos e negativos), temos que 80 tem 20 divisores inteiros, implicando que existem 20 valores de x que satisfazem o enunciado.

5) Determinar o inteiro $n = 2^x.3^y$, sabendo que n/6 e n/9 têm, respectivamente, 8 divisores positivos e 10 divisores positivos a menos que n.

Solução:

Como $n = 2^x.3^y$ temos que $d(n) = (x + 1)(y + 1)$

i) $n/6 = 2^{x-1}.3^{y-1} \Rightarrow d(n/6) + 8 = x.y + 8 = (x + 1)(y + 1)$

iii) $n/9 = 2^x.3^{y-2} \Rightarrow d(n/9) + 10 = (x + 1)(y - 1) + 10 = (x + 1)(y + 1)$

Assim: $xy + 8 = xy - x + y - 1 + 10 \Rightarrow x = y + 1$

Logo: $(y + 1)y + 8 = (y + 2)(y + 1) \Rightarrow y^2 + y + 8 = y^2 + 3y + 2 \Rightarrow y = 3$ e $x = 4$

Assim $n = 2^4.3^3 \Rightarrow n = 432$

6) Calcular o menor inteiro positivo n que tem 10 divisores positivos.

Solução:

Como $10 = 10.1 = 5.2$, então temos duas alternativas:

$d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) = 10.1$ ou $d(n) = (k_1 + 1)(k_2 + 1) = 5.2$

Assim os expoentes, k_1 e k_2 dos fatores primos de n são 9 e 0, ou 4 e 1, e deve-se associá-los aos menores fatores primos, para produzir os menores valores inteiros possíveis.

Como $2^4.3$ é menor que 2^9, o menor inteiro positivo com 10 divisores positivos é de $2^4.3 = 48$.

7) (OBM-95) Quantos inteiros positivos dividem ao menos um dos números 10^{40} ou 20^{30}?

Solução:

Um número que divida 10^{40} ou 20^{30} deve dividir o mmc entre estes dois números. Como $10^{40} = 2^{40}5^{40}$ e $20^{30} = 2^{60}5^{30}$, temos que mmc $(10^{40}, 20^{30}) = 2^{60}5^{40}$.

Portanto, existem 61.41 = 2501 inteiros positivos que dividem ao menos um dos números 10^{40} ou 20^{30}.

8) (OBM-95) Quantos são os números inteiros que terminam com 1995 e que são múltiplos do número que se obtém quando estes últimos algarismos são eliminados?

a) 0 b) 2 c) 4 d) 8 e) 16

Solução:
Considere o número N = [x1995], onde x representa os primeiros dígitos de N.
Assim: $N = x.10^4 + 1995$. Como $x \mid N$ e $1995 = N - x.10^4$ então $x \mid 1995$.
Desde que $1995 = 3.5.7.19$ então temos 16 divisores positivos de 1995, que são todos os valores que podem assumidos por x. Portanto, os 16 inteiros N que satisfazem o enunciado são:
11995, 31995, 51995, 71995, 191995, 151995, 211995, 571995, 351995, 951995, 1331995, 1051995, 2851995, 66514995, 3991995, 19951995.

9) A fração $\frac{1}{6}$ pode ser representado de diferentes maneiras:

$\frac{1}{6}=\frac{1}{2}-\frac{1}{3}$; $\frac{1}{6}=\frac{1}{3}-\frac{1}{6}$; $\frac{1}{6}=\frac{1}{4}-\frac{1}{12}$; $\frac{1}{6}=\frac{1}{5}-\frac{1}{30}$.

De quantas maneiras a fração $\frac{1}{2175}$ pode ser expressa na forma $\frac{1}{2175}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$, onde x e y são inteiros positivos?
Solução:

Notemos que $\frac{1}{2175}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y} \Rightarrow x=\frac{2175y}{y+2175} \Rightarrow x=2175-\frac{2175^2}{y+2175}$.

Assim x vai ser inteiro se e somente se $y + 2175$ é um fator de 2175^2.
Notemos que se $x > 0$: $2175^2/(y + 2175) < 2175 \Rightarrow y > 2175$ e, analogamente, se $y > 0 \Rightarrow x > 2175$.
Assim, estamos interessados nos fatores de 2175^2 que excedem 2175.
Sabemos que $2175^2 = 3^2.5^4.29^2$. Assim o número de divisores positivos de 2175^2 é:
$t(2175^2) = (2 + 1)(4 + 1)(2 + 1) = 45$.
Destes 45 divisores positivos de 2175^2, um deles é sua raiz quadrada, 2175.
Com exceção de 2175, os outros 44 divisores positivos de 2175^2 podem ser agrupados aos pares cujo produto é 2175^2. Portanto concluímos que exatamente metade destes divisores excedem 2175, dando 22 soluções nos inteiros positivos (x, y). A menor solução é $x = 300$ e $y = 348$.
É possível generalizar o problema para um n qualquer, ou seja, determinar o número de soluções inteiras positivas (x, y) para a equação $\frac{1}{n}=\frac{1}{x}-\frac{1}{y}$. Sendo $d(n^2)$ o número de divisores positivos de n^2, então existem $(d(n^2) - 1)/2$ soluções inteiras positivas.

10) (Olimpíada do Pará-2002) Seja d(n) o número de divisores positivos de n. Por exemplo, como os divisores positivos de 12 são 1, 2, 3, 4, 6 e 12, então d(12) = 6.
a) Determine todos os inteiros positivos n tais que d(n) é ímpar.
b) Determine se $d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(2002)$ é par ou ímpar.
c) Caracterize todos os inteiros positivos n tais que $d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(n)$ é par.
Solução:

a) Sabemos que se n é dado na forma canônica $n = p_1^{a_1}p_2^{a_2}...p_r^{a_r}$ então $d(n) = (a_1 + 1)(a_2 + 1)...(a_r + 1)$.
Para que d(n) seja ímpar então cada termo $a_i + 1$ deve ser ímpar, implicando que a_i é sempre par.
Como os expoentes de cada p_i na fatoração de n é par, então uma condição necessária e suficiente para que d(n) seja ímpar é que n seja um quadrado perfeito.
b) Se n não é um quadrado perfeito então d(n) é par. Como $44^2 < 2002 < 45^2$, então entre 1 e 2002 existem 44 quadrados perfeitos. Assim, a expressão $d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(2002)$ é composto de 44 termos ímpares e 1948 termos pares. Como existe uma quantidade par de termos ímpares, então $d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(2002)$ é par.
c) Pelo raciocínio do item anterior, $d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(n)$ vai ser par quando existir um número par de termos d(k) ímpares, ou seja, quando existir entre 1 e n uma quantidade par de quadrados perfeitos. Em outras palavras, $d(1) + d(2) + d(3) + ... + d(n)$ vai ser par quando a parte inteira do número $\sqrt{n}$ for par.

8.3. SOMA DOS DIVISORES POSITIVOS

8.3.1. Teorema: Se $n = p^k$, onde p é um primo e $k \geq 1$, então a soma s(n) dos divisores é

$$s(n) = 1 + p + p^2 + ... + p^k = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}.$$

Demonstração:
Se $n = p^k$, onde p é um primo e $k \geq 1$, então os divisores positivos de n são 1, p, p^2, ..., p^k. Assim, $s(n) = 1 + p + p^2 + ... + p^k$. Como 1, p, p^2, ..., p^k formam uma progressão aritmética de razão p, então também podemos representar a soma dos divisores positivos de n por $s(n) = \frac{p^{k+1} - 1}{p - 1}$.

8.3.2. Teorema: Se $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}$, onde p_1 e p_2 são primos e $k_1, k_2 \geq 1$, então:

$$s(n) = s(p_1^{k_1})s(p_1^{k_2}) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1}\frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1}.$$

Demonstração:
Se $n = p_1^{k_1}.p_2^{k_2}$, então os divisores positivos de n são da forma $n = p_1^{h_1}.p_2^{h_2}$, onde $0 \leq h_1 \leq k_1$ e $0 \leq h_2 \leq k_2$. Assim: $s(n) = 1 + p_1 + p_2 + p_1p_2 + p_1^2 + p_2^2 + p_1^2p_2 + p_1p_2^2 + p_1^3 + p_2^3 ... + p_1^{k_1}p_2^{k_2}$
Fatorando esta expressão encontramos que:
$s(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + p_1^3 + ... + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + p_2^3 + ... + p_2^{k_2})$
Portanto: $s(n) = s(p_1^{k_1})s(p_1^{k_2}) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1}\frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1}$.

8.3.3. Teorema: Seja n um inteiro positivo. Por s(n) indica-se a soma dos divisores positivos de n (inclusive 1 e n). Se $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}$ é a decomposição canônica do inteiro $n > 1$, então:

$$s(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1}.\frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1}...\frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$$

Demonstração:
O raciocínio utilizado no item anterior, onde n possuía somente dois fatores primos, pode ser usado para demonstrar a expressão geral do número de divisores positivos.
Assim:
$s(n) = \sum p_1^{h_1}p_2^{h_2}...p_r^{h_r}$ onde $0 \leq h_i \leq k_i$, para $0 \leq i \leq r \Rightarrow$
$s(n) = (1 + p_1 + ... + p_1^{k_1})(1 + p_2 + ... + p_2^{k_2})(1 + p_r + ... + p_r^{k_r}) \Rightarrow$
$s(n) = s(p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}) = s(p_1^{k_1})s(p_2^{k_2})..s(p_r^{k_r}) \Rightarrow s(n) = \frac{p_1^{k_1+1} - 1}{p_1 - 1}.\frac{p_2^{k_2+1} - 1}{p_2 - 1}...\frac{p_r^{k_r+1} - 1}{p_r - 1}$
Da expressão acima podemos concluir que se **mdc** $(a, b) = 1$, então $s(a.b) = s(a).s(b)$.

Exemplos:

1) Calcule a soma dos divisores positivos do inteiro $n = 180 = 2^2.3^2.5$.
Solução:

$$s(180) = \frac{2^3 - 1}{2 - 1}.\frac{3^3 - 1}{3 - 1}.\frac{5^2 - 1}{5 - 1} = 7.13.6 = 546$$

Analisando, vemos que os divisores positivos de 180 são:
1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12, 15, 18, 20, 30, 36, 45, 60, 90, 180 e, realmente, a soma destes divisores é 546.

2) Determine todos os números naturais cuja soma dos divisores positivos é um número ímpar.
Solução:
Suponhamos que n é um número natural tal que s(n) seja ímpar.
Seja $n = 2^{\alpha}k$, onde k é um número ímpar e α é um número não negativo.
Assim $s(n) = (2^{\alpha+1} - 1)s(k)$ e conseqüentemente s(k) deve ser um número ímpar.
Como k é um número ímpar então cada divisor de k é ímpar, e para que a sua soma seja ímpar o seu número de divisores d(k) também deve ser ímpar.
Como $d(k) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1)$, para que este valor seja ímpar então cada α_i deve ser par
Assim k deve ser o quadrado de um número natural, $k = m^2 \Rightarrow k = 2^{\alpha}m^2$
Se α é par, $\alpha = 2\beta \Rightarrow n = (2^{\beta}m)^2$
Se α é ímpar, $\alpha = 2\beta + 1 \Rightarrow n = 2(2^{\beta}m)^2$
Deste modo, para que a soma dos divisores positivos de n seja ímpar, então n deve ser o quadrado de um número natural ou duas vezes o quadrado de um número natural.

3) Seja n o produto de k distintos primos ímpares. Prove que a soma dos divisores de n é divisível por 2^k.
Solução:

$$\text{Se } n = p_1p_2...p_k \Rightarrow s(n) = \frac{p_1^2 - 1}{p_1 - 1}.\frac{p_2^2 - 1}{p_2 - 1}...\frac{p_k^2 - 1}{p_k - 1} \Rightarrow s(n) = (p_1 + 1)(p_2 + 1)...(p_k + 1)$$

Como cada termo $p_i + 1$ é par, então temos que $2^k \mid s(n)$.

4) (Olimpíada da Catalunha) Um número natural possui 2 fatores primos e 8 divisores positivos. Calcule este número sabendo que a soma dos seus divisores é 320.
Solução:
$n = p^aq^b \Rightarrow d(n) = (a + 1)(b + 1) = 8$.
Sendo $a \geq 1$ e $b \geq 1$ a única possibilidade (a menos da ordem) é $a = 1$ e $b = 3 \Rightarrow n = p.q^3$
$s(n) = (p + 1)(q^3 + q^2 + q + 1) = (p + 1)(q^2 + 1)(q + 1) = 2^6.5$
Testando valores primos para p e q temos $p = 7$ e $q = 3 \Rightarrow n = 7.3^3 = 189$.

5) (Olimpíada Putnam-76) Seja $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores positivos de n, incluindo 1 e n. Mostre que se $\sigma(n) = 2n + 1$, então n é o quadrado de inteiro ímpar.
Solução:
Seja $n = 2^{a1}.3^{a2}.5^{a3}...p_r^{ar}$, onde $a_i \geq 0$, ou seja, se $a_i = 0$ então o primo p_i não pertence à fatoração de n.
Sabemos que $\sigma(n) = (1 + 2 + 2^2 + ... + 2^{a1})(1 + 3 + 3^2 + ... + 3^{a2})(1 + 5 + ... + 5^{a3})...(1 + p_i + ... + p_i^{ai})$
Analisando somente os termos com primos ímpares, notamos que para $\sigma(n)$ ser ímpar temos que a quantidade de termos ímpares no somatório tem que ser ímpar. Como esta quantidade é igual a $a_i + 1$ (note que começamos a contar de 1, ou seja, p_i^0), assim temos que os expoentes a_i dos primos ímpares são pares (inclusive podendo valer 0).
Notemos que n não pode ser uma potência de 2, uma vez que se $n = 2^k \Rightarrow \sigma(n) = 2^{k+1} - 1 = 2n - 1$.
Assim temos que certamente existem primos ímpares na fatoração de n.
Sendo $n = 2^{a1}.3^{a2}.5^{a3}...p_r^{ar}$, temos que $\sigma(n) = (2^{a1+1} - 1)m^2$, onde m é ímpar.
Suponhamos que n seja divisível por 2, ou seja, que $a_1 \geq 1$.
Desde que $m^2 = 4y + 1$, $2^{a1+1} - 1 = 4x - 1$ e $(4x - 1)(4y + 1) = 4k - 1$, então o termo $2^{a1+1} - 1$ faria com que o produto total fosse da forma $4k - 1$ (ou $4k' + 3$).
Para que $2n + 1$ seja da forma $4k' + 3$ temos que n tem que ser ímpar, que é um absurdo, pois supomos que n é par.
Assim n não possui 2 como fator e todos os fatores primos ímpares possuem expoentes pares, implicando que n é o quadrado de um inteiro ímpar.

8.4. PRODUTO DOS DIVISORES

O produto P(n) dos divisores positivos de um inteiro positivo $n > 1$ é igual a $P(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$.

Demonstração:
Sabe-se que se d é divisor de n, então d/n também é divisor de n. Deste modo, se $d_1, d_2, \ldots d_{d(n)}$ são os divisores positivos de n, podemos escrever seu produto de duas maneiras:

$P(n) = d_1.d_2...d_{d(n)}$ e $P(n) = \frac{n}{d_1}\frac{n}{d_2}...\frac{n}{d_{d(n)}}$

Multiplicando estas expressões: $[P(n)]^2 = \underbrace{n.n.n...n.n}_{d(n)\text{ vezes}} = n^{d(n)} \Rightarrow P(n) = n^{\frac{d(n)}{2}}$

Obs: O produto de todos os divisores inteiros (contando os negativos) de um inteiro n é igual a $\pm n^{d(n)}$. Para verificar isto basta observar que para cada divisor positivo d existe um divisor negativo – d. Portanto, se d(n) é par, o produto de todos os divisores inteiros de n é igual a $+ n^{d(n)}$, enquanto que se n é negativo é igual a $- n^{d(n)}$.

Exemplos:

1) Determinar o produto dos divisores positivos do inteiro n = 16.
Solução:
$P(16) = 16^{d(16)/2} = 16^{5/2} = 4^5 = 1024$. Conferindo, vemos que os divisores de 16 são 1, 2, 4, 8 e 16, e, realmente, o produto destes 5 divisores é igual a 1024.

2) Determine todos os números naturais n tais que n é igual ao produto de todos os divisores positivos de n, excetuando n.
Solução:
Seja P_n o produto dos divisores positivos de n: $P_n/n = n \Rightarrow P_n = n^2$
Como $P_n = n^{d(n)/2} \Rightarrow n^2 = n^{d(n)/2} \Rightarrow d(n) = 4$
Então para que n seja igual ao produto de todos os divisores positivos de n, excetuando n, basta que o número de divisores positivos de n seja igual a 4 $\Rightarrow d(n) = (\alpha_1 + 1)(\alpha_2 + 1)...(\alpha_n + 1) = 4$
Podemos ter duas respostas: $\alpha_1 = 3$ ou $\alpha_1 = 1$ e $\alpha_2 = 1$
Ou seja, para que n seja igual ao produto de todos os divisores positivos de n, excetuando n, basta que n seja um cubo de um número primo ou seja o produto de dois números primos.
Deste modo, os primeiros 9 números com esta propriedade são: 6, 8, 10, 14, 15, 21, 22, 26, 27.

3) Determinar o inteiro n cujo produto de todos os seus divisores positivos é igual a $3^{30} \times 5^{40}$.
Solução:
Claramente n é da forma $n = 3^a.5^b \Rightarrow d(n) = (a + 1)(b + 1)$.
Assim: $P(n) = 3^{30}.5^{40} \Rightarrow (3^a.5^b)^{(a+1)(b+1)/2} = 3^{30}.5^{40} \Rightarrow 3^{a(a+1)(b+1)/2}.5^{b(a+1)(b+1)/2} = 3^{30}.5^{40} \Rightarrow$
$a(a + 1)(b + 1) = 60$ e $b(a + 1)(b + 1) = 80$.

Dividindo estas duas expressões obtemos: $\frac{a}{b} = \frac{3}{4}$.

Assim: $a(a + 1)(b + 1) = 60 \Rightarrow a(a+1)\left(\frac{4a}{3}+1\right) = 60 \Rightarrow a(a + 1)(4a + 3) = 180 \Rightarrow$

$4a^3 + 7a^2 + 3a - 180 = 0 \Rightarrow (a - 3)(4a^2 + 19a + 60) = 0 \Rightarrow a = 3$ (única raiz inteira).
Assim, temos b = 4, implicando que $n = 3^3.5^4 = 6075$.

8.5. NÚMEROS PERFEITOS

Um inteiro positivo n diz-se perfeito se e somente se é igual à soma de todos os seus divisores positivos, exceto o divisor trivial n. A soma de todos os divisores positivos de n, com exceção do divisor n, é igual a $s(n) - n$ e, portanto, n é um número perfeito se e somente se a seguinte condição se verifica:

$$\mathbf{n = s(n) - n \quad ou \quad s(n) = 2n.}$$

Isto é, um inteiro positivo n é um número perfeito se e somente se a soma de todos os seus divisores positivos é igual ao seu dobro (2n). Assim, por exemplo, para $n = 6$ e $n = 28$, temos:
$s(6) = 1 = 2 + 3 + 6 = 12 = 2.6$ e $s(28) = 1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56 = 2.28$
de modo que os inteiros positivos 6 e 28 são ambos números perfeitos.

8.5.1. Teorema (de Euclides): Se $2^k - 1$ é primo ($k > 1$), então o inteiro positivo $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ é um número perfeito.

Demonstração:
Seja $2^k - 1 = p$ ($k > 1$) um primo. Consideremos o inteiro positivo $n = 2^{k-1}p$.
Como o mdc $(2^{k-1}, p) = 1$ então $s(n) = s(2^{k-1}p) = s(2^{k-1}).s(p) = (2^k - 1)(p + 1) = (2^k - 1)2^k = 2n$.
Logo, por definição, n é um número perfeito.

8.5.2. Teorema 6.6 (de Euler): Se n é um número perfeito par, então $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ onde $2^k - 1$ é primo.

Demonstração:
Suponhamos que n é um número perfeito par. Então, n pode escrever-se da forma: $n = 2^{k-1}m$, onde m é um inteiro ímpar e $k \geq 2$. Como mdc $(2^{k-1}, m) = 1$ então $s(n) = s(2^{k-1}m) = s(2^{k-1})s(m) = (2^k - 1)s(m)$
Por outro lado, como n é um número perfeito, temos: $s(n) = 2n = 2^k m$
Portanto: $2^k m = (2^k - 1)s(m)$ de modo que $(2^k - 1) \mid 2^k m$
Mas, o mdc $(2^k - 1, 2^k) = 1$, o que implica que: $(2^k - 1) \mid m$, isto é: $m = (2^k - 1)M$
Como m e M são ambos divisores positivos de m (com $M < m$), temos: $2^k M = s(m) \geq m + M = 2^k M$ o que implica que: $s(m) = m + M$
Assim sendo, m e M são os únicos divisores positivos de m, e isto significa que m é primo e $M = 1$. Então: $m = (2^k - 1)M = 2^k - 1$ é um primo, e por ser $n = 2^{k-1}m = 2^{k-1}(2^k - 1)$ o teorema de Euler fica demonstrado.

Exemplos:

1) (UFMS-2001) *"O que se sabe com certeza é que Pitágoras estabeleceu um sistema que mudou o rumo da matemática. A Irmandade era realmente uma comunidade religiosa e um de seus ídolos era o Número. Eles acreditavam que se entendessem as relações entre os números poderiam descobrir os segredos espirituais do universo, tornando-se, assim próximos dos deuses. Em especial, a Irmandade voltou sua atenção para os números inteiros (1,2,3 ..) e as frações. Os números inteiros e as frações (proporções entre números inteiros) são conhecidos, tecnicamente, como números racionais. E entre a infinidade de números, a Irmandade buscava alguns com significado especial, e entre os mais importantes estavam os chamados números " perfeitos".*
(O Último Teorema de Fermat – Simon Singh – Tradução Jorge Luiz Calife – Editora Record – Rio de Janeiro – 3ª edição 1997 – Página 32)
Os ***números perfeitos*** referidos no texto são números naturais iguais à metade da soma dos seus divisores positivos. Por exemplo, *28* é um número perfeito pois a soma dos seus divisores positivos é $1 + 2 + 4 + 7 + 14 + 28 = 56$ e $28 = 56/2$.
Com base no conceito de número perfeito, dado acima, e nas propriedades dos números inteiros, é correto afirmar que:
(01) *6* é um número perfeito.
(02) todo número primo é perfeito.
(04) *23* é um número perfeito.
(08) *10* não é um número perfeito.

(16) se p é um número inteiro, $p \geq 1$, então a soma dos divisores positivos de 2^p é $2^{p+1} - 1$.

Solução:

(01) VERDADEIRO. A soma dos divisores positivos de 6 é $1 + 2 + 3 + 6 = 12 = 2.6$.

(02) FALSO. A soma dos divisores positivos de um número primo p é igual a $p + 1 \neq 2p$.

(04) FALSO. A soma dos divisores positivos de 23 é igual a $1 + 23 = 24 \neq 46$.

(08) VERDADEIRO. A soma dos divisores positivos de 10 é $1 + 2 + 5 + 10 = 18 \neq 20$.

(16) VERDADEIRO. $s(2^p) = 1 + 2 + 2^2 + ... + 2^p = 2^{p+1} - 1$.

2) Mostrar que, se $\underline{n}$ é número perfeito par, então $8n + 1$ é um quadrado perfeito.

Solução:

Pelo Teorema de Euler, se n é um número perfeito par $\Rightarrow$ $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$, onde $2^k - 1$ é primo.

$x = 8n + 1 = 2^3[2^{k-1}(2^k - 1)] + 1 = 2^{2k+2} - 2^{k+2} + 1 = 2^{2(k+1)} - 2.2^{k+1} + 1 = (2^{k+1} - 1)^2$.

3) (Olimpíada da Rússia-2000) Um inteiro positivo *n* é chamado *perfeito* se a soma de todos os seus divisores, excluindo *n*, é igual a *n*. Prove que se um número perfeito maior do que 28 é divisível por 7 então ele é divisível por 49.

Solução:

Suponhamos inicialmente que n é par. Vamos usar o seguinte resultado:

"Se $\underline{n}$ é um número perfeito par, então $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ onde $2^k - 1$ é primo."

Como 7 é primo, então $2^k - 1 = 7 \Rightarrow k = 3 \Rightarrow n = 28$, que não serve pois $n > 28$.

Analisemos agora o caso em que n é ímpar.

Escrevendo n na forma fatorada: $n = p_1^{k_1} p_2^{k_2} ... p_t^{k_t}$, sabemos que a soma dos divisores positivos de n é igual a $\sigma(n) = (1 + p_1 + p_1^2 + ... + p_1^{k_1})(1 + p_2 + p_2^2 + ... + p_2^{k_2})...(1 + p_t + p_t^2 + ... + p_t^{k_t})$.

Para que um número seja perfeito temos que $\sigma(n) = 2n$.

Se n é divisível por 7 e não por 49, fazendo $p_1 = 7$, então $\sigma(n) = (1 + 7).K = 8K$, onde K é um inteiro positivo. Como $\sigma(n) = 2n \Rightarrow 8K = 2n \Rightarrow n = 4K$, que é um absurdo, pois n é ímpar.

Deste modo, se n é divisível por 7, então n é divisível por 49.

8.5.3. Números Multiperfeitos

Um inteiro positivo $\underline{n}$ diz-se um número multiperfeito de ordem $\underline{k}$ ou um k-número perfeito se e somente se $s(n) = kn$, onde $k \geq 3$ é um inteiro. Designa-se um número multiperfeito de ordem k por P_k. Assim, por exemplo, o inteiro positivo $30240 = 2^5.3^3.5.7$ é um número multiperfeito de ordem 4 (ou um número P_4), pois, temos: $s(30240) = \frac{2^6 - 1}{2 - 1}.\frac{3^4 - 1}{3 - 1}.\frac{5^2 - 1}{5 - 1}.\frac{7^2 - 1}{7 - 1} = 63.40.6.8 = 120960 = 4.30240$.

8.5.3.1. Teorema 6.7 (de Descartes) (mencionado em uma carta enviada a Mersenne em 15 novembro de 1638):

1°: Se $\underline{n}$ é um número P_3 e não é divisível por 3, então $\underline{3n}$ é um número P_4.

2°: Se um número $\underline{n}$ é divisível por 3 mas não é divisível nem por 5 ou por 9, e se é um número P_3, então $\underline{45n}$ é P_4.

3°: Se um número $\underline{n}$ não é divisível por 3 e se $\underline{3n}$ é um número P_{4k}, então n é um número P_{3k}.

Demonstração:

1°: Se $\underline{n}$ é um número P_3, então $s(n) = 3n$ e se $\underline{n}$ não é divisível por 3, então $s(3n) = s(3).s(n) = 4.3n$, e conseqüentemente $\underline{3n}$ é um número P_4.

2°: Se $\underline{n}$ é um número P_3, e $n = 3k$, onde $\underline{k}$ não é divisível nem por 3 ou por 5, então:

$s(45n) = s(3^3.5.k) = s(3^3).s(5).s(k) = 40.6.s(k)$

Entretanto, em virtude de $n = 3k$, e $\underline{k}$ não é divisível por 3, temos $s(n) = s(3).s(k) = 4s(k)$.

Então: $s(45n) = 60.4.s(k) = 60.s(n)$

Como $\underline{n}$ é um número P_3, então $s(n) = 3n$, que implica que $s(45n) = 180n = 4.45n$, provando que $\underline{45n}$ é um número P_4.

3^0. Se n não é divisível por 3 e se $3n$ é um número P_{4k}, então $s(3n) = 4k.3n$, que implica que $s(3n) = s(3).s(n) = 4.s(n)$, então $s(n) = 3kn$, que prova que n é um número P_{3k}.

Exemplo:

1) Mostrar que nenhum inteiro da forma $n = 2^a.3^b$ é um 3-número perfeito.
Solução:
Suponhamos, por absurdo, que exista um $n = 2^a.3^b$ tal que $s(n) = 3n = 2^a.3^{b+1}$
$\therefore [(2^{a+1} - 1)/(2 - 1)][(3^{b+1} - 1)/(3 - 1)] = 2^a.3^{b+1} \Rightarrow (2^{a+1} - 1)(3^{b+1} - 1) = 2^{a+1}.3^{b+1}$
obviamente esta expressão não possui resposta, pois a expressão do lado direito da igualdade é estritamente maior que a expressão do lado esquerdo.

8.6. NÚMEROS AMIGOS

Dois inteiros positivos m e n dizem-se números amigos se e somente se a soma dos divisores positivos de m, exceto o divisor m, é igual a n, e a soma dos divisores positivos de n, exceto o divisor n, é igual a m. Em outras palavras, dois inteiros positivos m e n dizem-se amigos se e somente se $s(m) - m = n$ e $s(n) - n = m$ ou seja, o que é equivalente a $s(m) = m + n = s(n)$.

Exemplos:

1) Mostrar que os inteiros 220 e 284 são números amigos.
Solução:
i) $220 = 2^2.5.11 \Rightarrow s(220) - 220 = s(2^2).s(5).s(11) - 220 = 7.6.12 - 220 = 504 - 220 = 284$
) $284 = 2^2.71 \Rightarrow s(284) - 284 = s(2^2).s(71) - 284 = 7.72 - 284 = 504 - 284 = 220$
ogo, por definição, os inteiros 220 e 284 são números amigos.

8.7. NÚMEROS DEFICIENTES E ABUNDANTES

Um inteiro positivo n diz-se um número deficiente se e somente se $s(n) - n < n$ ou $s(n) < 2n$ e diz-se um número abundante se e somente se $s(n) - n > n$ ou $s(n) > 2n$.

Assim, por exemplo, os inteiros 15 e 18 são respectivamente um número deficiente ou abundante, pois, temos:
$s(15) = s(3.5) = s(3).s(5) = 4.6 = 24 < 2.15$
$s(18) = s(2.3^2) = s(2).s(3^2) = 3.13 = 39 > 2.18$

Exemplos:

1) Prove que existem infinitos números naturais ímpares tais que $s(n) > 2n$.
Solução:
Seja o número $n = 945m$, onde m é um número natural não divisível por 2, 3, 5, 7.
Desde que $945 = 3^3.5.7$ e mdc $(m, 945) = 1 \Rightarrow s(n) = s(945)s(m) \geq s(945).m = 1920m > 2n$
Então todo número natural da forma $n = 945m$ (m não divisível por 2, 3, 5, 7) satisfaz $s(n) > 2n$

2) Sejam p um número primo e o inteiro $k \geq 1$. Mostrar que p^k é deficiente.
Solução:
Como $s(p^k) = (p^{k+1} - 1)/(p - 1)$, basta provar que $2p^k > (p^{k+1} - 1)/(p - 1)$.
Note que: $2p^k - \dfrac{p^{k+1} - 1}{p-1} = \dfrac{2p^{k+1} - p^{k+1} - 2p^k + 1}{p-1} = \dfrac{p^{k+1} - 2p^p + 1}{p-1} = \dfrac{p^k(p-2)+1}{p-1}$, que sempre é maior que 0, pois $p \geq 2$.

Exercícios

1) Achar o inteiro positivo da forma $2.15^m.7^n$ e que admite 36 divisores positivos.

2) Seja $n = 2^{k-1}(2^k - 1)$ um número perfeito par. Demonstrar que o produto dos divisores positivos de n é igual a n^k.

3) Achar o menor inteiro positivo com seis divisores positivos.

4) Determinar o inteiro $n = 2^x.3^y.7^z$, sabendo que os produtos $5n$, $7n$ e $8n$ têm, respectivamente, 8, 12 e 18 divisores positivos a mais que n.

5) Determinar o inteiro $n = 2^x.3^y.5^z$, sabendo que dividido por 12, por 18 e por 90 perde, respectivamente, 24, 27 e 30 dos seus divisores.

6) Determinar o inteiro $n = 2^x.3^y$, sabendo que o número de divisores de n^2 é o triplo do número de divisores de n.

7) Determinar o inteiro cujo produto de todos os seus divisores é igual a $3^{30} \times 5^{40}$.

8) Demonstrar que, se $n > 1$ é um inteiro composto, então $s(n) > n + \sqrt{n}$.

9) Mostrar que o inteiro $n = 2^{10}(2^{11} - 1)$ não é um número perfeito.

10) Mostrar que não existe um inteiro positivo n tal que $s(n) = 10$.

11) Demonstrar: a) $d(n) \leq 2\sqrt{n}$ b) $n \leq s(n) \leq n^2$

12) Demonstrar que $d(n)$ é um inteiro ímpar se e somente se n é um quadrado perfeito.

13) Demonstrar que, se $n > 1$ é um inteiro composto, então $s(n) > n + \sqrt{n}$.

14) Mostrar que, se o mdc (a, b) = 1 e se a é abundante, então a.b é abundante.

15) Achar os valores de k para os quais $2^k.11$ é abundante.

16) Demonstrar as seguintes proposições:
a) Nenhuma potência de um primo é um número perfeito.
b) Um quadrado perfeito não pode ser um número perfeito.
c) O produto de dois primos ímpares nunca é um número perfeito.

17) Mostrar que todo múltiplo de um número perfeito é um número abundante.

18) Calcular os valores inteiros de x tal que $f(x)$ assume valores inteiros: $f(x) = \dfrac{x^2}{x+6}$.

19) Determine quantos inteiros positivos são divisores de 45^{75} ou 75^{45}? Generalize este resultado para a^b e b^a, onde $a = p^2q$ e $b = pq^2$, para primos p e q, com $p < q < 2p$.

20) (UECE-2004) Sejam n_1, n_2, n_3, n_4, n_5 e n_6 os seis números naturais divisores de 28. A soma $\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2} + \frac{1}{n_3} + \frac{1}{n_4} + \frac{1}{n_5} + \frac{1}{n_6}$ é igual a:
a) 1 b) 2 c) 4 d) 3

21) (UECE-2004) O número de divisores positivos do número 75.600 é:
a) 4! + 5! b) 2! + 3! + 4! c) 4! d) 5!

22) (Mackenzie-2001) Dado o número natural $n = 2^8.3^2.5^4$, os divisores positivos de n, que são múltiplos de 225, são em número de:
a) 36 b) 32 c) 28 d) 25 e) 27

23) (Mackenzie-2002) O número natural 8.5^k tem 24 divisores positivos. O valor de k é:
a) 3 b) 4 c) 5 d) 6 e) 7

24) (UFMT-2002) Divisores próprios de um número positivo N são todos os divisores inteiros positivos de N, exceto o próprio N. Um número é perfeito quando puder ser escrito como soma de seus divisores próprios. A partir dessas informações, julgue os itens.
❶ O número 28 é perfeito.
❶ Todo número par é perfeito.
❷ Não existe número primo perfeito.

25) (UFU-99) Dos divisores positivos de 1800, quantos são múltiplos de 8?
a) 4 b) 9 c) 10 d) 8

26) (UFV-2001) Seja x = 3600. Se p é o número de divisores naturais de x, e q é o número dos divisores naturais pares de x, então é CORRETO afirmar que:
a) p = 45 e q = 36 b) p = 36 e q = 45
c) p = 16 e q = 10 d) p = 45 e q = 12
e) p = 16 e q = 34

27) (Fuvest-90) O número de divisores do número 40 é.
a) 8 b) 6 c) 4 d) 2 e) 20

28) (Fuvest-97) O menor número natural n, diferente de zero, que torna o produto de 3888 por n um cubo perfeito é:
a) 6 b) 12 c) 15 d) 18 e) 24

29) (Unicamp-2001) O teorema fundamental da aritmética garante que todo número natural $n > 1$ pode ser escrito como um produto de números primos. Além disso, se $n = p_1^{t_1} p_2^{t_2} \cdots p_r^{t_r}$, onde p_1, p_2, ..., p_r são números primos distintos, então o número de divisores positivos de n é $d(n) = (t_1 + 1)(t_2 + 1)...(t_r + 1)$.
a) Calcule $d(168)$, isto é, o número de divisores positivos de 168.
b) Encontre o menor número natural que tem exatamente 15 divisores positivos.

30) (ESPM-2003) O número natural N = 180.p, onde p é um número primo, possui 27 divisores naturais. O valor de p é:
a) 2 b) 3 c) 5 d) 7 e) 11

31) (ESA-92) Se o número $N = 2^x.3^2$ tem 6 divisores, o valor de N é:
a) 1 b) 2 c) 9 d) 18 e) 72

32) (Colégio Naval-81) Seja $N = 2^4 3^5 5^6$. O número de divisores de N que são múltiplos de 10, é:
a) 24 b) 35 c) 120 d) 144 e) 210

33) (Colégio Naval-82) O número de divisores inteiros de N, sendo N igual ao produto de K números primos distintos, é:
a) K^2 b) 2^K c) K d) 2K e) K+2

34) (Colégio Naval-85) O número máximo de divisores do número natural 48.2^{-x^2+2x}, $x \in N$, é
a) 12 b) 10 c) 24 d) 6 e) 18

35) (Colégio Naval-91) O produto de todos os divisores inteiros de 144 é:
a) $-2^{30} \times 3^{15}$. c) $-2^{60} \times 3^{30}$. e) -3^{60}.
b) $2^{30} \times 3^{15}$. d) $2^{60} \times 3^{30}$.

36) (ITA-2003) O número de divisores de 17 640 que, por sua vez, são divisíveis por 3 é:
a) 24 b) 36 c) 48 d) 54 e) 72

37) (UFMS-2005) É correto afirmar que o número 480:
(01) pode ser escrito na forma $2^2.3.5.7$.
(02) possui 24 divisores inteiros e positivos.
(04) possui 16 divisores pares.
(08) possui 8 divisores ímpares.
(16) possui 3 divisores que são quadrados perfeitos.

Questões de Olimpíadas – Nível Intermediário

38) (Ceará-99) Seja n um inteiro positivo e $\sigma(n)$ a soma de todos os divisores positivos de n. Prove que $\sigma(n) + \sigma(n-1) > 5n/2$, para todo n.

39) (Rio Grande do Norte-95) O número de todos os pares de inteiros positivos (a, b) com $a + b \leq 100$ que satisfazem $\dfrac{a + \frac{1}{b}}{\frac{1}{a} + b} = 13$ é:

40) (Berkeley Math Circle-2000) Mostre que existem infinitos números naturais n com a seguinte propriedade: a soma de todos os divisores positivos de n, excluindo n, é igual a n + 12.

41) (OBM-2004) Para quantos inteiros positivos m o número $\dfrac{2004}{m^2 - 2}$ é um inteiro positivo?
a) um b) dois c) três
d) quatro e) mais que quatro

42) (OBM-95) A quantidade de maneiras de escrever o número 2100 como produto de dois números naturais primos entre si é (considere a ordem dos fatores):
a) 06 b) 12 c) 16 d) 24 e) 32

43) (OBM-2001) Apresente todos os números inteiros positivos menores do que 1000 que têm exatamente três divisores positivos. Por exemplo: o número 4 tem exatamente três divisores positivos: 1, 2 e 4.

44) (OBM-2003) Considere o produto de todos os divisores positivos de um número inteiro positivo, diferentes desse número. Dizemos que o número é *poderoso* se o produto desses divisores for igual ao quadrado do número. Por exemplo, o número 12 é poderoso, pois seus divisores positivos menores do que ele são 1, 2, 3, 4 e 6 e 1.2.3.4.6 = 144 = 12^2. Apresente todos os números poderosos menores do que 100.

45) (Argentina-98) Determinar todos os números inteiros n tais que $(n + 98)/(n + 19)$ é um número inteiro.

46) (Argentina-2000) Dizemos que um inteiro maior que 1 é admissível se cada um dos resultados da multiplicação dos divisores do número (positivos e distintos) é maior que 1/5 do número. Por exemplo, 6 é admissível porque seus divisores são 1, 2, 3 e 6, e os produtos: 1.2 = 2, 1.3 = 3, 1.6 = 6 e 3.6 = 18 são todos maiores que 6/5. Determinar todos os inteiros positivos admissíveis.

47) (Argentina-2001) Dado um número natural n, denota-se P(n) o produto de todos os divisores positivos de n, incluídos 1 e n. Por exemplo, P(12) = 1 . 2 . 3 . 4 . 6 . 12 = 1728. Achar todos os números naturais n menores que 400 tais que n tem exatamente dois divisores primos distintos e P(n) = n^6.

48) (México) Prove que o produto de todos os divisores de $2^{100}.3^{100}$ é $6^{5100/50}$.

49) (México-87) Quantos inteiros positivos dividem 20!? (20! = 1.2.3....19.20)

50) (University of South Carolina-95) O número de inteiros positivos pares que são divisores de $720 = 2^4 \times 3^2 \times 5$ é:
a) 15 b) 16 c) 24 d) 25 e) 29

51) (Catonsville-95) Seja N o produto de todos os divisores positivos de 1995. Qual é o número de dígitos de N?
a) 6 b) 19 c) 22 d) 27

52) (Duke-98) O inteiro positivo n é tal que 3n possui 28 divisores positivos e 4n possui 36 divisores positivos. Determine o número de divisores positivos de n.

53) (Wisconsin-2002) Determine o número de inteiros não-negativos n tais que 2003 + n é um múltiplo de n − 1.

54) (Wisconsin-2003) Suponha que n é um inteiro positivo tal que existam exatamente seis diferentes inteiros positivos tais que n/m é um inteiro. Se um destes seis números é m = 27, determine todas as possibilidades para n.

55) (Portugual-94) Suponha que temos 1000 lâmpadas apagadas, cada uma com o seu interruptor, numeradas de 1 a 1000. Efetuamos as seguintes operações: no primeiro passo acionamos todos os interruptores, no segundo passo acionamos os interruptores das lâmpadas 2, 4, 6, 8, ... no terceiro acionamos os interruptores das lâmpadas 3, 6, 9, 12, ... no quarto acionamos os interruptores das lâmpadas 4, 8, 12, 16, ..., e assim sucessivamente. Ao fim de 1000 passos, quantas lâmpadas estão acesas?

56) (Catalunha) Um número natural possui 2 fatores primos e 8 divisores positivos. Calcule este número sabendo que a soma dos seus divisores é 320.

57) (Vietnã-70) Determine todos os inteiros positivos que dividem 1890.1930.1970 e que não são divisíveis por 45.

Questões de Olimpíadas – Nível Avançado

58) (Ceará-95) Seja n natural e f:N → N a função dada por $f(n)$ = número de fatores (ou divisores) positivos de n. Determine os valores de n para os quais $2f(n) = n$

59) (Argentina-95) Para cada inteiro positivo n seja p(n) o número de pares ordenados (x, y) de inteiros positivos tais que 1/x + 1/y = 1/n.
Por exemplo, para n = 2 os pares são (3, 6), (4, 4), (6, 3). Portanto p(2) = 3.
a) Determinar p(n) para todo n e calcular p(1995).
b) Determinar todos os pares n tais que p(n) = 3.

60) (Argentina-96) Se n é um número natural, d(n) é o número de divisores positivos de n. Por exemplo, d(12) = 6, pois os divisores positivos são 1, 2, 3, 4, 6 e 12. Calcular todos os números naturais $n \leq 200$ tais que $n/d(n) = 8$.

61) (Argentina-2000) Determinar qual é a quantidade de pares de números naturais (a, b) que verificam simultaneamente que 4620 é múltiplo de a, 4620 é múltiplo de b e b é múltiplo de a.

62) (Olimpíada Provincial-2000) De um número natural n sabe-se que tem exatamente seis divisores positivos contando de 1 a n. Também sabe-se que o produto de cinco desses divisores é igual a 648. Determinar n.

63) (Putnam-69) Seja n um inteiro positivo tal que $n + 1$ é divisível por 24. Prove que a soma de todos os divisores de n é divisível por 24.

64) (Rússia-1936) De quantas maneiras distintas podemos representar 10^6 como o produto de três fatores naturais? Fatorações que diferenciam somente pela ordem dos fatores devem ser consideradas distintas.

65) (Espanha-92) Um número natural N que é múltiplo de 83 é tal que N^2 possui 63 divisores. Calcular N, sabendo que é o menor número possível que cumpre tais condições.

66) (Lituânia-95) Um inteiro positivo n é chamado de ambicioso se ele possui a seguinte propriedade: escrevendo n à direita (na representação decimal) de todo inteiro positivo, obtemos sempre um número que é divisível por n. Determine:
a) Os primeiros 10 números ambiciosos:
b) todos os números ambiciosos.

67) (International Talent Search) De quantos modos 1992 pode ser expresso como soma de um ou mais inteiros consecutivos?

68) (Báltica-92) Seja d(n) o número de divisores positivos de um número natural n (incluindo 1 e n). Prove que existem infinitos números n tais que $n/d(n)$ é um inteiro.

69) (Báltica-96) Seja d(n) o número de divisores positivos de um inteiro positivo n (incluindo 1 e n). Sejam $a > 1$ e $n > 0$ inteiros tais que $a^n + 1$ é um primo. Prove que $d(a^n - 1) \geq n$.

70) (IMO-83 banco) Qual dos números 1, 2, ..., 1983 possui o maior número de divisores positivos?

71) (Auckland-98) Determine todos os números primos p tais que o número $p^2 + 11$ possui exatamente 6 divisores positivos (incluindo 1 e o próprio número).

72) (Irã-99) Suponha que n é um inteiro positivo e $d_1 < d_2 < d_3 < d_4$ são os quatro menores inteiros positivos que dividem n. Determine todos os inteiros satisfazendo $n = d_1^2 + d_2^2 + d_3^2 + d_4^2$.

73) (Croácia-2003) Quantos divisores positivos do número 30^{2003} não são divisores de 20^{2000}?

74) (Irlanda-97) Dado um inteiro positivo k, seja $\sigma(k)$ a soma de os inteiros positivos que dividem n. Por exemplo, $\sigma(3) = 1 + 3 = 4$, $\sigma(6) = 1 + 2 + 3 + 6 = 12$, $\sigma(12) = 1 + 2 + 3 + 4 + 6 + 12 = 28$.
Nós dizemos que k é abundante de $\sigma(k) > 2k$. Por exemplo, 12 é abundante. Sejam k, n inteiros positivos e suponha que k é abundante. Prove que kn é abundante.

75) (Olimpíada Provincial-97) De um número natural composto n sabe-se o seguinte: cada divisor positivo de n, exceto 1 e n, é maior ou igual que $n - 20$ e menor ou igual que $n - 10$. Determinar todos os possíveis valores de n.

76) (Argentina-2000) Um número natural é balanceado se tem a mesma quantidade de dígitos que de divisores primos distintos. Por exemplo, 20 é balanceado, pois tem dois dígitos e dois divisores primos distintos (2 e 5); 81 não é balanceado, pois tem dois dígitos e somente um divisor primo (o 3); tão pouco é balanceado 60, pois tem dois dígitos e três divisores primos distintos (2, 3 e 5). Determinar um número balanceado de 6 dígitos e determinar qual é a máxima quantidade de dígitos que pode ter um número balanceado.

CONGRUÊNCIAS

Sejam a e b dois inteiros quaisquer e seja m um inteiro positivo fixo. Diz-se que a é congruente a b módulo m se e somente se m divide a diferença a – b. Em outros termos, a é congruente a b módulo m se e somente se existe um inteiro k tal que $a - b = km$. Com a notação $a \equiv b \pmod{m}$ indica-se que a é congruente a b módulo m. Portanto, simbolicamente:

$a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow m \mid (a - b)$ ou seja: $a \equiv b \pmod{m} \Leftrightarrow \exists\, k \in Z / a - b = km$

8.1. PROPRIEDADES

Seja m um inteiro positivo fixo ($m > 0$) e sejam a, b, c e d inteiros quaisquer. São válidas as seguintes propriedades:

(1) $a \equiv a \pmod{m}$
Demonstração:
Como 0 é divisível por qualquer inteiro $m \neq 0$, então: $0 = a - a = qm \Rightarrow a = qm + a \Rightarrow a \equiv a \pmod{m}$

(2) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$
Demonstração:
Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = qm + b \Rightarrow b = (-q)m + a \Rightarrow b \equiv a \pmod{m}$

(3) $a \equiv b \pmod{m}$ e $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$
Demonstração:
Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = q_1m + b$. Se $b \equiv c \pmod{m} \Rightarrow b = q_2m + c$
Assim, $a = m(q_1 + q_2) + c \Rightarrow a \equiv c \pmod{m}$

(4) $a \equiv b \pmod{m}$ e $n \mid m$, com $n > 0$, $\Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$
Demonstração:
Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = q_1m + b$. Se $n \mid m \Rightarrow m = nq_2 \Rightarrow a = q_1q_2n + b \Rightarrow a \equiv b \pmod{n}$

(5) $a \equiv b \pmod{m}$ e $c > 0$, $\Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$
Demonstração:
Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = qm + b$. Multiplicando por $c > 0 \Rightarrow ac = q(mc) + bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{mc}$

(6) $a \equiv b \pmod{m}$ e a, b, m são todos divisíveis pelo inteiro $d > 0 \Rightarrow a/d \equiv b/d \pmod{m/d}$
Demonstração:
Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = qm + b$ (i). Se $d \mid a$, $d \mid b$ e $d \mid m \Rightarrow$ a/d, b/d e m/d são todos inteiros.
Dividindo (i) por d temos que: $(a/d) = q(m/d) + (b/d) \Rightarrow a/d \equiv b/d \pmod{m/d}$

(7) $a \equiv b \pmod{m}$ e $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$ e $ac \equiv bd \pmod{m}$
Demonstração:
Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = q_1m + b$ (i). Se $c \equiv d \pmod{m} \Rightarrow c = q_2m + d$ (ii).
(i) + (ii) $\Rightarrow a + c = (q_1 + q_2)m + b + d \Rightarrow a + c \equiv b + d \pmod{m}$
(i) x (ii) $\Rightarrow ac = q_1q_2m^2 + q_1dm + q_2bm + bd \Rightarrow ac = (q_1q_2m + q_1d + q_2b)m + bd \Rightarrow ac \equiv bd \pmod{m}$

(8) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a + c \equiv b + c \pmod{m}$ e $ac \equiv bc \pmod{m}$
Demonstração:
Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = qm + b$ (i). Somando c aos 2 lados de (i) $\Rightarrow a + c = qm + b + c \Rightarrow$
$a + c \equiv b + c \pmod{m}$
Multiplicando (i) por c $\Rightarrow ac + (qc)m + bc \Rightarrow ac \equiv bc \pmod{m}$

(9) $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$ para todo inteiro positivo n

Demonstração:

Se $a \equiv b \pmod{m} \Rightarrow a = qm + b$ (i). Elevando a n os dois lados de (i) temos que:

$$a^n = (b + qm)^n \Rightarrow a^n = b^n + \sum_{p=1}^{n} \binom{n}{p} b^{n-p}(qm)^p \Rightarrow a^n = b^n + m\left(\sum_{i=1}^{n} \binom{n}{p} b^{n-p} q^p m^{p-1}\right) \Rightarrow$$

$a^n = b^n + mk \Rightarrow a^n \equiv b^n \pmod{m}$

Exemplos:

1) (Mackenzie-2003) Ao ser dividido por 5, o número 4758 + 118a x 25847 deixa resto 1. Um possível valor do algarismo a, das unidades, é:

a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) 8

Solução:

Note que: $118a = 1180 + a \Rightarrow 118a \equiv a \pmod{5}$

Como $25847 \equiv 2 \pmod{5} \Rightarrow (118a)(25847) \equiv 2a \pmod{5}$

Como $4758 \equiv 3 \pmod{5} \Rightarrow 4758 + (118a)(25847) \equiv 2a + 3 \pmod{5}$

Logo: $2a + 3 \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 2a \equiv 4 \pmod{5} \Rightarrow a = 2$ ou $a = 7$

2) (Colégio Naval-2005) Um número natural N deixa: resto 2 quando dividido por 3; resto 3 quando dividido por 7; e resto 19 quando dividido por 41.

Qual é o resto da divisão do número $k = (N + 1).(N + 4).(N + 22)$ por 861?

a) 0 b) 13 c) 19 d) 33 e) 43

Solução:

Pelo enunciado:

i) $N \equiv 2 \pmod{3} \Rightarrow N + 1 \equiv 0 \pmod{3}$

ii) $N \equiv 3 \pmod{7} \Rightarrow N + 4 \equiv 0 \pmod{7}$

iii) $N \equiv 19 \pmod{41} \Rightarrow N + 22 \equiv 0 \pmod{41}$

Logo: $(N + 1)(N + 4)(N + 22) \equiv 0 \pmod{\text{mmc}(3.7.41)} \Rightarrow (N + 1)(N + 4)(N + 22) \equiv 0 \pmod{861}$

3) (Colégio Naval-2004) O resto da divisão de $5^{131} + 7^{131} + 9^{131} + 15^{131}$ por 12 é igual a.

a) 0 b) 2 c) 7 d) 9 e) 11

Solução:

i) $7 \equiv -5 \pmod{12} \Rightarrow 7^{131} \equiv (-5)^{131} \pmod{12} \Rightarrow 5^{131} + 7^{131} \equiv 0 \pmod{12}$ (1)

ii) $15 \equiv -9 \pmod{12} \Rightarrow 15^{131} \equiv (-9)^{131} \pmod{12} \Rightarrow 9^{131} + 15^{131} \equiv 0 \pmod{12}$ (2)

Somando as congruências (1) e (2): $5^{131} + 7^{131} + 9^{131} + 15^{131} \equiv 0 \pmod{12}$

4) (OBM-98) Qual é o dígito das unidades do número 3^{1998}?

a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

Solução:

$3^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow (3^2)^{999} \equiv (-1)^{999} \pmod{10} \Rightarrow 3^{1998} \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 3^{1998} \equiv 9 \pmod{10} \Rightarrow$ o dígito das unidades de 3^{1998} é 9.

5) Demonstrar que $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

Solução:

$2^2 + 3^2 \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow 2^2 \equiv -3^2 \pmod{13} \Rightarrow (2^2)^{35} \equiv (-3^2)^{35} \pmod{13} \Rightarrow$

$2^{70} \equiv -3^{70} \pmod{13} \Rightarrow 2^{70} + 3^{70} \equiv 0 \pmod{13}$

6) Mostrar que $11^{10} \equiv 1 \pmod{100}$

Solução:

$11^{10} - 1 = (11 - 1)(11^9 + 11^8 + 11^7 + ... + 11^2 + 11 + 1) \Rightarrow$

$11^{10} - 1 = 10.(11^9 + 11^8 + 11^7 + ... + 11^2 + 11 + 1)$

Basta agora provar que $(11^9 + 11^8 + 11^7 + ... + 11^2 + 11 + 1)$ é divisível por 10.

Como $11 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow 1 \equiv 11 \equiv 11^2 \equiv 11^3 \equiv 11^4 \equiv ... \equiv 11^8 \equiv 11^9 \equiv 1 \pmod{10}$
Somando temos: $11^9 + 11^8 + 11^7 + ... + 11^2 + 11 + 1 \equiv 1 + 1 + 1 + ... + 1 \pmod{10} \Rightarrow$
$11^9 + 11^8 + 11^7 + ... + 11^2 + 11 + 1 \equiv 10 \pmod{10} \Rightarrow 11^9 + 11^8 + 11^7 + ... - 11^2 + 11 + 1 \equiv 0 \pmod{10}$

7) (Olimpíada do Rio de Janeiro-98) Mostre que o número $N = 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$ é divisível por 1998.
Solução:
Notemos inicialmente que $1998 = 2.3^3.37$
i) $760 - 20 - 740 = 2^2.5.37 \Rightarrow 760 \equiv 20 \pmod{2.37} \Rightarrow 760^{1998} \equiv 20^{1998} \pmod{2.37} \Rightarrow$
$760^{1998} - 20^{1998} \equiv 0 \pmod{2.37}$
ii) $1910 - 652 = 1258 = 2.17.37 \Rightarrow 1910 \equiv 652 \pmod{2.37} \Rightarrow 1910^{1998} \equiv 652^{1998} \pmod{2.37} \Rightarrow$
$1910^{1998} - 652^{1998} \equiv 0 \pmod{2.37}$
Assim: $760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998} \equiv 0 \pmod{2.37} \Rightarrow$
$2.37 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$
iii) $760 - 652 = 108 = 2^2.3^3 \Rightarrow 760 \equiv 652 \pmod{3^3} \Rightarrow 760^{1998} \equiv 652^{1998} \pmod{3^3} \Rightarrow$
$760^{1998} - 652^{1998} \equiv 0 \pmod{3^3}$
iv) $1910 - 20 = 1890 = 2.3.5.7 \Rightarrow 1910 \equiv 20 \pmod{3^3} \Rightarrow 1910^{1998} \equiv 20^{1998} \pmod{3^3} \Rightarrow$
$1910^{1998} - 20^{1998} \equiv 0 \pmod{3^3}$
Assim: $760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998} \equiv 0 \pmod{3^3} \Rightarrow 3^3 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$
Como $2.37 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$ e $3^3 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998} \Rightarrow$
$2.3^3.37 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998} \Rightarrow 1998 \mid 760^{1998} - 20^{1998} + 1910^{1998} - 652^{1998}$

8) (Olimpíada da Bulgária-2000) Determine o dígito das centenas de $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001}$.
Solução:
Notemos que $2^{1999} + 2^{2000} + 2^{2001} = 2^{1999}(1 + 2 + 4) = 2^{1999}.7$
$2^{10} = 1024 \Rightarrow 2^{10} \equiv 24 \pmod{100} \Rightarrow 2^{20} \equiv 76 \pmod{100} \Rightarrow (2^{20})^{99} \equiv (76)^{99} \pmod{100} \Rightarrow$
$2^{1980} \equiv 76 \pmod{100} \Rightarrow (2^{10})(2^{1980}) \equiv (24)(76) \pmod{100} \Rightarrow 2^{1990} \equiv 24 \pmod{100} \Rightarrow$
$(2^9)(2^{1990}) \equiv (512)(24) \pmod{100} \Rightarrow 2^{1999} \equiv 88 \pmod{100} \Rightarrow 2^{1999}.7 \equiv 16 \pmod{100}$
Desde modo concluímos que os dois últimos dígitos de $2^{1999}.7$ são 16. Como $2^{1999}.7$ é divisível por 8, e um número é divisível por 8 se e somente se o número formado pelos seus três últimos algarismos é divisível por 8, os últimos 3 dígitos de $2^{1999}.7$ podem ser 216, 416, 616 ou 816, ou seja, o algarismo das centenas é par.

9) (Olimpíada do México-87) Demonstre que para qualquer inteiro positivo n, o número $(n^3 - n)(5^{8n+4} + 3^{4n+2})$ é múltiplo de 3804.
Solução:
Inicialmente observemos que $3840 = 2^2.3.317$
Como $n^3 - n = (n - 1)n(n + 1)$, então $6 \mid n^3 - n$, faltando provar que $2.317 \mid 5^{8n+4} - 3^{4n+2}$
Como $5^{8n+4} + 3^{4n+2}$ é a soma de dois números ímpares, então $2 \mid 5^{8n+4} + 3^{4n+2}$
Como $5^4 + 3^2 = 634 = 2.317 \Rightarrow 5^4 + 3^2 \equiv 0 \pmod{317} \Rightarrow 5^4 \equiv -3^2 \pmod{317} \Rightarrow$
$(5^4)^{2n+1} \equiv (-3^2)^{2n+1} \pmod{317} \Rightarrow 5^{8n+4} \equiv -3^{4n+2} \pmod{317} \Rightarrow 5^{8n+4} + 3^{4n+2} \equiv 0 \pmod{317}$

10) (Olimpíada do México-90) Prove que $n^{n-1} - 1$ é divisível por $(n - 1)^2$ para todo inteiro $n > 2$.
Solução:
Notemos que $n^{n-1} - 1 = (n - 1)(n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + ... + n^2 + n + 1)$
Basta provar agora que $n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + ... + n^2 + n + 1$ é divisível por $n - 1$.
Notemos que:
i) $n \equiv 1 \pmod{n-1} \Rightarrow n^2 \equiv 1 \pmod{n-1}$ $n^3 \equiv 1 \pmod{n-1}$ $n^4 \equiv 1 \pmod{n-1}$ ...
$n^{n-3} \equiv 1 \pmod{n-1}$ $n^{n-2} \equiv 1 \pmod{n-1}$
Então, somando estas congruências: $n^{n-2} + n^{n-3} + ... + n + 1 \equiv 1 + 1 + ... + 1 + 1 \pmod{n-1} \Rightarrow$
$n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + ... + n^2 + n + 1 \equiv n - 1 \pmod{n-1} \Rightarrow$

$n^{n-2} + n^{n-3} + n^{n-4} + ... + n^2 + n + 1 \equiv 0 \pmod{n-1}$

11) (Olimpíada da Inglaterra-92) Prove que $3^n + 2.17^n$, onde n é um inteiro não nulo, nunca é um quadrado perfeito.

Solução:

i) $3^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 3^{2k} \equiv (-1)^k \pmod{10} \Rightarrow 3^{2k+1} \equiv 3(-1)^k \pmod{10}$

ii) $17^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 17^{2k} \equiv (-1)^k \pmod{10} \Rightarrow 17^{2k+1} \equiv 17(-1)^k \pmod{10}$

I) $3^{2k} + 2.17^{2k} \equiv (-1)^k + 2.(-1)^k \pmod{10} \Rightarrow 3^{2k} + 2.17^{2k} \equiv 3(-1)^k \pmod{10}$

Como não existe quadrado perfeito que termine em 3 ou 7, então $3^{2k} + 2.17^{2k}$ nunca vai ser um quadrado

II) $3^{2k+1} + 2.17^{2k+1} \equiv 3(-1)^k + 34(-1)^k \pmod{10} \Rightarrow 3^{2k+1} - 2.17^{2k+1} \equiv 37(-1)^k \pmod{10} \Rightarrow$
$3^{2k+1} + 2.17^{2k+1} \equiv 3(-1)^k \pmod{10}$

Analogamente ao caso anterior, temos que não existe quadrado perfeito da forma $3^{2k+1} + 2.17^{2k+1}$.

12) (IMO-64) (a) Determine todos os números naturais n para os quais 7 divide $2^n - 1$.

(b) Prove que não existe um número natural n para o qual 7 divide $2^n + 1$.

Solução:

a) Notemos que $2^3 = 8 = 7 + 1 \Rightarrow 2^3 \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 2^{3k} \equiv 1 \pmod{7} \Rightarrow 7 \mid (2^{3k} - 1)$

Assim, se n é divisível por 3, então $2^n - 1$ é divisível por 7.

II) $2^{3k} - 1 = 7x \Rightarrow 2(2^{3k} - 1) = 2(7x) \Rightarrow (2^{3k+1} - 1) - 1 = 7y \Rightarrow 2^{3k+1} - 1 = 7y + 1 \Rightarrow$
se n é da forma $n = 3k + 1$, então 7 não divide $2^n - 1$.

III) $2(2^{3k+1} - 1) = 2(7y + 1) \Rightarrow 3^{3k+2} - 2 = 14y + 2 \Rightarrow 3^{3k+2} - 1 = 7z + 3$.

Logo, se n é da forma $n = 3k + 2$, então 7 não divide $2^n - 1$.

b) I) $2^{3k} - 1 = 7x \Rightarrow 2^{3k} + 1 = 7x + 2$

II) $2^{3k+1} - 1 = 7y + 1 \Rightarrow 2^{3k+1} + 1 = 7y + 3$

III) $3^{3k+2} - 1 = 7z + 3 \Rightarrow 3^{3k+2} + 1 = 7z + 5$

Assim, 7 nunca divide $2^n + 1$.

13) (Olimpíada da Áustria-Polônia-93) Determine todos os números naturais x, $y \geq 1$ tais que $2^x - 3^y = 7$.

Solução:

Analisemos a expressão módulo 3.

i) $2 \equiv -1 \pmod{3} \Rightarrow 2^x \equiv (-1)^x \pmod{3}$

ii) $3 \equiv 0 \pmod{3} \Rightarrow 3^y \equiv 0 \pmod{3}$

Assim, $2^x - 3^y = 7 \Rightarrow 2^x - 3^y \equiv 7 \pmod{3} \Rightarrow (-1)^x \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow$ x é par

Analisemos agora a expressão módulo 8.

i) $3^2 \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3^{2k} \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3^{2k+1} \equiv 3 \pmod{8}$

Como $2^x - 3^y = 7 \Rightarrow 2^x - 3^y \equiv -1 \pmod{8}$

Se $x = 0 \Rightarrow 2^x \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow 3^y \equiv 2 \pmod{8}$ impossível

Se $x = 2 \Rightarrow 2^x \equiv 4 \pmod{8} \Rightarrow 3^y \equiv 5 \pmod{8}$ impossível

Se $x \geq 3 \Rightarrow 2^x \equiv 0 \pmod{8} \Rightarrow 3^y \equiv 1 \pmod{8} \Rightarrow$ y é par

Deste modo concluímos que x e y são pares, $x \geq 4$. Portanto, $x = 2n$ e $y = 2m$, n e m números naturais.

Assim: $2^x - 3^y = 7 \Rightarrow 2^{2n} - 3^{2m} = 7 \Rightarrow (2^n - 3^m)(2^n + 3^m) = 7 \Rightarrow 2^n - 3^m = 1$ e $2^n + 3^m = 7 \Rightarrow$

i) $2.2^n = 8 \Rightarrow 2^{n+1} = 8 \Rightarrow n = 2 \Rightarrow x = 4$.

ii) $2.3^m = 6 \Rightarrow 3^m = 3 \Rightarrow m = 1 \Rightarrow y = 2$

Assim, $x = 4$ e $y = 2$ é a única solução.

14) (Olimpíada da Espanha-2004) Determinar os quatro últimos dígitos de 3^{2004}.

Solução:

Temos que $3^2 = 9 = 10 - 1$. Graças a esta expressão, a fórmula do binômio de Newton nos permite simplificar os cálculos:

$3^{2004} \equiv (10-1)^{1002} \pmod{10^4} \Rightarrow 3^{2004} \equiv -C_{1002,3}.10^3 + C_{1002,2}.10^2 - C_{1002,1}.10 + 1 \pmod{10^4}$

Note que:

$$C_{1002,3}.10^3 = \frac{1002.1001.1000}{6}.10^3 = 167(1000+1)10^6$$

$$C_{1002,2}.10^2 = \frac{1002.1001}{2}.10^2 = (500+1)(1000+1)100$$

$C_{1002,1}.10 = 1002.10 = (1000+2)10 = 10^4 + 20$

$3^{2004} \equiv 100 - 20 + 1 \pmod{10^4} \Rightarrow 3^{2004} \equiv 81 \pmod{10^4}$, ou seja, os últimos quatro dígitos de 3^{2004} são 0081

15) Para que valores de n, $5^n + n^6$ é divisível por 13?

Solução:

Inicialmente note que:

$5^2 \equiv -1 \pmod{13} \Rightarrow 5^{2k} \equiv (-1)^k \pmod{13} \Rightarrow$

$5^{4k} \equiv 1 \pmod{13}$ $5^{4k+1} \equiv 5 \pmod{13}$ $5^{4k+2} \equiv -1 \pmod{13}$ $5^{4k+3} \equiv -5 \pmod{13}$

Análise da divisibilidade de n^6 por 13:

se $n \equiv 0 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv 0 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 1 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv 1 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 2 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv -1 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 3 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv 1 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 4 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv 1 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 5 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv -1 \pmod{13}$

se $n \equiv \pm 6 \pmod{13} \Rightarrow n^6 \equiv -1 \pmod{13}$

Pelos valores encontrados, obteremos resto 0 quando tivermos um resto 1 de 5^n com um -1 de n^6 ou um resto -1 de 5^n com um 1 de n^6.

Vejamos as possibilidades:

i) $n = 4a$ e $n = 13b \pm 2 \Rightarrow n = 52k + 24$ ou $n = 52k + 28$

ii) $n = 4a$ e $n = 13b \pm 5 \Rightarrow n = 52k + 8$ ou $n = 52k + 44$

iii) $n = 4a$ e $n = 13b \pm 6 \Rightarrow n = 52k + 20$ ou $n = 52k + 32$

iv) $n = 4a + 2$ e $n = 13b \pm 1 \Rightarrow n = 52k + 38$ ou $n = 52k + 14$

v) $n = 4a + 2$ e $n = 13b \pm 3 \Rightarrow n = 52k + 10$ ou $n = 52k + 42$

vi) $n = 4a + 2$ e $n = 13b \pm 4 \Rightarrow n = 52k + 30$ ou $n = 52k + 22$

16) Para que valores de n $1^n - 2^n + 3^n + 4^n$ é divisível por 5?

Solução:

i) $4 \equiv -1 \pmod{5} \Rightarrow 4^n \equiv (-1)^n \pmod{5}$

ii) $3 \equiv -2 \pmod{5} \Rightarrow 3^n \equiv (-2)^n \pmod{5}$

Então: $1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1 + 2^n + (-2)^n + (-1)^n \pmod{5} \Rightarrow$

$1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv [1 + (-1)^n] + [2^n + (-2)^n] \pmod{5}$

Se n é ímpar, então temos que $(-1)^n = -1$ e $(-2)^n = -2^n$, ou seja, $1^n + 2^n - 3^n + 4^n$ é divisível por 5.

Se n é da forma $n = 4k$, temos:

$1^n + 2^n - 3^n + 4^n \equiv 1 + 1^n + 16^k + 16^k \pmod{5} \Rightarrow 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 2 + 2.16^k \pmod{5}$

Como $16 \equiv 1 \pmod{5}$ então $16^k \equiv 1 \pmod{5} \Rightarrow 1^n - 2^n + 3^n + 4^n \equiv 4 \pmod{5}$

Se n é da forma $n = 4k + 2$, temos: $1^n - 2^n + 3^n + 4^n \equiv 1 + 1 - 4^{2k+1} - 4^{2k+1} \pmod{5} \Rightarrow$

$1^n + 2^n - 3^n + 4^n \equiv 2 + 8.16^k \pmod{5} \Rightarrow 1^n + 2^n + 3^n + 4^n \equiv 10 \equiv 0 \pmod{5}$

Portanto, $1^n + 2^n + 3^n + 4^n$ é divisível por 5 quando n é ímpar ou deixa resto 2 na divisão por 4.

9.2. SISTEMAS COMPLETOS DE RESTOS

Chama-se sistema completo de restos módulo m todo conjunto $S = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$ de m inteiros tal que um elemento qualquer a é congruente módulo m a um único elemento de S.
Assim, por exemplo, cada um dos conjuntos: $\{1, 2, 3\}$, $\{0, 1, 2\}$, $\{-1, 0, 1\}$, $\{1, 5, 9\}$
É um sistema completo de restos módulo 3.

9.2.1. Teorema: O conjunto $S = \{0, 1, 2, ..., m - 1\}$ é um sistema completo de restos módulo m.

9.2.2. Corolário: Se $S = \{r_1, r_2, ..., r_m\}$ é um sistema completo de restos módulo m, então os elementos de S são congruentes módulo m aos inteiros $0, 1, 2, ..., m - 1$, tomados numa certa ordem.

Exemplos:

1) Mostrar que o conjunto $S = \{-2, -1, 0, 1, 2\}$ é um sistema completo de restos módulo 5.
Solução:
Um inteiro qualquer a é congruente módulo 5 a um único elemento do conjunto $\{0, 1, 2, 3, 4\}$, isto é:
$a \equiv k \pmod 5$, com $0 \le k \le 4$
Por outro lado, os elementos de S são congruentes módulo 5 aos inteiros $0, 1, 2, 3, 4$, tomados numa certa ordem, pois temos:
$-2 \equiv 3 \pmod 5$, $-1 \equiv 4 \pmod 5$, $0 \equiv 0 \pmod 5$, $1 \equiv 1 \pmod 5$, $2 \equiv 2 \pmod 5$
Logo o inteiro a é congruente módulo 5 a um único elemento do conjunto S, e por conseguinte este conjunto é um sistema completo de restos módulo 5.

2) Para todo inteiro positivo n, prove que existe um único número N de n dígitos tais que:
i) N é formado somente com os dígitos 1 e 2;
ii) N é divisível por 2^n.
Solução:
Com os dígitos 1 e 2 podemos formar exatamente 2^n números inteiros distintos de n dígitos. Provemos agora que estes números formam um sistema completo de restos módulo 2^n.
Sejam N_1 e N_2 dois destes números, formados pelos dígitos 1 e 2. Contando da direita para a esquerda, considere o primeiro dígito onde N_1 e N_2 diferem, ou seja, quando acontece pela primeira vez que um deles possui o dígito 1 e o outro 2. Considere esta como sendo a k-ésima posição, $0 \le k \le n - 1$. Como os primeiros $k - 1$ dígitos de N_1 e N_2 são iguais, então quando calcularmos $N_1 - N_2$ obteremos um número que inicial com $k - 1$ zeros, e o dígito de ordem k é 1.
Assim, $N_1 - N_2 = ...1000...000 \Rightarrow N_1 - N_2 \equiv 10^k \pmod{10^{k+1}} \Rightarrow$
$N_1 - N_2 = q.10^{k+1} + 10^k = (q.5^{k+1})(2^{k+1}) + 2^k.5^k \Rightarrow N_1 - N_2 \equiv 2^k 5^k \pmod{2^{k+1}}$, entretanto $2^k 5^k$ não é divisível por 2^{k+1}, implicando que N_1 e N_2 não deixam o mesmo resto na divisão por 2^n.
Como N_1 e N_2 são dois números aleatórios entre os 2^n números de n dígitos que podemos formar com os dígitos 1 e 2, então todos estes 2^n números deixam restos diferentes na divisão por 2^n. Como existem 2^n restos módulo 2^n $(0, 1, 2, ..., 2^n)$, estes números formam um sistema completo de restos módulo 2^n. Assim, algum deles (e somente um) apresenta resto 0 na divisão por 2^n.

Exercícios

1) O último dígito de $3^{2001} - 2^{2001}$ vale:
a) 1 b) 3 c) 5 d) 7 e) 9

2) Mostre que $2222^{5555} + 5555^{2222}$ é divisível por 7.

3) Demonstre que $1492^n - 1770^n - 1863^n + 2141^n$ é divisível por 1946.

4) Demostrar que para todo n natural verifica-se: $3^{2n+2} + 2^{6n+1} \equiv 0 \pmod{11}$.

5) Demonstrar que $A_n = 5^n + 2.3^{n-1} + 1$, é múltiplo de 8 para todo inteiro positivo n.

6) Prove que se n é um inteiro não negativo, então: $17 \mid 2^{7n+1} + 3^{2n+1} + 5^{10n+1} + 7^{6n+1}$.

7) Prove que para todos os inteiros positivos n, $1^n + 8^n - 3^n - 6^n$ é divisível por 10.

8) Seja n um inteiro não negativo. Prove que o número formado colocando 2^n e 2^{n+1} lado a lado em qualquer ordem é um múltiplo de 3.

9) Achar os restos das divisões de 2^{50} e 41^{65} por 7.

10) Demonstrar que, se $n > 6$ é um número perfeito par, então n é congruente a 1 (mod. 6).

11) Calcular o resto da divisão por 8 de $4365^{43} \times 7937^{67}$.

12) Mostre que:
(i) $2^{2x+1} + 1$ é divisível por 3;
(ii) Se $n > 0$, 7 não divide $2^n + 1$;
(iii) $3^{6n} - 2^{6n}$ é divisível por 35;
(iv) $(2903)^n - (803)^n - (464)^n + (261)^n$ é divisível por 1897.

13) Mostre que $\frac{3^{7^7} - 1}{2}$ é ímpar e composto.

14) Prove que $36^{36} + 41^{41}$ é divisível por 77.

15) Prove que:
a) $19^{19} + 69^{69}$ é divisível por 44;
b) $2^{70} + 3^{70}$ é divisível por 13.

16) Demonstrar que 64 divide $7^{2n} + 16n - 1$ para todo n inteiro positivo.

17) Prove que o número $5^{5k+1} + 4^{5k+2} + 3^{5k}$ é divisível por 11, para todo número natural k.

18) O número $3^{105} + 4^{105}$ é divisível por 13, 49, 181 e 379, e não é divisível por 5 ou 11. Como este resultado pode ser confirmado?

19) Determine todos os membros da seqüência $a_n = 3^{2n-1} + 2^{n-1}$ $(n \in N)$ que são quadrados perfeitos de algum inteiro positivo.

20) (Colégio Naval-83) O resto da divisão por 11 do resultado da expressão:
$1211^{20} + 9119^{32} \times 343^{20}$, é
(A) 9 (B) 1 (C) 10 (D) 6 (E) 7

21) (Colégio Naval-84) Sendo $x^2 = 343$, $y^3 = 49^2$ e $z^n = 7^5$, o algarismo das unidades simples do resultado de $\left(\frac{xy}{z}\right)^{24}$ é
(A) 1 (B) 3 (C) 5 (D) 7 (E) 9

22) (Colégio Naval-95) Sabendo que o resultado de 12 x 11 x 10 x ... x 3 x 2 x 1 + 14 é divisível por 13. Qual o resto da divisão do número 13 x 12 x .... x 3 x 2 x 1 por 169?
a) 143 b) 149 c) 153 d) 156 e) 162

23) (IME-87) Sejam a, b e c números inteiros tais que $100a + 10b + c$ seja divisível por 109. Mostre que $(9a - c)^2 + 9b^2$ também é divisível por 109.

Questões de Olimpíadas

24) (Problem Solving-Strategies) Prove que se m termina em 5 então $1991 \mid 12^m + 9^m + 8^m + 6^m$.

25) (500 Mathematical Challenges) Quais são os últimos 3 dígitos de $7^{7^{7^{7}}}$?

26) (Rússia) Determine os dois últimos dígitos de $14^{14^{14}}$.

27) (Rússia) Qual é o último dígito do número $(\ldots(((7^7)^7)^7)\ldots^7)$, onde existem 1000 potências de 7? Quais são os dois últimos dígitos?

28) (Rio Grande do Norte-95) O algarismo das unidades do número 1993^{1995} é:

29) (Goiás-99) a) Estude o comportamento do resto da divisão por 7 de $2^x - x^2$ sendo x um número inteiro positivo menor ou igual a 10000.
b) Quantos são os inteiros positivos $x \leq 10000$ tais que a diferença $2^x - x^2$ não é divisível por 7?

30) (Ceará-2001) Achar o menor natural n tal que 2001 é a soma dos quadrados de n inteiros ímpares. Justifique sua solução.

31) (Pará-2003) Determine o algarismo das unidades de $1^1 - 2^2 + 3^3 + 4^4 + 5^5 + ... + 98^{98} + 99^{99}$.

32) (OBM-84 banco) Mostre que nenhum número inteiro da forma $1 + 4^n$ é divisível por 3.

33) (OBM-2001 Nível 1) Seja N o número inteiro positivo dado por $N = 1^2 + 2^2 + 3^2 + 4^2 + ... + (196883)^2$. Qual é o algarismo das unidades de N?

34) (OBM-2000 Nível 2) É possível encontrar duas potências de 2, distintas e com o mesmo número de algarismos, tais que uma possa ser obtida através de uma reordenação dos dígitos da outra?

35) (OBM-2003) Seja $n = 9867$. Se você calculasse $n^3 - n^2$ você encontraria um número cujo algarismo das unidades é:
A) 0 B) 2 C) 4 D) 6 E) 8

36) (Argentina) Determine o algarismo m tal que $888...88\,m\,999...99$ (50 algarismos 8 e 50 algarismos 9) seja divisível por 7.

37) (Argentina-95) Achar o resto da divisão de 111...111 (com 1995 dígitos 1) por 1001.

38) (Número de Ouro-97) Para que valores de n a representação decimal de 11^n tem seus últimos dois dígitos iguais? E seus últimos três dígitos iguais?

39) (Alberta Competition-98) Wei escreve uma lista, em ordem crescente, de todo os inteiros positivos b com a propriedade de que b e 2^b possuem o mesmo dígito das unidades. Qual é o 1998^{o} número que Wei escreve?

40) (Hungria-47) Prove que $46^{2n+1} + 296 \cdot 13^{2n+1}$ é divisível por 1947.

41) (Manhattan-97) Pode a soma dos dígitos de um número quadrado perfeito ser igual a 1970?

42) (Manhattan-2000) Quantos zeros existe no final do número $9^{999} + 1$?

43) (Furman University-98) O dígito das dezenas de 2^{100} é:
a) 4 b) 5 c) 6 d) 7 e) nda

44) (University of South Carolina-86) O dígito das unidades de $2^{3^{4^{5^{6^7}}}}$ é:
a) 1 b) 2 c) 4 d) 6 e) 8

45) (Catonsville-94) Considere o número 6^{1994}. É fácil ver que o último dígito é 6, desde que 6 elevado a alguma potência sempre termina em 6. Qual é o próximo dígito (o das dezenas) em 6^{1994}?
a) 1 b) 3 c) 5 d) 9

46) (Catonsville-92) Se A é a soma dos dígitos de 1992^{1992} e B é a soma dos dígitos de A, qual é a soma dos dígitos de B?
a) 3 b) 6 c) 9 d) 11

47) (UNCC-95) Se $2^{1000} = 5m + k$, onde k e m são inteiros e $0 \leq k \leq 4$, então k é igual a:

48) (Bay Area-99) Prove que $1993^{1993} + 1994^{1994} + 1995^{1995} + 1996^{1996}$ é divisível por 10.

49) (México-92) Mostre que 100 divide $1 + 11^{11} + 111^{111} + ... + 1111111111^{1111111111}$.

50) (AIME-83) Qual o resto da divisão de $6^{83} + 8^{63}$ por 49?

51) (Bélgica-2000) $\sqrt{2000^{2000}}$ é um número que termina com uma grande quantidade de zeros. Andando da direita para a esquerda, o primeiro dígito não nulo é:
a) 2 b) 4 c) 6 d) 8 e) ímpar

52) (Inglaterra-76) Prove que se n é um inteiro não-negativo, então $19.8^n + 17$ não é um número primo.

53) (Inglaterra-2000) Mostre que para cada inteiro positivo n, $121^n - 25^n + 1900^n - (-4)^n$ é divisível por 2000.

54) (Espanha-2000) Considere a seqüência definida como $a_1 = 3$, e $a_{n+1} = a_n + a_n^2$. Determine as duas últimas cifras de a_{2000}.

55) (Espanha-2004) Determinar todas as possíveis formas de escrever 2003 como a soma dos quadrados de números inteiros positivos.

56) (Itália-97) Qual o dígitos da unidade do número $2^{3^{4^5}}$.

57) (Itália-99) Qual o dígito das unidades do número $2^{2^1} + 2^{2^2} + 2^{2^3} - 2^{2^4} + ... + 2^{2^{1999}}$?

58) (Suécia-63) Qual o resto quando dividimos $1234^{567} + 89^{1911}$ por 12?

59) (Suécia-92) $(19^{92} - 91^{29})/90$ é um inteiro?

60) (Rússia-87) Prove que $(1^{1987} + 2^{1987} + ... + n^{1987})$ não é divisível por $(n + 2)$.

61) (Eslovênia-2001) Determine todos os números primos da forma 1010101...101.

62) (Macedônia-97) Para quais números naturais n a soma $n^2 + (n + 1)^2 + (n + 2)^2 + (n + 3)^2$ é divisível por 10?

63) (Vietnam-74) Determine os últimos dois dígitos de $13^{12^{11^{\cdot^{\cdot^{\cdot^{2}}}}}}$.

64) (Irã-94) Suponha que p é um número primo e maior que 3. Prove que $7^p - 6^p - 1$ é divisível por 43.

65) (Hong Kong-97) Determine o menor inteiro positivo n tal que $1997^n - 1$ é divisível por 2^{1998}.

66) (Hong Kong-90) Qual é o resto quando $1^3 + 2^3 + 3^3 + 4^3 + ... + 1990^3$ é divisível por 7?

67) (Báltica-93) Prove que para todo inteiro positivo ímpar n, $n^{12} - n^8 - n^4 + 1$ é divisível por 2^9.

68) (Torneio das Cidades-93) Determine todas as potências de 2 que são obtidas pela eliminação do primeiro dígito de outra potência de 2.

69) (Rússia) Quais inteiros podem ser quadrados perfeitos e terminarem com os 4 últimos dígitos idênticos?

70) (Uruguai-2001) Seja a_n o dígito das unidades do número $1997 + 1997^2 + 1997^3 + ... + 1997^{2n+1}$. Calcular a soma $a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_{1997}$.

71) (OBM-2004 Nível 1) Dizemos que um número natural é *composto* quando pode ser escrito como produto de dois números naturais maiores que 1. Assim, por exemplo, 91 é composto porque podemos escrever $91 = 7 \times 13$. Mostre que o número $2^{(2^{2004}+2)} + 1$ é composto.

72) (Berkeley Math Circles-99) Prove que existem infinitos termos na progressão aritmética 8, 21, 34, 47, ... que são formados somente pelo dígito 9, ou seja, da forma 999...99.

73) (Inglaterra-98) Sejam $a_1 = 19$, $a_2 = 98$. Para $n \geq 1$, defini-se a_{n+2} como o resto de $a_n + a_{n+1}$ quando dividido por 100. Qual é o resto quando $a_1^2 + a_2^2 + ... + a_{1998}^2$ é dividido por 8?

74) (Argentina-99) Determinar quantos pares (a, b) de números inteiros com $1 \leq a \leq 100$, $1 \leq b \leq 100$, são tais que $a^3 + b^3$ é múltiplo de 7.

75) (Novo México-93) a) Determine o resto quando 1993^2 é dividido por 9.
b) Para algum expoente n, nós temos que $1993^n = 15777A7325840B$, onde foram omitidos dois dígitos e trocados por A e B. Determine A, B e n.

76) (Manhattan-97) Prove que 111..... 111 (81 uns) é divisível por 81.

77) (Rio Grande do Sul-99) Prove que $3^{2N+2} - 8N - 9$ é divisível por 64 para todo N inteiro positivo.

78) (International Talent Search) Calcule o resto quando 1776^{1492} é dividido por 2000.

79) (International Talent Search) Prove que se n é um inteiro positivo ímpar, então $N = 2269^n - 1779^n + 1730^n - 1776^n$ é um inteiro múltiplo de 2001.

FUNÇÃO MÁXIMO INTEIRO

Seja x um número real. Denota-se por [x] o maior inteiro menor ou igual a x. Esta função [x] é chamada de função máximo inteiro ou função degrau.

Exemplos: $[2] = 2$, $[3.14] = 3$, $[-3,14] = -4$, $[-\sqrt{3}] = -2$

10.1. PROPRIEDADES:

(1) $x = [x] + \theta$; $0 \le \theta < 1$

Demonstração:

Se $[x]$ é o maior inteiro menor ou igual a x então $0 \le x - [x] < 1$.

(2) $x - 1 < [x] \le x < [x] + 1$, $x \in \Re$

Demonstração:

Se $0 \le x - [x] < 1$ então temos que $[x] \le x < [x] + 1$.

Por outro lado: $0 \le x - [x] < 1 \Rightarrow -1 < [x] - x \le 0 \Rightarrow x - 1 < [x] \le x \Rightarrow x - 1 < [x] \le x < [x] + 1$.

(3) $[n + \theta] = n$, **n inteiro e** $0 \le \theta < 1$

Demonstração:

Se n é inteiro $0 \le \theta < 1$ então $n \le n + \theta < n + 1 \Rightarrow [n + \theta] = n$.

(4) $\left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{[x]}{m}\right]$, $x \in \Re$, $m \in Z_+^*$

Demonstração:

Sabemos que $x = [x] + \theta$, com $0 \le \theta < 1$. Assim: $\left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{[x]+\theta}{m}\right] = \left[\frac{[x]}{m} + \frac{\theta}{m}\right]$.

Como $0 \le \theta < 1$ e $m \in Z_+^*$ então $0 \le \frac{\theta}{m} < 1$. Pela propriedade 3: $\left[\frac{x}{m}\right] = \left[\frac{[x]}{m}\right]$.

(5) $[n + x] = n + [x]$, $n \in Z$, $x \in \Re$

Demonstração:

Pela propriedade 1: $x = [x] + 0$ $(0 \le x < 1) \Rightarrow [n + x] = [n + [x] + 0]$

Como $[x] \in Z$, então pela propriedade 3: $[n + [x] + 0] = n + [x]$

Exemplos:

1) Prove que $\left[\sqrt[k]{x}\right] = \left[\sqrt[k]{[x]}\right]$ $x \ge 0$, $k \in Z_+^*$.

Solução:

Seja m um número inteiro tal que: $m^k \le [x] \le x < (m + 1)^k \Rightarrow m \le \sqrt[k]{[x]} \le \sqrt[k]{x} < m + 1 \Rightarrow \left[\sqrt[k]{x}\right] = \left[\sqrt[k]{[x]}\right]$

2) (Olimpíada da Bélgica-99) $[x]$ designa o maior inteiro menor ou igual a x. O conjunto de soluções em $\Re$ da equação $[x + 1] = \left[\frac{x + 2}{2}\right]$ é:

a) um intervalo aberto b) um intervalo meio aberto c) um intervalo fechado
d) unitário e) vazio

Solução:

Notemos que: $[x + 1] = [x/2 + 1] \Rightarrow [x] + 1 = [x/2] + 1 \Rightarrow [x] = [x/2] \Rightarrow -1 \le x < 1 \Rightarrow [-1, 1[$

Ou seja, temos um intervalo meio aberto.

3) (OBM-2000) A notação $\lfloor x \rfloor$ significa o maior inteiro que não supera x. Por exemplo, $\lfloor 3,5 \rfloor = 3$ e $\lfloor 5 \rfloor = 5$. O número de inteiros positivos x para os quais $\left\lfloor x^{\frac{1}{2}} \right\rfloor + \left\lfloor x^{\frac{1}{3}} \right\rfloor = 10$ é:

a) 11 b) 12 c) 13 d) 14 e) 15

Solução:

Para $x \le 48$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor \le 6$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor \le 3$. Para $49 \le x \le 63$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor = 7$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor = 3$. Para $x \ge 64$, temos $\lfloor x^{1/2} \rfloor \ge 8$ e $\lfloor x^{1/3} \rfloor \ge 4$. Assim, as soluções são todos os inteiros entre 49 e 63, que são 15 ao todo

4) Calcule o valor de $\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}}\right]$.

Solução:

$$\sqrt{k+1} - \sqrt{k} = \frac{\left(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}\right)\left(\sqrt{k+1} + \sqrt{k}\right)}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}$$

Como para $k = 1, 2, 3, ...$ temos $\sqrt{k+1} > \sqrt{k} \Rightarrow \frac{1}{2\sqrt{k+1}} < \sqrt{k+1} - \sqrt{k} < \frac{1}{2\sqrt{k}}$.

Aplicando, para a inequação da esquerda, $k = 0, 1, 2, ..., n-1$, e somando todas estas inequações, temos:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$$

Aplicando, para a inequação da direita, $k = 1, 2, ..., n$, e somando todas estas inequações, temos:

$$1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} > 2\sqrt{n+1} - 2$$

Ou seja: $2\sqrt{n+1} - 2 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 2\sqrt{n} - 1$

Aplicando $n = 1.000.000$, e sabendo que $\sqrt{1.000.001} \cong \sqrt{1.000.000} = 1.000$, temos:

$$1998 < 1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{n}} < 1999$$

Assim, podemos afirmar que $\left[1 + \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} + ... + \frac{1}{\sqrt{1.000.000}}\right] = 1998$

5) (Furman University-96) Calcule: $\left\lfloor \sqrt[3]{1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{2} \right\rfloor + ... + \left\lfloor \sqrt[3]{124} \right\rfloor$.

a) 401 b) 402 c) 403 d) 404 e) nda

Solução:

se $1 \le x \le 7 \Rightarrow \lfloor x^{1/3} \rfloor = 1$; se $8 \le x \le 26 \Rightarrow \lfloor x^{1/3} \rfloor = 2$; se $27 \le x \le 64 \Rightarrow \lfloor x^{1/3} \rfloor = 3$.

se $64 \le x \le 124 \Rightarrow \lfloor x^{1/3} \rfloor = 4$.

Assim: $S = 1.(7 - 1 + 1) + 2.(26 - 8 + 1) + 3.(64 - 27 + 1) + 4.(124 - 64 + 1) \Rightarrow$

$S = 7 + 38 + 114 + 244 \Rightarrow S = 403$.

6) (Olimpíada da Argentina-97) Achar todos os números naturais n tais que $\lfloor n^2/5 \rfloor$ é um número primo. Observação: Os colchetes indicam a parte inteira do número que encerram. Por exemplo, $\lfloor 100/5 \rfloor = 20$, $\lfloor 121/5 \rfloor = 4$, etc.

Solução:

i) $n = 5k \Rightarrow \lfloor n^2/5 \rfloor = \lfloor 25k^2/5 \rfloor = \lfloor 5k^2 \rfloor = 5k^2 \Rightarrow \lfloor n^2/5 \rfloor$ é primo somente quando $k = 1 \Rightarrow \lfloor n^2/5 \rfloor = 5$

ii) $n = 5k \pm 1 \Rightarrow \lfloor n^2/5 \rfloor = \lfloor (25k^2 \pm 10k + 1)/5 \rfloor = \lfloor 5k^2 \pm 2k + 1/5 \rfloor = 5k^2 \pm 2k = k(5k \pm 2) \Rightarrow$

$\lfloor n^2/5 \rfloor$ é primo quando $k = 1 \Rightarrow \lfloor n^2/5 \rfloor = 3$ ou $\lfloor n^2/5 \rfloor = 3 \Rightarrow n = 6$ ou $n = 4$

iii) $n = 5k \pm 2 \Rightarrow \lfloor n^2/5 \rfloor = \lfloor (25k^2 \pm 20k + 4)/5 \rfloor = \lfloor 5k^2 \pm 4k + 4/5 \rfloor = 5k^2 \pm 4k = k(5k \pm 4) \Rightarrow$ nunca é primo

Assim temos somente as soluções $n = 4$ ou $n = 6$.

7) (Olimpíada da Rússia-89) Qual é o menor número natural n para o qual a equação $\left[\frac{10^n}{x}\right] = 1989$ possui uma solução inteira x?

Solução:

A equação dada é equivalente a $1989 \le \frac{10^n}{x} < 1990 \Rightarrow \frac{10^n}{1990} < x \le \frac{10^n}{1989} \Rightarrow$

$10^n.(0,0005025...) < x \le 10^n.(0,005027...)$

Desta forma, 1/990 e 1/1989 possuem, depois da vírgula, o primeiro dígito somente na sétima cada decimal. Assim, para $n \ge 7$ a equação possui solução.

Podemos observar que para n = 7 temos duas soluções: $x_1 = 5026$ e $x_2 = 5027$.

8) (Olimpíada da Inglaterra-84) Seja N um inteiro positivo. Determine, com justificativa, o número de soluções x no intervalo $1 \le x \le N$ da equação $x^2 - [x^2] = (x - [x])^2$, onde [x] indica o maior inteiro $\le x$.

Solução:

Suponhamos que x é um inteiro, ou seja, [x] = x. Desta forma, tanto $x^2 - [x^2]$ quanto $(x - [x])^2$ vão ser iguais a zero. Assim, x inteiro é uma solução da equação. Como $1 \le x \le N$, temos N soluções para este caso. Suponhamos agora que x não é inteiro, ou seja, [x] = n, onde n é o maior inteiro menor que x. Então x = n + r, onde $0 < r < 1$. Assim:

i) $(x - [x])^2 = (n + r - n)^2 = r^2$

ii) $x^2 - [x^2] = n^2 + 2nr + r^2 - [x^2]$

Como $x^2 - [x^2] = (x - [x])^2 \Rightarrow n^2 + 2nr + r^2 - [x^2] = r^2 \Rightarrow [x^2] = n^2 + 2nr$

Analisemos esta expressão para alguns valores de n:

i) $n = 1 \Rightarrow [x^2] = 1 + 2r$, como $0 < r < 1$, teremos $1 + 2r$ inteiro somente quando r = 1/2

Portanto, para n = 1 temos somente uma solução, que é x = 1 + 1/2 = 1,5

ii) $n = 2 \Rightarrow [x^2] = 2 + 4r$, como $0 < r < 1$, teremos $2 + 4r$ inteiro quando r = 1/4 ou r = 1/2 ou r = 3/4

Portanto, para n = 2 temos três soluções, que são x = 2,25 x = 2,5 x = 2,75

iii) $n = 3 \Rightarrow [x^2] = 3 + 6r$, como $0 < r < 1$, teremos $3 + 6r$ inteiro quando r = 1/6 ou r = 1/3 ou r = 1/2 ou r = 2/3 ou r = 5/6

Portanto, para n = 3 temos cinco soluções.

No caso geral (para um inteiro n qualquer), $[x^2] = n^2 + 2nr$ é inteiro quando 2nr for inteiro, que ocorre quando 1/r divide 2n.

Como $\frac{1}{r} > 1$, os valores que pode assumir $\frac{1}{r}$ são: $\frac{1}{r} = \frac{2n}{i}$, onde $1 \le i \le 2n - 1$, onde existem exatamente 2n – 1 valores possíveis para 1/r, e, conseqüentemente, 2n – 1 valores possíveis para r.

Assim, notamos que para um inteiro n qualquer, existem 2n – 1 soluções para a equação $[x^2] = n^2 + 2nr$.

Portanto, como $1 \le x \le N$, temos um total de soluções que é dado por:

$S = 1 + 3 + 5 + ... + 2N - 1 = N \Rightarrow S = N^2 + N$.

10.2. EXPOENTE DE UM PRIMO NA FATORAÇÃO DE N!

Teorema 12.1: O expoente de um primo p na fatoração, em fatores primos, de n!, onde n é um número natural, é: $a = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^2}\right] + \left[\frac{n}{p^3}\right] + \ldots$ (1)

Demonstração:
Sejam n e k dois números naturais e p um número primo ≤ n. Os números da seqüência que são divisíveis por p^k são da forma lp^k, onde l é um número natural tal que $lp^k \le n$, ou seja, $l \le n/p^k$. O número de l's é, claramente, igual a $[n/p^k]$.
Por outro lado, é claro que o expoente a de primo p na fatoração em fatores primo do número n! é obtido pela soma do número de termos da seqüência 1, 2, ..., n que são divisíveis por p mais o número de termos que são divisíveis por p^2 mais o número de termos que são divisíveis por p^3 e assim por diante. Esta soma é exatamente igual a (1).
Apesar de (1) aparentar ser uma soma infinita, a partir de um determinado termo da soma teremos $p^k > n$, e assim $[n/p^j] = 0$ para todos os termos tais que $j \ge k$, ou seja, seguintes do termo $[n/p^k]$.

Exemplos:

1) Determine o número de zeros em que termina representação decimal de 1000!.
Solução:
A fatoração de 1000! em fatores primos é da forma: $1000! = 2^a.3^b.5^c...$
O expoente a de 2 na fatoração de 1000! é dado por:

$$a = \left[\frac{1000}{2}\right] + \left[\frac{1000}{2^2}\right] + \left[\frac{1000}{2^3}\right] + \left[\frac{1000}{2^4}\right] + \left[\frac{1000}{2^5}\right] + \left[\frac{1000}{2^6}\right] + \left[\frac{1000}{2^7}\right] + \left[\frac{1000}{2^8}\right] + \left[\frac{1000}{2^9}\right] \Rightarrow$$

$a = 500 + 250 + 125 + 62 + 31 + 15 + 7 + 3 + 1 \Rightarrow a = 994$
O expoente c de 5 na fatoração de 1000! é dado por:

$$c = \left[\frac{1000}{5}\right] + \left[\frac{1000}{5^2}\right] + \left[\frac{1000}{5^3}\right] + \left[\frac{1000}{5^4}\right] \Rightarrow c = 200 + 40 + 8 + 1 \Rightarrow c = 249$$

Como para conseguir um zero no final da representação decimal de 1000! teremos que juntar um termo 2 com um termo 5, e existem menos termos 5 do que termos 2, o número de zeros que termina 1000! é igual ao expoente de 5 na fatoração de 1000!. Assim, 1000! termina em 249 zeros.
Note que, partindo do fato de existirem mais números entre 1 e 1000 divisíveis por 2 do que divisíveis por 5, poderíamos ter calculado somente o expoente de 5 na fatoração de 1000!, uma vez que este valor é o número de zeros que termina 1000!.

2) Determine o maior inteiro x tal que 14^x divide 300!.
Solução:
Como existem mais números, entre 1 e 300, divisíveis por 2 do que divisíveis por 7, o maior inteiro x tal que 14^x divide 300! é igual ao expoente de 7 na fatoração em fatores primos de 300!.

Assim, $x = \left[\frac{300}{7}\right] + \left[\frac{300}{7^2}\right] + \left[\frac{300}{7^3}\right] \Rightarrow x = 42 + 6 + 1 \Rightarrow x = 49.$

3) Determine se o número $\binom{1000}{500} = \frac{1000!}{(500!)^2}$ é divisível por 7.

Solução:
Vamos determinar o expoente de 7 nas fatorações de 1000! e 500!.

$$a = \left[\frac{1000}{7}\right] + \left[\frac{1000}{7^2}\right] + \left[\frac{1000}{7^3}\right] = 142 + 20 + 2 = 164.$$

$$b = \left[\frac{500}{7}\right] + \left[\frac{500}{7^2}\right] + \left[\frac{500}{7^3}\right] = 71 + 10 + 1 = 82.$$

Assim, o expoente de 7 na fatoração de 1000! é 164 e o expoente de 7 na fatoração de 500! é 82. Logo, o expoente de 7 na fatoração de $\frac{1000!}{(500!)^2}$ é 164 – 2.82 = 0. Portanto, podemos afirmar que $\binom{1000}{500}$ não é divisível por 7.

4) (Olimpíada da Argentina-97) Determinar o último dígito antes do conjunto de zeros na representação do número: 19! + 20! + 21! + ... + 96! + 97!.

Solução:

Evidentemente, como na fatoração de n! existem mais potências de 2 do que de 5, o número de zeros de n! corresponde à potência de 5 de n!.

Calculemos, inicialmente, o número de zeros em que terminam 19! e 20!:

$x_{19!} = [19/5] = 3$; $x_{20!} = [20/5] = 4$

Assim, temos que 19! termina em 3 zeros e 20! termina em 4 zeros.

Portanto, na soma fornecida todos os números depois de 19! terminam em mais do que 3 zeros, implicando que o último dígito de 19! + 20! + 21! + ... + 96! + 97! é igual ao último dígito de 19!.

Determinemos a fatoração de 19!, ou seja, $19! = 2^a.3^b.5^3.7^c.11^d.13^e.17^f.19^g$.

$a = [19/2] + [19/2^2] + [19/2^3] + [19/2^4] = 9 + 4 + 2 + 1 = 16$

$b = [19/3] + [19/3^2] = 6 + 2 = 8$

$c = [19/7] = 2$

$d = [19/11] = 1$

$e = [19/13] = 1$

$f = [19/13] = 1$

$g = [19/19] = 1$

Deste modo, $19! = 2^{16}.3^8.5^3.7^2.11.13.17.19 \Rightarrow 19! = 2^{13}.3^8.7^2.11.13.17.19.(2^3.5^3) \Rightarrow$

$19! = (2^{13}.3^8.7^2.11.13.17.19)(1000)$

Assim, o último dígito diferente de 0 de 19! é igual ao dígito das unidades de $N = 2^{13}.3^8.7^2.11.13.17.19$.

i) $2^6 \equiv 4 \pmod{10} \Rightarrow 2^{12} \equiv 6 \pmod{10} \Rightarrow 2^{13} \equiv 2 \pmod{10}$

ii) $3^2 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 3^6 \equiv -1 \pmod{10} \Rightarrow 3^8 \equiv -9 \pmod{10} \Rightarrow 3^8 \equiv 1 \pmod{10}$

iii) $7^2 \equiv 9 \pmod{10}$

iv) $11 \equiv 1 \pmod{10}$

v) $13 \equiv 3 \pmod{10}$

vi) $17 \equiv 7 \pmod{10}$

vii) $19 \equiv 9 \pmod{10}$

Multiplicando estas congruências: $2^{13}.3^8.7^2.11.13.17.19 \equiv 2.1.9.1.3.7.9 \pmod{10} \Rightarrow N \equiv 2 \pmod{10}$

Portanto, o último dígito diferente de 0 de 19! + 20! + 21! + ... + 97! é igual a 2.

10.3. NÚMERO DE DÍGITOS DE UM INTEIRO POSITIVO

Teorema: A quantidade de dígitos de um número inteiro positivo n é igual a $[\log n] + 1$.

Demonstração:

Seja n um inteiro positivo possuindo x dígitos. Assim, podemos afirmar que $10^x < n \leq 10^{x+1}$.

Aplicando logaritmo na base 10 nesta última expressão obtemos: $x < \log n \leq x + 1$.

Assim, podemos afirmar que $[\log n] = x \Rightarrow x = [\log n] + 1$.

Portanto, o número de dígitos x de um inteiro positivo n é igual a: $x = [\log n] + 1$.

Exemplos:

1) (UFPE-2002) Indique quantos dígitos possui o número 2^{64} (quando expresso no sistema de numeração decimal). Use a aproximação: $\log_{10} 2 \cong 0.30$.

Solução:

O número n de dígitos é igual a $n = [\log_{10} 2^{64}] + 1 = [64.\log_{10} 2] + 1 = [(64)(0.30)] + 1 = 19 + 1 = 20$.

2) (Olimpíada da Bélgica-99) A representação decimal de 2^{1999} consiste de m dígitos e a representação decimal de 5^{1999} de n dígitos. A soma $m + n$ é:

a) menor que 1998 b) 1998 c) 1999 d) 2000 e) maior que 2000

Solução:

i) $m = [\log 2^{1999}] + 1 = [1999.\log 2] + 1$

ii) $n = [\log 5^{1999}] + 1 = [1999.\log 5] + 1 = [1999.\log (10/2)] + 1 = [1999(\log 10 - \log 2)] + 1 =$

$= [1999 - 1999.\log 2] + 1 = 1999 + [-1999.\log 2] + 1 =$

Como $[-x] = -[x] + 1 \Rightarrow n = 2000 - [1999.\log 2] - 1 = 1999 - [1999.\log 2]$

iii) $m + n = [1999.\log 2] + 1 + 1999 - [1999.\log 2] \Rightarrow m + n = 2000$

3) (Olimpíada da Suíça-2000) Seja q(n) a soma dos algarismos de n. Qual o valor de $q(q(q(2000^{2000})))$?

Solução:

Como $2000 = 2.10^3 \Rightarrow 2000^{2000} = 2^{2000}.10^{6000}$

Assim: $q(2000^{2000}) = q(2^{2000}.10^{6000}) = q(2^{2000})$.

Seja N(n) o número de dígitos de n: $N(2^{2000}) = [\log 2^{2000}] + 1 = [2000.\log 2] + 1$

Como $\log 2 \cong 0.30103$, então $N(2000^{2000}) = 603$.

Como o maior número que possui 603 dígitos é aquele formado somente por dígitos 9, então:

$q(2^{2000}) < 9(603) \Rightarrow q(2^{2000}) < 5427$

Dentre todos os números menores que 5427, o que possui maior soma dos algarismos é 4999.

Assim: $q(q(2^{2000})) < q(4999) = 4 + 9 + 9 + 9 = 31$.

Dentre todos os números menores que 31, o que possui maior soma dos algarismos é 29.

Assim: $q(q(q(2^{2000}))) < q(29) = 2 + 9 = 11$.

Sabemos também que $n \equiv q(n) \equiv q(q(n)) \equiv q(q(q(n)))$ (mod. 9), ou seja:

$2000^{2000} \equiv (2 + 0 + 0 + 0)^{2000}$ (mod. 9) $\Rightarrow 2000^{2000} \equiv 2^{2000}$ (mod. 9)

$\therefore 2^3 \equiv -1$ (mod. 9) $\Rightarrow (2^3)^{666} \equiv (-1)^{666}$ (mod. 9) $\Rightarrow 2^{1998} \equiv 1$ (mod. 9) $\Rightarrow 2^{2000} \equiv 4$ (mod. 9)

Assim, já obtivemos que: $q(q(q(2000^{2000}))) \equiv 4$ (mod. 9) e $q(q(q(2000^{2000}))) < 11$.

Como o único número menor que 11 que deixa resto 4 na divisão por 9 é 4, então $q(q(q(2000^{2000}))) = 4$.

Exercícios

1) Demonstre que $[\alpha][\beta] \le [\alpha.\beta] \le [\alpha].[\beta] + [\alpha] + [\beta]$, para $\alpha > 0$, $\beta > 0$.

2) Prove que $\left[n\phi + \frac{1}{2}\right] + n = \left[\phi\left[n\phi + \frac{1}{2}\right] + \frac{1}{2}\right]$, onde $\phi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ e $n \in N$.

3) Se x é um número real e n um inteiro positivo, mostre que

$$[x] + \left[x + \frac{1}{n}\right] + \left[x + \frac{2}{n}\right] + \ldots + \left[x + \frac{n-1}{n}\right] = [nx].$$

4) Sejam m, n números reais, mostre que:
$[2x] + [2y] \ge [x] + [x + y] + [y]$.

5) Determinar a mais alta potência de 7 que divide o produto dos 1000 primeiros inteiros positivos.

6) Determinar a mais alta potência de 11 que divide o produto: P = 100 x 101 x 102 x...x 1000.

7) Prove que para todo inteiro positivo n,
$$\left[\frac{n}{3}\right] - \left[\frac{n+2}{6}\right] + \left[\frac{n+4}{6}\right] = \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n+3}{6}\right].$$

8) Prove que:
$$d(1) + d(2) - d(3) + \ldots + d(n) = \left[\frac{n}{1}\right] + \left[\frac{n}{2}\right] + \left[\frac{n}{3}\right] + \ldots + \left[\frac{n}{n}\right]$$
onde d(i) é o número de divisores positivos do número natural i.

9) Prove que para todo número natural n, o inteiro $[(2+\sqrt{3})^n]$ é ímpar.

10) Determine a maior potência de 2 que divide o inteiro $[(1+\sqrt{3})^n]$.

11) (Espírito Santo). Quantos zeros existem no final do número 1997! = 1.2.3.4.5.....1997 ?

12) (OBM Jr.-94) Seja [A] a parte inteira do número A, ou seja, o maior inteiro que é menor ou igual a A.
Por exemplo, [2] = 2, [5,73] = 5, [π] = 3. Seja {A} a parte fracionária do número A, ou seja, {A} = A − [A]. Por exemplo, {4,586} = 0,586, {3} = 0.
a) Para $0 < x < 4$, faça um gráfico da função $f(x) = \{x\}$.
b) Dê um exemplo de um número real positivo x tal que $\{x\} + \left\{\frac{1}{x}\right\} = 1$.

13) (Brasil Preparação Cone Sul-95) Para cada x real, seja [x] o maior inteiro que é menor ou igual a x, {x} a parte fracionária de x ({x} = x − [x]) e (x) o inteiro mais próximo de x, definido por:
$$(x) = \begin{cases} [x], & \text{se } 0 \le \{x\} < 1/2 \\ [x]+1, & \text{se } 1/2 \le \{x\} < 1 \end{cases}.$$
Quantas soluções possui a equação $\{x\} = \frac{x + [x] + (x)}{1995}$?

14) (Argentina-98) Determinar todos os valores possíveis da expressão x − [x/2] − [x/3] − [x/6] ao variar x nos números reais.

15) (Chile-94) Considere o produto de todos os múltiplos positivos de 6 que são menores que 1.000. Encontre o número de zeros que termina este produto.

16) (Itália-96) Quantos dígitos tem o número $(123456789)^{64}$?

17) (Itália-98) Se x é um número real positivo, denota-se com [x] a parte inteira de x, isto é, o máximo inteiro $n \le x$. Calcule o valor da soma:
$$\sum_{n=1}^{1000000} [\sqrt{n}] = [\sqrt{1}] + [\sqrt{2}] + \ldots + [\sqrt{999999}] + [\sqrt{1000000}].$$
(Os alunos podem utilizar, se necessitarem, a seguinte fórmula: $\sum_{i=1}^{k} i^2 = \frac{k(k+1)(2k+1)}{6}$, cuja demonstração não será requerida.)

18) (UNCC-95) Sabe-se que $\log_{10} 3 = 0,4771$, com 4 casas decimais. Quantos dígitos possui a representação decimal de 3^{100}?

19) (Carrol College-97) Se [x] representa o maior inteiro menor ou igual a x, quanto vale: $[\sqrt[4]{1}] + [\sqrt[4]{2}] + \ldots + [\sqrt[4]{625}]$?

20) (Argentina-97) Achar todos os números reais x que verificam $|19x - 97| = 19 - 97x$.

21) (Canadá-81) Prove que não existem soluções reais para:
$\lfloor x \rfloor - \lfloor 2x \rfloor + \lfloor 4x \rfloor + \lfloor 8x \rfloor + \lfloor 16x \rfloor - \lfloor 32x \rfloor = 12345$.

22) (Canadá-87) Prove que:
$\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+1} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{4n+3} \right\rfloor$
para todos os inteiros n.

23) (University of South Carolina-93) Se [x] representa o maior inteiro menor ou igual a x, determine o valor de: $[\log_2 2] + [\log_2 3] + [\log_2 4] + \ldots + [\log_2 99] + [\log_2 100]$
a) 480 b) 481 c) 482 d) 483 e) 484

24) (University of South Carolina-95) O valor de $\log_{10} 2$ é 0,301... . Quantos dígitos decimais possui 5^{80}?
a) 56 b) 57 c) 58 d) 59 e) 60

25) (Rioplatense-2001) Calcular o valor da seguinte soma:
$$\frac{9}{1+\sqrt{2}} + \frac{10-\lfloor\sqrt{2}\rfloor}{\sqrt{2}+\sqrt{3}} + \frac{10-\lfloor\sqrt{3}\rfloor}{\sqrt{3}+\sqrt{4}} + \ldots + \frac{10-\lfloor\sqrt{99}\rfloor}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}.$$

26) (Manhattan-99) Consideremos o produto: 2000.2001.2002...3998. Qual é a maior potência de 2 que divide o produto?

27) (Catonsville-99) Qual é a maior potência de 3 que divide 1999!?
a) 6 b) 666 c) 729 d) 996

28) (Balcânica-98) Determine o número de termos distintos da seqüência finita $[k^2/1998]$, onde $k = 1, 2, \ldots, 1997$ e $[x]$ denota a parte inteira de x.

29) (Argentina-96) Determinar todos os números reais positivos x para os quais se verifica $[x] + [\sqrt{1996x}] = 1996$.

30) (Hungria-1939) Determine a mais alta potência de 2 que divide $2^n!$.

31) (Bélgica-92) Se [a] denota o maior inteiro ≤ a, determine quantas soluções reais possui a seguinte equação: $[2 - x^2] = |2 - x^2|$
a) 0 2) c) 3 d) 5 e) infinitas

32) (Bélgica-93) Seja [x] o maior inteiro menor ou igual a x. Sejam $x, y \in \Re$. Qual das seguintes proposições é verdadeira?
a) $[x + y] = [x] + [y]$ b) $[x - y] = [x] + [y] + 1$
c) $[x + y] > [x] + [y]$ d) $[x - y] \leq [x] + [y]$
e) $[x + y] \leq [x] + [y] + 1$

33) (Bélgica-98) [x] designa o maior inteiro menor ou igual a x. O conjunto de soluções em $\Re$ da equação $[2x] = 3$ é:
a) [1, 3/2[b) [3/2, 2[c) [2, 3[
d) [3, 4[e) [6, 8[

34) (Canadá-98) Determine o número de soluções reais a da equação:
$$\left\lfloor \frac{1}{2}a \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{3}a \right\rfloor + \left\lfloor \frac{1}{5}a \right\rfloor = a.$$

35) (Espanha-90) Designa-se a parte inteira de um número real a, [a], ao maior inteiro menor ou igual que a. Demonstrar que a parte inteira de $(4+\sqrt{11})^n$, com n natural, é um número ímpar.

36) (Catalunha-92) Demonstre que o número $\binom{1992}{1492}$ não é múltiplo de 500.

37) (Inglaterra-75) Dado que x é um inteiro positivo, determine todas as soluções de:
$\left\lfloor \sqrt[3]{1} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{2} \right\rfloor + \left\lfloor \sqrt[3]{3} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \sqrt[3]{x^3 - 1} \right\rfloor = 400$.

38) (Grosman-99) Determine o menor inteiro n para os quais $0 < \sqrt[4]{n} - \lfloor \sqrt[4]{n} \rfloor < 10^{-5}$.

39) (Irã-96) Prove que para todos os números naturais n: $\left\lfloor \sqrt{n} + \sqrt{n+1} + \sqrt{n+2} \right\rfloor = \left\lfloor \sqrt{9n+8} \right\rfloor$.

40) (IMO-68) Para todo número natural n, calcule o valor da soma:
$$\left\lfloor \frac{n+1}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+2}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+4}{8} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n+8}{16} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor + \ldots$$

41) (IMO 83 banco) Mostre que se $n > 2$ é um inteiro e [x] denota o maior inteiro menor ou igual a x, então $\left\lfloor \frac{n(n+1)}{4n-2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{n+1}{4} \right\rfloor$.

42) (Áustria-2001) Prove que $\frac{1}{25} \sum_{k=0}^{2001} \left\lfloor \frac{2^k}{25} \right\rfloor$ é um número natural.

EQUAÇÕES DIAFANTINAS LINEARES

11.1. DEFINIÇÃO:

Uma equação diofantina linear é uma equação da forma $a_1x_1 + a_2x_2 + ... + a_nx_n = c$, onde $x_1, x_2, ..., x_n$ são as incógnitas e $a_1, a_2, ..., a_n$ são inteiros dados. O tipo mais simples de equação diofantina é a equação diofantina linear de duas incógnitas x e y:

$ax + by = c$ onde a, b e c são inteiros dados, sendo $ab \neq 0$.

Se um par de inteiros x_0, y_0 satisfaz $ax_0 + by_0 = c$ então denomina-se que x_0, y_0 é uma solução inteira ou apenas solução da equação $ax + by = c$.

Por exemplo, consideremos a equação diofantina linear com duas incógnitas: $3x + 6y = 18$. Observemos que: $3.4 + 6.1 = 18$ $\quad 3(-6) + 6.6 = 18$ $\quad 3.10 + 6(-2) = 18$ Desta forma, os pares de inteiros: 4 e 1, −6 e 6, 10 e −2 são soluções da equação $3x + 6y = 18$

Existem equações diofantinas lineares com duas incógnitas que não tem solução. Assim, por exemplo, a equação diofantina $2x + 4y = 7$ não tem solução, porque $2x + 4y$ é um inteiro par para quaisquer que sejam os valores inteiros de x e y, enquanto que 7 é um inteiro ímpar.

11.2. CONDIÇÃO DE EXISTÊNCIA DE SOLUÇÃO

A equação diofantina linear $ax + by = c$ tem solução se e somente se d divide c, sendo $d = mdc(a, b)$.

Demonstração:

($\Rightarrow$) Suponhamos que $ax + by = c$ tem uma solução, isto é, que existem inteiros x_0, y_0 tais que $ax_0 + by_0 = c$. Por ser o $mdc(a, b) = d$, existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, e temos:

$c = ax_0 + by_0 = drx_0 + dsy_0 = d(rx_0 + sy_0)$, e como $rx_0 + sy_0$ é um inteiro, segue-se que d divide c.

($\Leftarrow$) Suponhamos que d divide c, isto é, que $c = dt$, onde t é um inteiro.

Por ser o $mdc(a, b) = d$, existem inteiros x_0 e y_0 tais que $d = ax_0 + by_0$, o que implica:

$c = dt = (ax_0 + by_0)t = a(tx_0) + b(ty_0)$, isto é, o par de inteiros: $x = tx_0 = (c/d)x_0$, $u = ty_0 = (c/d)y_0$ é uma solução da equação $ax + by = c$.

11.3. SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO $ax + by = c$.

Teorema 7.2: Se d divide c ($d \mid c$), sendo $d = mdc(a, b)$, e se o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação diofantina linear $ax + by = c$, então todas as outras soluções desta equação são dadas pelas fórmulas: $x = x_0 + \left(\frac{b}{d}\right)t$, $\quad y = y_0 - \left(\frac{a}{d}\right)t$, onde t é um inteiro arbitrário.

Demonstração:

Suponhamos que o par de inteiros x_0, y_0 é uma solução particular da equação $ax + by = c$, e seja x_1, y_1 uma solução qualquer desta equação. Então, temos:

$$ax_0 + by_0 = c = ax_1 + by_1 \Rightarrow a(x_1 - x_0) = b(y_0 - y_1)$$

Como $mdc(a, b) = d$, então existem inteiros r e s tais que $a = dr$ e $b = ds$, com r e s primos entre si.

Substituindo estes valores de a e b na igualdade anterior e cancelando o fator comum d, obtemos:

$$r(x_1 - x_0) = s(y_0 - y_1)$$

Assim sendo, $r \mid s(y_0 - y_1)$, e como o $mdc(r, s) = 1$, segue-se que $r \mid (y_0 - y_1)$, isto é:

$$y_0 - y_1 = rt \quad e \quad x_1 - x_0 = st$$

onde t é um inteiro. Portanto temos as fórmulas:

$$x_1 = x_0 + st = x_0 + (b/d)t \qquad y_1 = y_0 - rt = y_0 - (a/d)t$$

Exemplos:

1) Resolver a equação diofantina linear $14x + 22y = 50$

Solução:

Como o mdc $(14, 22) = 2$ e $2 \mid 50$, então a equação dada tem solução, e por simples inspeção logo se vê que $14.2 + 22.1 = 50$, de modo que o par de inteiros $x_0 = 2$, $y_0 = 1$ é uma solução particular, e por conseguinte todas as demais soluções são dadas pelas fórmulas: $x = 2 + 11t \quad y = 1 - 7t$ onde t é inteiro arbitrário.

2) (OBM-98) Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação $2x + 3y = 101$?

A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

Solução:

Analisando a equação, notamos que a solução com menor valor positivo para x é $x_0 = 1$ e $y_0 = 33$.

$x = x_0 + (b/d)t \quad y = y_0 - (a/d)t \Rightarrow x = 1 + 3t \quad y = 33 - 2t$, t inteiro.

Evidentemente devemos aplicar $t \geq 0$, pois se $t < 0$ teremos $x < 0$.

Assim, o problema é saber até quando $33 - 2t > 0$, pois se $t > 0 \Rightarrow 1 + 37 > 0$.

$33 - 2t > 0 \Rightarrow 2t < 33 \Rightarrow t < 16{,}5$.

Como t é inteiro $\Rightarrow 0 \leq t \leq 16 \Rightarrow$ existem 17 pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação $2x + 3y = 101$.

3) (British Columbia Colleges-98) Determine um conjunto de 3 inteiros positivos consecutivos tais que o menor deles é múltiplo de 5, o segundo é múltiplo de 7 e o maior é múltiplo de 9.

Solução:

Sejam x, $x + 1$, $x + 2$ os inteiros, sendo que $x = 5a \quad x + 1 = 7b \quad x + 2 = 9c$.

Assim:

$(x + 1) - x = 1 \Rightarrow 7b - 5a = 1$, onde uma solução inicial é $b_0 = 3 \quad a_0 = 4 \Rightarrow b = 3 + 5r \quad a = 4 + 7r$

Desta forma $x = 5a = 5(4 + 7r) \Rightarrow x = 20 + 35r$

$\therefore (x + 2) - x = 2 \Rightarrow 9c - 20 - 35r = 2 \Rightarrow 9c - 35r = 22$, onde $c_0 = 18 \quad r_0 = 4 \Rightarrow$

$c = 18 + 35t \quad r = 4 + 9t$

Portanto: $x = 5a = 5(4 + 7r) = 5(4 + 7(4 + 9t)) = 20 + 35(4 + 9t) \Rightarrow x = 160 + 315t$.

Deste modo os inteiros $160 + 315t$, $161 + 315t$, $162 + 315t$ formam a solução geral do problema.

4) (Olimpíada da Noruega-99) Assuma que m e n são inteiros tais que $5m + 6n = 100$. Então, o maior valor possível de m.n é:

a) 60 b) 70 c) 80 d) 90 e) nda

Solução:

Como mdc $(5, 6) = 1$, e $m_0 = 20$ e $n_0 = 0$ é uma solução, temos que todas as soluções são dadas por:

$m = 20 + 6t$ e $n = -5t$

Assim, $m.n = (20 + 6t)(-5t) \Rightarrow m.n = -30t^2 - 100t \Rightarrow 30t^2 + 100t + m.n = 0$

$m.n_{min} = -(10000)/(4(-30)) \Rightarrow m.n_{max} = 83{,}33333$

que não é inteiro, mais já dá uma dica do maior valor inteiro de m.n, pois $m.n \leq 83$.

Para que t seja inteiro, devemos ter o discriminante igual a um quadrado perfeito: $100^2 - 120mn = x^2$

Para $m.n = 83$ temos que $100^2 - 120mn$ não é um quadrado perfeito. O mesmo ocorre para m.n igual a 82 e 81. Para $m.n = 80$ temos $100^2 - 120(80) = 20^2$. Assim: $mn_{max} = 80$.

Conferindo: $30t^2 + 100t + 80 = 0 \Rightarrow 3t^2 + 10t + 8 = 0 \Rightarrow (3t + 4)(t + 2) = 0 \Rightarrow t = -2$.

Exercícios

1) Exprimir 100 como soma de dois inteiros positivos de modo que o primeiro seja divisível por 7 e o segundo seja divisível por 11.

2) Determinar as duas menores frações positivas que tenham 13 e 17 para denominadores e cuja soma seja igual a 305/221.

3) Demonstrar que, se a e b são inteiros positivos primos entre si, então a equação diofantina ax – by = c tem um número infinito de soluções inteiras e positivas.

4) Se x e y são inteiros positivos, determine o número de soluções de $2x + 3y = 100$.

5) (Epcar-2003) Um aluno da EPCAR, indagado sobre o número de exercícios de matemática que havia resolvido naquele dia respondeu: "Não sei, mas contando de 2 em 2 sobra um; contando de 3 em 3 sobra um; contando de 5 em 5 também sobra um; mas contando de 7 em 7 não sobra nenhum. O total de exercícios não chega a uma centena". Então, o número de exercícios resolvidos é tal que a soma de seus algarismos é igual a
a) 8 b) 10 c) 9 d) 11

Questões de Olimpíadas

6) (Rio Grande do Norte-95) Uma caixa automática de banco só trabalha com notas de 5 e 10 cruzeiros. Um usuário deseja fazer um saque de 100 cruzeiros. De quantas maneiras distintas a caixa eletrônica poderá fazer o pagamento?

7) (São Paulo-98) Encontre o menor inteiro positivo a para o qual a equação $1001x + 770y = 10^6 + a$ tem solução inteira. Neste caso, quantas soluções inteiras positivas ($x > 0$ e $y > 0$) existem?

8) (OBM-79) Mostre que o número de soluções inteiras positivas da equação $x_1 + 8x_2 + 27x_3 + \ldots + 100x_{10} = 3025$ (*) é igual ao número de soluções inteiras não negativas de $y_1 + 8y_2 + 27y_3 + \ldots + 100y_{10} = 0$. Usando este fato, conclua que a equação (*) tem uma única solução inteira positiva. Determine esta solução.

9) (OBM-97) Uma das soluções inteiras e positivas da equação $19x + 97y = 1997$ é, evidentemente, $(x_0,y_0) = (100,1)$. Além desse, há apenas mais um par de números inteiros e positivos, (x_1, y_1), satisfazendo a equação. O valor de $x_1 + y_1$ é:
A) 23 B) 52 C) 54 D) 101 E) 1997

10) (OBM-98) No planeta Z todos os habitantes possuem 3 pernas e cada carro possui 5 rodas. Em uma pequena cidade desse planeta, existem ao todo 97 pernas e rodas. Então podemos afirmar:
A) É possível que existam 19 carros nessa cidade
B) Existem no máximo 16 carros nessa cidade
C) Essa cidade tem 9 habitantes e 14 carros
D) Essa cidade possui no máximo 17 carros
E) Nessa cidade existem mais carros do que pessoas

11) (OBM-99) Quantos são os pares (x, y) de inteiros positivos que satisfazem a equação $2x + 3y = 101$?
A) 13 B) 14 C) 15 D) 16 E) 17

12) (USA Talent Search-99) Seja C o conjunto dos inteiros não-negativos que podem ser expressos como 1999s + 2000t, onde s e t são também inteiros não-negativos.
a) Mostre que 3.994.001 não pertence a C.
b) Mostre que se $0 \leq n \leq 3.994.001$ e n é um inteiro não pertencente a C, então 3.994.001 – n pertence a C.

13) (Canadá-97) Determine todos os pontos no segmento de reta que liga (– 4, 11) a (16, – 1) e cujas coordenadas são números inteiros positivos.

14) (Argentina-97) Quantos números entre 1 e 1000 inclusive podem decompor-se em soma de um múltiplo positivo de 7 mais um múltiplo positivo de 4?

15) (África do Sul-94) Qual é o maior inteiro positivo que não pode ser expresso na forma 5x + 7y, com x e y inteiros positivos?

16) (Bélgica-90) Determine o número de soluções (x, y) da equação $y + 3x = 100$ com inteiros x e y, ambos maiores ou iguais a 0.

17) (Bélgica-96) Quantos pares de inteiros (n, k) possuem a propriedade que $1 = 3n + 5k$?
a) 0 b) 7 c) 8 d) 15 e) infinitos

18) (Noruega-97) Se $\underline{x}$ e $\underline{y}$ são inteiros positivos tais que $13x + 4y = 1000$, então $x + y$ vale:
a) 10 b) 12 c) 14 d) 16 e) 18

19) (Noruega-99) Assuma que m e n são inteiros tais que $5m + 6n = 100$. Então, o maior valor possível de mn é:
a) 60 b) 70 c) 80 d) 90 e) nda

20) (Vietnã-74) a) Quantos inteiros positivos n são tais que n é divisível por 8 e n + 1 é divisível por 25?
b) Quantos inteiros positivos n são tais que n é divisível por 21 e n + 1 é divisível por 165?
c) Determine todos os inteiros positivos n tais que n é divisível por 9, n + 1 é divisível por 25 e n + 2 é divisível por 4?

21) (International Talent Search) Diversos pares de inteiros positivos (m, n) satisfazem a equação $19m + 90 = 8n = 1998$. Um deles (100, 1) é o par com menor valor para $\underline{n}$. Determine o par com o menor valor para $\underline{m}$.

22) (Suécia-72) Determine o maior número real a tal que o sistema $x - 4y = 1$, $ax + 3y = 1$ possui uma solução inteira.

23) (Bélgica-2002) Considere a equação $6x - 9y = k$, onde $k \in \mathbb{N}$. Para quantos valores de k ($k < 90$) esta equação possui soluções x e y que são elementos de Z?
a) 5 b) 10 c) 15 d) 30 e) 90

24) (Polya Competition-97) Em uma prova de múltipla escolha com 30 questões uma resposta correta, nenhuma resposta e uma resposta incorreta recebem 5, 2 e 0 pontos, respectivamente. Quantas pontuações diferentes são possíveis nesta prova?

25) (Polya Competition-99) Quantas solução existem para $3x + 37y = 999$ nas quais ambos x e y são inteiros não-negativos?

26) (Polya Competition-2000) Se um time de futebol americano marca em um jogo 51 pontos usando para isto somente "field gols", que valem 3 pontos, e "touchadowns", que com os pontos extras valem 7 pontos, calcule de quantas maneiras o time pode fazer esta pontuação.

27) (W.J. Blundon-95) Quantos pares de inteiros positivos (x, y) satisfazem a equação

$$\frac{x}{19} + \frac{y}{95} = 1?$$

28) (British Columbia-97) O número de soluções (x, y, z) nos inteiros positivos para a equação $3x + y + z = 23$ é:
a) 86 b) 50 c) 60 d) 70 e) 92

29) (Alberta High School-96) Se m e n são inteiros tais que $2m - n = 3$, então a expressão $m - 2n$ é igual a:
a) – 3 somente b) 0 somente
c) somente múltiplos de 3 d) qualquer inteiro
e) nda

30) (British Columbia-98) Determine um conjunto de três inteiros consecutivos tais que o menor é múltiplo de 5, e segundo é múltiplo de 7 e o maior é múltiplo de 9.

31) (British Columbia-2000) Dado que $0 < x < y < 20$, o número de soluções inteiras (x, y) para a equação $2x + 3y = 50$ é:
a) 25 b) 16 c) 8 d) 5 e) 3

32) (Espanha-94) Determine o menor número natural m tal que, para todo número natural $n \geq m$, nós temos $n = 5a + 11b$, com a e b inteiros ≥ 0.

33) (Interprovincial-2001) Determine o maior inteiro que não pode ser expresso na forma $7a + 11b - 13c$, onde a, b e c são inteiros, com $a \geq 0$, $b \geq 0$ e $c \geq 0$.

APÊNDICE 1: BASES DE NUMERAÇÃO

INTRODUÇÃO

Base de um sistema de numeração é a quantidade de algarismos que podem ser utilizados para representar os números. Até então, neste livro, utilizamos o sistema de numeração de base 10, que já foi alvo de estudo do capítulo 3. Neste sistema os números são representados pelos algarismos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9. Entretanto, esta não é a única forma de representar um número. Ao longo da história várias civilizações utilizaram outros métodos para representar os números. Atualmente, usa-se o sistema de numeração posicional, onde os algarismos são ordenados da esquerda para a direita e a posição de cada algarismo diferencia o número. Por exemplo, na representação decimal do número 7329 o algarismo das unidades é 9 e representa 9.10^0, o algarismo das dezenas é 2 e representa 2.10^1, o algarismo das centenas é 3 e representa 3.10^2 e o algarismo do milhar é 7 e representa 7.10^3. Os algarismos também são denominados pela ordem que ocupam no número, de acordo com a potência a qual estão associados. Desta maneira, no número 7329, 9 é o algarismo de ordem 0 (está associado a 10^0), 2 é o algarismo de ordem 1 (está associado a 10^1), 3 é o algarismo de ordem 2 (está associado a 10^2) e 7 é o algarismo de ordem 3 (está associado a 10^3). Assim, a expressão que caracteriza a representação em base 10 do número tomado como exemplo é $7329 = 7.10^3 + 3.10^2 + 2.10^1 + 9.10^0$.

Outras bases são utilizadas no dia a dia, como por exemplo a base 60, usada na contagem do tempo em minutos e segundos. A base 12 é usada no comércio para contagem da quantidade de parafusos, bananas, etc. A base 2 é utilizada na linguagem de computadores, onde os números são seqüências (algumas delas muito longas) dos algarismos 0 e 1. Para uma determinada base b ($2 \leq b \leq 10$) os algarismos desta base são os inteiros de 0 a b – 1. Por exemplo, na base 2 os dígitos são 0 e 1, na base 6 os dígitos são 0, 1, 2, 3, 4 e 5, enquanto que na base 8 os dígitos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7. Quando a base é maior que 10 é necessário usar letras para representar os algarismos maiores que 9. Por exemplo, na base 16 os algarismos são 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E e F, onde A representa 10, B representa 11, C representa 12, D representa 13, E representa 14 e F representa 15.

A forma geral de representar um número em base b ($b \in \mathbb{N}$, $b \geq 2$), cujos algarismos nesta base são, da esquerda para a direita, iguais a a_0, a_1, a_2, ..., a_n, é:

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_b = a_n.b^n + a_{n-1}.b^{n-1} + \ldots + a_2.b^2 + a_1.b^1 + a_0.b^0$$

Nesta representação, a simbologia $(n)_b$ significa o número n escrito na base b. Por exemplo, uma vez que $14 = 1.2^3 + 1.2^2 + 1.2^1 + 0.2^0$, a representação do número 14 na base 2 é $(1110)_2$. Por outro lado, $25 = 4.6^1 + 1.6^0$ significa que o número 25 na base 6 é $(41)_6$. Para representar 125 na base 16 é necessário utilizar letras, pois $125 = 7.16^1 + 13.16^0$. Como na base 16 o algarismo 13 é representado pela letra D então pode-se afirmar que $(125)_{10} = (7D)_{16}$.

CONVERSÃO DE UMA BASE B PARA BASE 10

Para a conversão de um número escrito em uma base qualquer n em base 10 basta escrever o número na base n como a soma dos seus algarismos multiplicados pelas respectivas bases elevadas às ordens de cada algarismo e calcular o valor da soma, em base 10. Por exemplo, para converter o número x dado por $(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_b$ para base 10 basta calcular, em base 10, o valor da soma $a_n.b^n + a_{n-1}.b^{n-1} + \ldots + a_2.b^2 + a_1.b^1 + a_0.b^0$. Assim, pode-se afirmar que:

$$(a_n a_{n-1} \ldots a_2 a_1 a_0)_b = (a_n.b^n + a_{n-1}.b^{n-1} + \ldots + a_2.b^2 + a_1.b^1 + a_0.b^0)_{10}$$

Por exemplo, para converter em base 10 o número binário $(10011)_2$ basta fazer:
$(10011)_2 = 1.2^4 + 0.2^3 + 0.2^2 + 1.2^1 + 1.2^0 = (19)_{10}$.

Portanto, conclui-se que 10011 na base 2 equivale a 19 na base 10.

CONVERSÃO DE BASE 10 PARA UMA BASE B QUALQUER

Teorema: Para converter um número x ($x \in \mathbb{N}$) em base 10 para uma outra base b qualquer basta seguir o seguinte procedimento:

- Dividi-se x por b: $x = b.q_0 + r_0$
- Dividi-se q_1 por b: $q_0 = b.q_1 + r_1$
- Dividi-se q_2 por b: $q_1 = b.q_2 + r_2$
- ...
- Dividi-se q_{n-1} por b: $q_{n-1} = b.q_n + r_n$

Este procedimento é seguido até que seja encontrado um quociente igual a zero, que ocorre exatamente quando $q_{n-1} < b$. Desta forma, na última divisão tem-se $q_{n-1} = r_n$ e $q_n = 0$. O número x na base b é formado pela seqüência, na ordem inversa em que são obtidos, dos restos das divisões efetuadas: $x = (r_n r_{n-1}...r_2 r_1 r_0)_b$.

Demonstração:

Seja o número x na base 10 dado por $x = (a_n a_{n-1}...a_2 a_1 a_0)_{10}$. Deseja-se converter x na base b, de modo que $x = (b_m b_{m-1}...b_2 b_1 b_0)_b$. Em outras palavras, deve-se encontrar os dígitos (em base b) b_m, b_{m-1}, ..., b_2, b_1 e b_0 de modo que:

$$a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0 = b_m.b^m + b_{m-1}.b^{m-1} + ... + b_2.b^2 + b_1.b + b_0$$

Inicialmente notemos que:

$$a_n.10^n + a_{n-1}.10^{n-1} + ... + a_2.10^2 + a_1.10 + a_0 = b(b_m.b^{m-1} + b_{m-1}.b^{m-2} + ... + b_2.b + b_1) + b_0,$$

ou seja, b_0 é igual ao resto da divisão de x (na base 10) por b, onde o quociente desta divisão vale exatamente $b_m.b^{m-1} + b_{m-1}.b^{m-2} + ... + b_2.b + b_1$. Dividindo este quociente por b encontramos:

$$b_m.b^{m-1} + b_{m-1}.b^{m-2} + ... + b_2.b + b_1 = b(b_m.b^{m-2} + b_{m-1}.b^{m-3} + ... + b_2) + b_1,$$

onde conclui-se que o resto desta divisão é igual a b_1 e o quociente vale $b_m.b^{m-2} + b_{m-1}.b^{m-3} + ... + b_2$. Seguindo este processo pode-se concluir que os valores de b_0, b_1, b_2, ... são iguais aos restos das divisões sucessivas por b dos quocientes obtidos (onde a 1ª divisão é de x por b), até que seja encontrado um quociente igual a zero. Assim, ao final do processo, os dígitos de x em base b serão os restos das divisões sucessivas, escritos em ordem inversa em relação à ordem que são determinados.

Por exemplo, vamos converter em base 8 o número decimal 3964. Para tanto, basta fazer o seguinte:

```
3964 | 8
 32  | 495 | 8
  76 |  48 |  61 | 8
  72 |  15 |  56 |  7 | 8
   44|   8 |   5 |  0 | 0
   40|   7 |     |  7 |
    4|     |     |    |
```

Os restos encontrados formam, na ordem inversa, a seqüência dos algarismos do número na base 8. Assim: $(3964)_{10} = (7574)_8$. Note que é possível verificar se tal conversão foi feita de forma correta, bastando para isso converter $(7574)_8$ em base 10:

$$(7574)_8 = 7.8^3 + 5.8^2 + 7.8 + 4 = 3584 + 320 + 56 + 4 = 3964$$

CONVERSÃO DE NÚMEROS ENTRE DUAS BASES QUAISQUER

Para converter números de uma base b para uma outra base b' quaisquer, o processo prático utilizado é converter da base b dada para a base 10 e depois da base 10 para a base b' pedida. Por exemplo, para converter $(43)_5$ para base 9 deve-se proceder da seguinte maneira.

i) $(43)_5 = 4.5^1 + 3 = 23$

ii) transformando 23 em base 9:

$$\begin{array}{r|l} 23 & 9 \\ \underline{18} & 2 \\ 5 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 2 & 9 \\ \underline{0} & 0 \\ 2 & \end{array}$$

Desta forma, tem-se que $(43)_5 = (25)_9$.

Exemplos:

1) Converter $(1A7B)_{16}$ em base 10.

Solução:

Sabe-se que, em base 16, A representa 10 e B representa 11. Assim:

$(1A7B)_{16} = 1.16^3 + 10.16^2 + 7.16 + 11 = 6779$

2) (Colégio Naval-90) O cubo de $12_{(b)}$ é $1750_{(b)}$. A base de numeração b é:

(A) primo (B) ímpar não primo (C) par menor que 5

(D) par entre 5 e 17 (E) par maior que 17

Solução:

$[(12)_b]^3 = (1750)_b \Rightarrow (1.b + 2)^3 = 1.b^3 + 7.b^2 + 5.b + 0 \Rightarrow b^3 + 6b^2 + 12b + 8 = b^3 + 7b^2 + 5b \Rightarrow$

$b^2 - 7b - 8 = 0 \Rightarrow (b - 8)(b + 1) = 0 \Rightarrow b = 8 \Rightarrow$ alternativa D

3) (Colégio Naval-92) Um livro de **200** páginas vai ser reenumerado no sistema de numeração de base **8**. O número na base **10** de algarismos que serão utilizados é:

a) 520 b) 525 c) 530 d) 535 e) 540

Solução:

Transformando $(200)_{10}$ em base 8:

$$\begin{array}{r|l} 200 & 8 \\ \underline{16} & 25 \\ 40 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & \\ \hline 24 & 3 \\ \underline{40} & 1 \\ 0 & \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 8 & \\ \hline 0 & \\ \underline{0} & 0 \\ 3 & \end{array}$$

Logo, tem-se que $(200)_{10} = (310)_8$

Lembrando que no sistema de numeração de base 8 são usados os dígitos 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6 e 7, então:

i) para escrever os números de 1 algarismo (de 1 a 7) são necessários 7 dígitos;

ii) para escrever os números de 2 algarismos (de 10 a 77) são necessários 2(7.8) = 112 algarismos;

iii) para escrever os números de 3 algarismos iniciando por 1 (de 100 a 177) são necessários 3(1.8.8) = 192 algarismos;

iv) para escrever os números de 3 algarismos iniciando por 2 (de 200 a 277) são necessários 3(1.8.8) = 192 algarismos;

v) para escrever os números de 3 algarismos iniciando por 3 (de 300 a 310) são necessários 3(1 + 8) = 27 algarismos;

Assim, são necessários 7 + 112 + 192 + 192 + 27 = 530 algarismos.

4) (IME-72) Sejam $b \in Z_+$, $b > 1$ e $M \in N$. Suponhamos que M expresso sob a forma $M = a_p b^p + a_{p-1} b^{p-1} + ... + a_2 b^2 + a_1 b + a_0$, onde os coeficientes satisfazem a relação $0 \leq a_i \leq b - 1$, $\forall i \in \{0, 1, 2, ... p\}$. Dizemos, então, que a representação de M na base de numeração b é $M = (a_p a_{p-1} ... a_2 a_1 a_0)_b$, onde o índice b indica a base considerada.

a) Determine, com a notação exposta acima, a representação de 1347 na base 10 e de 929 na base 5.

b) Determine em que base(s) de numeração é verificada a igualdade $(2002)_b + (21)_5 = (220)_b + (1121)_b$.

c) Mostre que se $M = (14641)_b$, então independentemente da base considerada, M é um quadrado perfeito. Determine a representação de $\sqrt{M}$ na base $b + 1$.

Solução:

a) $1347 = 1.10^3 + 3.10^2 + 4.10 + 7$

Transformando 929 em base 5:

929	5				
5	185	5			
42	15	37	5		
40	35	35	7	5	
29	35	2	5	1	5
25	0		2	0	0
4				1	

Desta maneira, $(929)_{10} = (12204)_5 = 1.5^4 + 2.5^3 + 2.5^2 + 0.5 + 4$

b) $(2002)_b + (21)_5 = (220)_b + (1121)_b \Rightarrow 2b^3 + 2 + 2.5 + 1 = 2b^2 - 2b + b^3 + b^2 - 2b + 1 \Rightarrow$

$b^3 - 3b^2 - 4b + 12 = 0 \Rightarrow (b - 2)(b + 2)(b - 3) = 0 \Rightarrow b = 2$ ou $b = 3$

c) $M = (14641)_b = b^4 + 4b^3 + 6b^2 + 4b + 1 = (b + 1)^4 = [(b + 1)^2]^2 = |b^2 + 2b + 1|^2$

Uma vez que $\sqrt{M} = b^2 + 2b + 1$ então $\sqrt{M} = (121)_{b+1}$

APÊNDICE 2: TRIÂNGULOS PITAGÓRICOS

A equação $x^2 + y^2 = z^2$

Agora vamos considerar uma equação diofantina de segunda ordem com três incógnitas, $x^2 + y^2 = z^2$, chamada de Equação Pitagórica. Como é conhecido, esta equação possui grande importância na trigonometria e na análise trigonométrica, e no caso especial de x = y, está ligada como uma prova simples da existência de números irracionais.

Vamos agora determinar todas as soluções inteiras desta equação. Vamos excluir a solução trivial, na qual um dos números x, y é zero. Dentre todas as outras soluções, nós vamos considerar somente aquelas que são números naturais, uma vez que a mudança de sinal não altera a equação. Se os números x, y, z são números naturais e satisfazem a equação $x^2 + y^2 = z^2$ então dizemos que (x, y, z) é um Triângulo Pitagórico.

Uma solução da equação $x^2 + y^2 = z^2$ é chamada primitiva se os números x, y, z são números naturais e não possuem nenhum divisor comum maior que 1. Se α, β, θ é uma solução primitiva de $x^2 + y^2 = z^2$, e d é um número natural qualquer, então $x = d\alpha$, $y = d\beta$, $z = d\theta$ é também uma solução. De fato, se $\alpha^2 + \beta^2 = \theta^2$, então multiplicando ambos os lados por d^2, obtemos que $d\alpha, d\beta, d\theta$ também verificam a equação.

Como mdc (x, y, z) = 1, estes três valores não podem ser todos pares. Ou seja, pelo menos um dos valores x, y, z é da forma 2k – 1.

Como $(2k - 1)^2 = 4k(k - 1) + 1$ e $8 \mid 4k(k - 1)$ então dividindo o quadrado de um número natural ímpar por 8 o resto obtido é 1.

Como $(2k)^2 = 4k^2$ então dividindo o quadrado de um número natural par por 8 os restos possíveis são 0 e 4.

Portanto, x e y não podem ser ambos ímpares, pois se fossem o resto de $x^2 + y^2$ por 8 seria 2, e não existe nenhum número natural cujo quadrado deixe resto 2 quando dividido por 8.

Então x deve ser ímpar e y deve ser par, implicando que z seja ímpar.

Observe que: $x^2 + y^2 = z^2 \Rightarrow y^2 = (z + x)(z - x)$

Os números z + x e z – x são a soma e a diferença de dois números ímpares, e, portanto, são ambos pares: $z + x = 2a$ $z - x = 2b \Rightarrow z = a + b$ $x = a - b$

Se y é par $\Rightarrow y = 2c$ $\therefore$ Como $4c^2 = 4ab \Rightarrow c^2 = ab$

Como o mdc (a, b) = 1 e $c^2 = ab \Rightarrow$ a e b são quadrados perfeitos $\Rightarrow a = m^2$ e $b = n^2$

Como mdc (a, b) = 1 $\Rightarrow$ mdc (m, n) = 1

$\therefore z = a + b \Rightarrow$ $z = m^2 + n^2$

$\therefore x = a - b \Rightarrow$ $x = m^2 - n^2$

$\therefore c^2 = ab = m^2n^2 \Rightarrow y = 2c \Rightarrow y = 2mn$

Onde m e n são números naturais com mdc (m, n) = 1 e, evidentemente, m > n.

A tabela abaixo lista as 10 primeiras soluções (em ordem crescente de m) naturais primitivas de $x^2 + y^2 = z^2$:

m	n	x	y	z	m	n	x	y	z
2	1	3	4	5	7	6	13	84	85
3	2	5	12	13	8	1	63	16	65
4	1	15	8	17	8	3	55	48	73
4	3	7	24	25	8	5	39	80	89
5	2	21	20	29	8	7	15	112	113
5	4	9	40	41	9	2	77	36	85
6	1	35	12	37	9	4	65	72	97
6	5	11	60	61	9	8	17	144	145
7	2	45	28	53	10	1	99	20	101
7	4	33	56	65	10	3	91	60	109

Exemplos:

1) Prove que em toda solução inteira da equação $x^2 + y^2 = z^2$, ao menos um dos números x, y é divisível por 3.

Solução:

Se x e y não fossem divisíveis por 3 $\Rightarrow$ $x = 3k \pm 1$ e $y = 3p \pm 1$

Então $x^2 + y^2 = 9k^2 \pm 6k + 1 + 9p^2 \pm 6p + 1 = 3(3k^2 + 3p^2 \pm 2k \pm 2p) + 2$

Entretanto, o quadrado de um número natural dividido por 3 apresenta resto 0 (quando é um quadrado de um número divisível por 3) ou 1 (quando é o quadrado de um número da forma $3t \pm 1$).

Assim, pelo menos um dos valores de x e y é divisível por 3.

2) Prove que em toda solução inteira da equação $x^2 + y^2 = z^2$, ao menos um dos números x, y, z é divisível por 5.

Solução:

Um número m não divisível por 5 pode ser escrito das seguintes formas: $m = 5k \pm 1$ ou $m = 5k \pm 2$

Nestes casos: $m^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$ e $m^2 = 5(5k^2 \pm 4k) + 4$

Então, a divisão do quadrado de um inteiro não divisível por 5 apresenta resto igual a 1 ou 4.

Suponhamos que x e y são não divisíveis por 5. Então $x^2 + y^2$ pode apresentar os restos 2, 3 ou 0.

Restos 2 e 3 são impossíveis para z^2, sobrando apenas resto 0, implicando que z seja divisível por 5.

Desta forma, se x e y não forem divisíveis por 5, implica que z seja divisível por 5.

Evidentemente é possível que um dos valores de x ou y seja divisível por 5

Digamos que seja x. O resto da divisão por 5 de $x^2 + y^2$ será o resto de y^2 dividido por 5, sendo possíveis os valores 0, 1 ou 4. Como z^2 também pode apresentar os mesmos restos, confirmamos que x é divisível por 5.

3) As medidas dos lados de um triângulo são números inteiros. A medida da hipotenusa não é divisível por 5. Prove que a área do triângulo é um múltiplo de 10.

Solução:

Sejam x, y, z as medidas dos lados do triângulo, onde x e y são catetos e z é a hipotenusa, implicando que $x^2 + y^2 = z^2$.

Pelo exemplo anterior sabemos que um dos números x, y, z é divisível por 5. Entretanto, pelo enunciado temos que z não é divisível por 5, implicando que um dos valores x ou y é divisível por 5.

Como a área é dada por $S = (x.y)/2$, então $5 \mid S$.

Sabemos que as soluções de $x^2 + y^2 = z^2$ são dadas por $x = k(2mn)$ $y = k(m^2 - n^2)$ $z = k(m^2 + n^2)$.

Portanto: $S = (x.y)/2 \Rightarrow S = k^2mn(m^2 - n^2)$.

Se algum dos valores de m ou n for par então $2 \mid S$.

Se m e n forem ímpares temos que $2 \mid m^2 - n^2 \Rightarrow 2 \mid S$.

Como $2 \mid S$ e $5 \mid S \Rightarrow 10 \mid S$.

4) (Olimpíada Báltica-94) Mostre que para todo inteiro $a \geq 5$ existem inteiros b e c, $c \geq b \geq a$, tais que a, b, c são os comprimentos dos lados de um triângulo retângulo.

Solução:

Sabemos que se os inteiros positivos a, b e c ($c \geq b \geq a$) satisfazem $a^2 + b^2 = c^2$, então $c = k(m^2 + n^2)$, $b = k(2mn)$ e $a = k(m^2 - n^2)$

Sendo $a = 2^s.x$, ($s \in N$) onde x é ímpar, vamos admitir que $k = 2^s$.

Portanto: $k(m^2 - n^2) = a \Rightarrow 2^s(m - n)(m + n) = 2^s.x \Rightarrow (m - n)(m + n) = x$

Podemos fazer $m - n = 1$ e $m + n = x \Rightarrow m = (x + 1)/2$ e $n = (x - 1)/2$

Desta forma temos que $b = 2^s(2mn) = 2^{s-1}(x + 1)(x - 1)$ e $c = 2^s(m^2 + n^2) = 2^{s-1}(x^2 + 1)$

5) Prove que não existem dois números naturais cuja soma e diferença de seus quadrados sejam quadrados.

Solução:

Suponhamos que existam números naturais x e y tais que $x^2 + y^2 = z^2$ e $x^2 - y^2 = t^2$
Dentro todos estes pares (x, y), peguemos o menor, obviamente mdc (x, y) = 1
$\therefore 2x^2 = z^2 + t^2 \Rightarrow$ z e t são ambos pares ou ambos ímpares $\Rightarrow$ z – t e z + t são ambos pares
$\therefore$ Então (z – t)/2 e (z + t)/2 são ambos números naturais
Se d | (z + t)/2 e d | (z – t)/2 e também se d > 1 $\Rightarrow$ d | z
Como $x^2 = [(z + t)/2]^2 + [(z – t)/2]^2 \Rightarrow d^2 | x^2 \Rightarrow d | x$
Como $x^2 + y^2 = z^2$ e d | x $\Rightarrow$ d | y que é impossível pois mdc (x, y) = 1
Então mdc [(z + t)/2, (z – t)/2] = 1
Como $x^2 = [(z + t)/2]^2 + [(z – t)/2]^2$ é uma solução de uma equação pitagórica, temos os dois casos:
i) (z – t)/2 = $m^2 – n^2$ e (z + t)/2 = 2mn e também x = $m^2 + n^2$
ii) (z + t)/2 = $m^2 – n^2$ e (z – t)/2 = 2mn e também x = $m^2 + n^2$
Nos dois casos temos: $2y^2 = z^2 – t^2 = (z – t)(z + t) = 2(m^2 – n^2)4mn \Rightarrow y^2 = (m^2 – n^2)4mn$
Como y é par $\Rightarrow$ y = 2k $\Rightarrow$ $k^2 = (m^2 – n^2)mn$
Desde que mdc (m, n) = 1 $\Rightarrow$ mdc (m ± n, m) = 1 $\Rightarrow$ mdc $(m^2 – n^2, m) = 1$ e mdc $(m^2 – n^2, n) = 1$
Desta forma $\Rightarrow$ m = a^2 n = b^2 $m^2 – n^2 = c^2$
Do fato de que mdc (m, n) = 1 e que um dos números m, n é par e o outro é ímpar $\Rightarrow$
mdc (m + n, m – n) = 1
$\therefore$ Como (m + n)(m – n) = $m^2 – n^2 = c^2$ e mdc (m + n, m – n) = 1 $\Rightarrow$ m + n e m – n são quadrados
$\therefore$ Como m = a^2 e n = $b^2 \Rightarrow a^2 + b^2$ e $a^2 – b^2$ são quadrados
Como $a^2 + b^2 = m + n < 2m \leq 2mn \leq (z + t)/2 < z \leq z^2 = x^2 + y^2 \Rightarrow a^2 + b^2 < x^2 + y^2$
Esta desigualdade contraria o fato de que x e y são os menores valores que satisfazem as equações
$x^2 + y^2 = z^2$ e $x^2 – y^2 = t^2$
Portanto não existem valores de x e y cuja soma e diferença de seus quadrados sejam quadrados

6) Prove que a equação $x^4 + y^4 = z^2$ não possui solução nos números naturais x, y, z.
Solução:
Suponhamos que exista uma solução e seja z o menor natural cujo quadrado é a soma das quartas potências de dois números naturais x, y. Temos então que mdc (x, y) = 1 $\Rightarrow$ mdc $(x^2, y^2) = 1$
Então x^2, y^2, z formam uma solução primitiva da equação pitagórica $(x^2)^2 + (y^2)^2 = z^2$
$\therefore x^2 = m^2 – n^2$ $y^2 = 2mn$ $z = m^2 + n^2$ onde mdc (m, n) = 1
Um dos números m e n é par e o outro é ímpar
Se m fosse o par e n o ímpar, de $x^2 + n^2 = m^2$ teríamos que x e n seriam ímpares, que é impossível
Portanto m é ímpar e n é par $\Rightarrow$ n = 2k $\therefore$ Como mdc (m, n) = 1 $\Rightarrow$ mdc (m, k) = 1
$\therefore y^2 = 2mn = 4mk \Rightarrow$ y é par $\Rightarrow$ y = 2u $\Rightarrow u^2 = mk$
Como mdc (m, k) = 1 $\Rightarrow$ m = a^2 e k = $b^2 \Rightarrow$ n = 2k = $2b^2$
Como $x^2 + n^2 = m^2$ e mdc (m, n) = 1 $\Rightarrow$ mdc (x, n) = 1
Assim, x, m, n formam uma solução primitiva de uma equação pitagórica $\Rightarrow$ $n = 2m_1n_1$ $m = m_1^2 + n_1^2$
Desde que $n = 2b^2 \Rightarrow b^2 = m_1n_1$ $\therefore$ Como mdc $(m_1, n_1) = 1 \Rightarrow m_1 = a_1^2$ e $n_1 = b_1^2$
$\therefore$ Como m = $a_2 \Rightarrow a^2 = m_1^2 + n_1^2 = a_1^4 + b_1^4$
Mas $a \leq a^2 = m < m^2 + n^2 = z \Rightarrow a < z$, contrariando a suposição de que z é o menor natural cujo quadrado é a soma das quartas potências de dois números naturais x, y.

7) Determine todas as soluções inteiras positivas de $\frac{1}{x^2} + \frac{1}{y^2} = \frac{1}{z^2}$.

Solução:
Multiplicando por $(xyz)^2 \Rightarrow (yz)^2 + (xz)^2 = (xy)^2$
Assim, yz = $u^2 – v^2$ xy = 2uv xy = $u^2 + v^2 \Rightarrow$ kx = $2uv(y^2 + v^2)$ ky = $(u^2 + v^2)(u^2 – v^2)$
kz = $2uv(u^2 – v^2)$, onde k = xyz.

APÊNDICE 3: TEOREMAS DE EULER E FERMAT

Função de Euler

Função de Euler é uma função aritmética simbolizada por $\phi(n)$, definida para todo inteiro positivo n de tal modo que $\phi(n)$ é igual ao número de inteiros positivos que não superam n e que são primos com n.

Propriedades da Função de Euler

Teorema: "A função ϕ de Euler é uma função aritmética multiplicativa, ou seja, sendo r e s dois inteiros positivos tais que o mdc $(r, s) = 1$, então $\phi(r.s) = \phi(r).\phi(s)$."

Demonstração:

Notemos inicialmente que se r ou s vale 1 a proposição é diretamente verdadeira.

Suponhamos agora que $r > 1$ e $s > 1$. Para esta demonstração utilizaremos uma tabela contendo todos os inteiros positivos de até r.s, organizados em r colunas e s linhas.

1	2	...	h	... r
r + 1	r + 2	...	r + h	... 2r
2r + 1	2r + 2	...	2r + h	... 3r
...	...	...	...	... ...
(s – 1)r + 1	(s – 1)r + 2	...	(s – 1)r + h	... sr

Como na primeira linha o número de inteiros menores que r e primos com r é igual a $\phi(r)$, temos que existem apenas $\phi(r)$ colunas em que os primeiros termos destas colunas são primos com r. Desde que mdc $(qr + h, r)$ = mdc (h, r), os inteiros da h-ésima coluna são primos com r se e somente se h é primo com r. Assim, concluímos que quando o primeiro elemento de cada coluna (que são os elementos da primeira linha) é primo com r, então todos os elementos destas colunas são primos com r. Deste modo, existem exatamente $\phi(r)$ colunas formadas com inteiros que são todos primos com r.

Analisemos somente estas colunas em que todos os inteiros são primos com r.

Como nestas colunas temos que mdc $(h, r) = 1$, então o número de elementos de cada coluna (h, r + h, 2r + h, ..., (s – 1)r + h) que são primos com s é igual a $\phi(s)$, pois para isto ocorrer basta que mdc (h, s) seja igual a 1. Concluímos, portanto, que o número de inteiros menores que rs e que são primos com rs é igual a $\phi(r)\phi(s)$, ou seja, $\phi(rs) = \phi(r)\phi(s)$.

Teorema: "Para todo inteiro positivo $n > 1$, a soma dos inteiros positivos menores que n e que são primos com n é igual a $\frac{1}{2}n.\phi(n)$."

Demonstração:

Sejam $a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}$ os $\phi(n)$ inteiros menores que n e primos com n. Desde que mdc $(a, n) = 1 \Leftrightarrow$ mdc $(n - a, n) = 1$, então a cada inteiro a_i $(1 \leq i \leq \phi(n))$ corresponde exatamente um outro inteiro positivo $n - a_i$ (também menor que n) tal que ambos são primos com n. Deste modo podemos formar $\phi(n)$ pares de inteiros positivos menores que n e primos com n:

$(a_1, n - a_1)$, $(a_2, n - a_2)$, ... $(a_{\phi(n)}, n - a_{\phi(n)})$.

Notemos também que como $a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}$ são todos os inteiros menores que n e primos com n e a cada a_i corresponde um único $n - a_i$ que também é menor que n e primo com n, então os conjuntos, a menos da ordem, são iguais:

$\{a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}\} = \{n - a_1, n - a_2, \ldots, n - a_{\phi(n)}\}$

Assim: $a_1 + a_2 + \ldots + a_{\phi(n)} = (n - a_1) + (n - a_2) + \ldots + (n - a_{\phi(n)}) = n.\phi(n) - (a_1 + a_2 + \ldots + a_{\phi(n)}) \Rightarrow$

$a_1 + a_2 + \ldots + a_{\phi(n)} = \frac{n.\phi(n)}{2}$.

Cálculo de $\phi(n)$

Teorema: "Se $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}$ é a decomposição canônica do inteiro positivo $n > 1$, então:

$$\phi(n) = \left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right)\left(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}\right)...\left(p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}\right) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_r}\right)."$$

Demonstração:

Como $p_1, p_2, ..., p_r$ são todos primos, então o máximo divisor comum de qualquer par destes primos é igual a 1.

Portanto, como $\phi(n)$ é uma função aritmética multiplicativa:

$$\phi(n) = \phi(p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r}) = \phi(p_1^{k_1})\phi(p_2^{k_2})...\phi(p_r^{k_r}) = \left(p_1^{k_1} - p_1^{k_1-1}\right)\left(p_2^{k_2} - p_2^{k_2-1}\right)...\left(p_r^{k_r} - p_r^{k_r-1}\right) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$$

Exemplos:

1) Calcular $\phi(7865)$.

Solução:

Sendo $7865 = 5.11^2.13$, temos: $\phi(7865) = (5-1)(11^2-11)(13-1) = 4.110.12 = 5280$.

2) Demonstrar que $\phi(n^2) = n.\phi(n)$ para todo inteiro positivo n.

Solução:

Seja $n = p_1^{k_1}p_2^{k_2}...p_r^{k_r} \Rightarrow \phi(n) = n\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_r}\right)$

Como os fatores primos de n^2 e n são os mesmos $\Rightarrow \phi(n^2) = n^2\left(1-\frac{1}{p_1}\right)\left(1-\frac{1}{p_2}\right)...\left(1-\frac{1}{p_r}\right) \Rightarrow$

$\phi(n^2) = n.\phi(n)$.

3) Demonstrar que, se n é um inteiro positivo ímpar, então: a) $\phi(2n) = \phi(n)$; b) $\phi(4n) = 2\phi(n)$.

Solução:

a) Como $mdc(2, n) = 1 \Rightarrow \phi(2n) = \phi(2).\phi(n) = (2-1).\phi(n) = \phi(n)$

b) Como $mdc(4, n) = 1 \Rightarrow \phi(4n) = \phi(4).\phi(n) = (2^2-2).\phi(n) = 2\phi(n)$

4) Seja n um inteiro composto. Prove que $\phi(n) \le n - \sqrt{n}$.

Solução:

Seja n um inteiro composto e p_1 o menor divisor primo de n. Deste modo, temos que $p_1 \le \sqrt{n} \Rightarrow$

$\frac{n}{p_1} \le \sqrt{n}$. Assim, $\phi(n) \le n\left(1-\frac{1}{p_1}\right) = n - \frac{n}{p_1} \Rightarrow \phi(n) \le n - \sqrt{n}$.

Teorema de Euler

"Se n é um inteiro positivo e se o $mdc(a, n) = 1$, então $a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$."

Demonstração:

Sejam $a_1, a_2, ..., a_{\phi(n)}$ os números entre 1 e n e primos com n. Temos que $a.a_i$ é primo com n (nem a e nem a_i possui fatores comuns com n) e $a.a_i \equiv x \pmod{n}$, onde $1 \le x \le n$.

Suponhamos, por absurdo, que x possui fatores comuns d com n então $a.a_i \equiv x \pmod{n} \Leftrightarrow$

$n \mid a.a_i - x \Rightarrow a.a_i - x = nt \Leftrightarrow a.a_i = nt + x \Rightarrow d \mid a.a_i \Rightarrow a$ ou a_i possui fator comum com d, isto é, a ou a_i possui fator comum com n, que é um absurdo, pois a e a_i são primos com n.

Desta forma, x é primo com n e $1 \le x \le n$, implicando que $x = a_j$

$a.a_i \equiv a_j \pmod{n}$

$a.a_1 \equiv a_{j1} \pmod{n}$

$a.a_2 \equiv a_{j2} \pmod{n}$
$a.a_3 \equiv a_{j3} \pmod{n}$
.....
$a.a_{\phi(n)} = a_{j\phi(n)} \pmod{n}$
Multiplicando todas estas congruências:
$a^{\phi(n)}.a_1.a_2...a_{\phi(n)} = a_{j1}.a_{j2}...a_{j\phi(n)}$
Agora basta provar que $a_{jm} \neq a_{jm'}$, quando $m \neq m'$
∴Supondo $a_{jm} = a_{jm'} \Rightarrow a.a_m \equiv a.a_{m'} \pmod{n} \Leftrightarrow a \equiv a_{m'} \pmod{n} \Rightarrow a_m = a_{m'}$, ou seja:
$a_m \neq a_{m'} \Rightarrow a_{jm} \neq a_{jm'}$ $1 \leq a_m \leq n$ $1 \leq a_{m'} \leq n$
Assim $\{a_1, a_2, \ldots, a_{\phi(n)}\} = \{a_{j1}, a_{j2}, \ldots, a_{j\phi(n)}\}$ e
$a^{\phi(n)}.a_1.a_2...a_{\phi(n)} \equiv a_{j1}.a_{j2}...a_{j\phi(n)} \pmod{n} \Leftrightarrow a^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$

Exemplos:
1) Verificar o Teorema de Euler com n = 9 e a = – 4.
Solução:
O mdc (– 4, 9) = 1 e $\phi(9) = 6$. Deste modo: $(-4)^{\phi(9)} = (-4)^6 = 4096$
E como $9 \mid (4096 - 1)$, segue-se que $4096 \equiv 1 \pmod{9}$, isto é: $(-4)^{\phi(9)} \equiv 1 \pmod{9}$

2) Determine os dois últimos dígitos de 3^{121}.
Solução:
I) $\phi(100) = (100)(1 - 1/2)(1 - 1/5) = (10)(4) = 40$
II) Pelo Teorema de Euler: $3^{\phi(100)} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 3^{40} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow 3^{120} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow (3^{120}).3 \equiv 3 \pmod{100} \Rightarrow 3^{121} \equiv 3 \pmod{100}$
III) Ou seja, os dois últimos dígitos (dezenas e unidades) de 3^{121} são 03

3) Prove que todo número natural que não é divisível por 2 ou por 5 possui um múltiplo positivo cujos dígitos (na base 10) são todos iguais a 1.
Solução:
Se mdc (n, 10) = 1 $\Rightarrow$ mdc (9n, 10) = 1 $\Rightarrow 10^{\phi(9n)} \equiv 1 \pmod{9n} \Rightarrow 10^{\phi(9n)} - 1 = 9nk$, onde $k \in N$.
Desta forma: $nk = \dfrac{10^{\phi(9n)} - 1}{9}$, e vemos que todos os dígitos decimais de nk são iguais a 1.

4) (Olimpíada da Rússia) Quais os possíveis resultados para os restos quando n^{100} é dividido por 125, quando n assume todos os valores inteiros positivos.
Solução:
I) Se $n = 5k \Rightarrow 125 \mid n^{100} \Rightarrow$ resto = 0
II) Se mdc (n, 125) = 1 temos que $\phi(125) = \phi(5^3) = 5^3(1 - 1/5) \Rightarrow \phi(125) = 100$
Assim, pelo Teorema de Euler, $n^{100} \equiv 1 \pmod{125} \Rightarrow$ resto = 1

5) (Rússia) Prove que se um inteiro n é primo com 10, a 101^a potência de n termina com os mesmo 3 dígitos de n. Por exemplo, 1233^{101} termina com os dígitos 233, e 37^{101} termina com os dígitos 037.
Solução:
Se mdc (n, 10) = 1 podemos aplicar o Teorema de Euler:
$\phi(1000) = 400 \Rightarrow n^{400} \equiv 1 \pmod{1000} \Rightarrow n^{400} - 1 = 1000k \Rightarrow (n^{200} - 1)(n^{200} + 1) = 1000k \Rightarrow (n^{200} + 1)(n^{100} - 1)(n^{100} + 1) = 1000k$
$\phi(10) = 4 \Rightarrow n^4 \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow n^{200} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow n^{200} + 1 \equiv 2 \pmod{10}$
Analogamente: $n^{100} \equiv 1 \pmod{10} \Rightarrow n^{100} + 1 \equiv 2 \pmod{10}$
Desde que $(n^{200} + 1)(n^{100} - 1)(n^{100} - 1) = 1000k$ e $n^{100} - 1$ e $n^{200} - 1$ não são divisíveis por 1000, temos que $n^{100} - 1$ é divisível por 1000.
Deste modo $n^{100} - 1 \equiv 0 \pmod{1000} \Rightarrow n^{100} \equiv 1 \pmod{100} \Rightarrow n^{101} \equiv n \pmod{1000} \Rightarrow n^{101}$ termina com os mesmos 3 dígitos de n.

6) (Olimpíada da Rússia-96) Mostre que na progressão aritmética com primeiro termo 1 e razão 729, existem infinitas potências de 10.
Solução:
O termo geral da PA é $a_n = a_0 + nr \Rightarrow a_n = 1 + 729n$.
Desta forma $a_n = 10^x \Rightarrow 1 + 729n = 10^x \Rightarrow 10^x - 1 = 729n \Rightarrow 729$ divide $10^x - 1$.
Como $729 = 3^6 \Rightarrow \phi(3^6) = 3^6(1 - 1/3) \Rightarrow \phi(3^6) = 486$.
Pelo Teorema de Euler: $10^{486} \equiv 1 \pmod{729} \Rightarrow 10^{486y} \equiv 1 \pmod{729} \Rightarrow 729$ divide $10^{486y} - 1$, ou seja, existem infinitos valores inteiros positivos de x tais que 729 divide $10^x - 1$, implicando que para infinitos valores inteiros positivos de n temos que $a_n = 729n + 1$ é uma potência de 10

7) (Teste de Seleção da China para a IMO-88) Defini-se $x_n = 3x_{n-1} + 2$ para todos os inteiros positivos n. Prove que um valor inteiro pode ser escolhido para x_0 tal que 1988 divide x_{100}.
Solução:
$x_n = 3x_{n-1} + 2 \Rightarrow (x_n + 1) = 3(x_{n-1} + 1)$, ou seja, a seqüência $x_n + 1$ é uma progressão geométrica de razão 3 e primeiro termo igual a $x_0 + 1$.
Deste modo: $x_n + 1 = (x_0 + 1)3^n \Rightarrow x_n = (x_0 + 1)3^n - 1 \Rightarrow x_{100} = (x_0 + 1)3^{100} - 1$.
Sabemos que $1988 = 2^2.7.71$.
Como mdc (3, 1988) = 1, pelo Teorema de Euler:
$\phi(2^2.7.71) = 2^2.7.71(1 - 1/2)(1 - 1/7)(1 - 1/71) = 840 \Rightarrow 3^{840} \equiv 1 \pmod{1988} \Rightarrow$
$(3^{740})(3^{100}) \equiv 1 \pmod{1988}$
Deste modo, fazendo $x_0 = 3^{740} - 1$, teremos que $1988 \mid x_{100}$.

Teorema Simples de Fermat: "Se p é um primo e se p não divide o inteiro a, então $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$."
Demonstração:
Se mdc (a, p) = 1, então vale o Teorema de Euler: $a^{\phi(p)} \equiv 1 \pmod{p} \Leftrightarrow a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$

Corolário: "Se p é um primo, então $a^p \equiv a \pmod{p}$ qualquer que seja o inteiro a."
Demonstração:
Basta multiplicar a congruência do Teorema de Fermat por a.
Notemos que a congruência $a^p \equiv a \pmod{p}$ vale inclusive quando mdc (a, p) ≠ 1, pois assim o resto da divisão de a^p por p é 0, que é igual ao resto a módulo p, pois a é divisível por p, e resto a módulo p é igual a 0.

Exemplos:

1) Verificar o Teorema de Fermat com a = 3 e p = 7.
Solução:
O inteiro 7 é primo e 7 não divide 3. Temos: $3^{7-1} = 3^6 = 729$ e como $7 \mid (729 - 1)$, segue-se que $729 \equiv 1 \pmod{7}$, isto é: $3^{7-1} \equiv 1 \pmod{7}$

2) Demonstrar que $1^{p-1} + 2^{p-1} + ... + (p - 1)^{p-1} \equiv p - 1 \pmod{p}$, onde p é um número primo.
Solução:
Como p é primo e cada um dos inteiros 1, 2, ..., p – 1 não é divisível por p, então o Teorema de Fermat é válido para cada inteiro entre 1 e p – 1, com módulo p.
$1^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ $3^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ ... $(p - 1)^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
Somando todas estas congruências, e lembrando que de 1 a p – 1 existem p – 1 inteiros, temos:
$1^{p-1} + 2^{p-1} + ... + (p - 1)^{p-1} \equiv p - 1 \pmod{p}$

3) (Olimpíada de Hong Kong-2000) Prove que para todo inteiro n, $n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2$ é divisível por 46410.
Solução:

Notemos inicialmente que $X = n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2 = n^2(n^{12} - 1)(n^{16} - 1)$ e que $46410 = 2.3.5.7.13.17$.
É suficiente mostrar que p divide $n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2$ para p = 2, 3, 5, 7, 13 e 17.
Como n^2 ou $n^{12} - 1$ é par, então $2 \mid X$. (1)
Se p divide n, a conclusão é direta, para p = 2, 3, 5, 7, 13 ou 17.
Se mdc (n, p) = 1, pelo Teorema de Fermat temos que $n^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
Assim: $n^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ e $n^{16} \equiv 1 \pmod{17} \Rightarrow 13.17 \mid (n^{12} - 1)(n^{16} - 1) \Rightarrow 13.17 \mid X$ (2)
Como $n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2 = n^2(n^{12} - 1)(n^{16} - 1) = n^2(n^6 - 1)(n^6 + 1)(n^4 - 1)(n^4 + 1)(n^8 - 1)$.
Analogamente, sendo mdc (n, p) = 1, temos pelo Teorema de Fermat: $n^6 \equiv 1 \pmod{7}$ e $n^4 \equiv 1 \pmod{5}$
Deste modo $5.7 \mid (n^4 - 1)(n^6 - 1) \Rightarrow 5.7 \mid X$ (3)
Finalmente, notemos que:
$n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2 = n^2(n^{12} - 1)(n^{16} - 1) = n^2(n^3 - 1)(n^3 + 1)(n^6 + 1)(n^4 - 1)(n^4 + 1)(n^8 + 1)$.
Pelo Teorema de Fermat $n^2 \equiv 1 \pmod{3} \Rightarrow 3 \mid (n^2 - 1) \Rightarrow 3 \mid X$ (4)
De (1), (2), (3) e (4) concluímos que $2.3.5.7.13.17 \mid n^{30} - n^{14} - n^{18} + n^2$.

4) Se p e q são primos distintos tais que $a^p \equiv a \pmod{q}$ e $a^q \equiv a \pmod{p}$ prove que $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$.
Solução:
Pelo Teorema de Fermat temos: $(a^q)^p \equiv a^q \pmod{p}$ e $a(a^p)^q \equiv a^q \pmod{q}$.
Como $a^p \equiv a \pmod{q}$ e $a^p \equiv a \pmod{q}$, então $a^{pq} \equiv a \pmod{p}$ e $a^{pq} \equiv a \pmod{q} \Rightarrow$
$p \mid (a^{pq} - a)$ e $q \mid (a^{pq} - a)$
Como mdc (p, q) = 1, temos que $pq \mid (a^{pq} - a)$, isto é: $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$

5) (OBM-91) Mostre que existe um número da forma $\underbrace{1999...991}_{n \text{ noves}}$ com mais de dois noves que é múltiplo de 1991.
Solução:
Notemos que $\underbrace{1999...991}_{n\ 9's} = \underbrace{2000...00}_{n+1\ 0's} - 9 = 2.10^{n+1} - 9 = 2000.10^{n-2} - 9$ e que $1991 = 11.181$.

Assim, como $2000 \equiv 9 \pmod{1991} \Rightarrow \underbrace{1999...991}_{n\ 9's} \equiv 9(10^{n-2} - 1) \pmod{1991}$.

Para que $\underbrace{1999...991}_{n \text{ noves}}$ seja múltiplo de 1991, devemos ter: $9(10^{n-2} - 1) \equiv 0 \pmod{1991} \Rightarrow$
$10^{n-2} \equiv 1 \pmod{1991}$, uma vez que 9 e 1991 são primos entre si.
Sendo 181 e 10 primos entre si, pelo teorema de Fermat: $10^{180} \equiv 1 \pmod{181}$.
Analogamente, para 11 e 10: $10^{10} \equiv 1 \pmod{11} \Rightarrow 10^{180} \equiv 1 \pmod{11}$.
Assim, temos que $10^{180} - 1$ é múltiplo de 181 e 11 e, portanto, múltiplo do mínimo múltiplo comum de 11 e 181, que é 1991. Em outras palavras: $10^{180} \equiv 1 \pmod{1991}$.
Desta forma, para $n = 182 \Rightarrow \underbrace{1999...991}_{182 \text{ noves}} \equiv 0 \pmod{1991}$.

6) Se n é um inteiro maior que 1, prove que n não divide $2^n - 1$."
Solução:
Seja p o menor divisor primo de n. Então mdc (n, p − 1) = 1, o que implica que existem inteiros x e y tais que $xn + y(p - 1) = 1$. Suponhamos que $p \mid (2^n - 1)$, ou seja, $2^n \equiv 1 \pmod{p}$.
Pelo teorema de Fermat temos $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.
$2 = 2^{xn + y(p-1)} = 2^{(n)^x}(2^{p-1})^y \equiv 1 \pmod{p}$ que é uma contradição, ou seja, n não divide $2^n - 1$.

7) Prove que existem infinitos números compostos n que satisfazem a relação $n \mid a^{n-1} - a$, para todo inteiro a.
Solução:
Seja p um número primo ímpar.
Pelo Teorema de Fermat, se mdc (a, p) = 1 temos que $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (a^{p-1})^2 \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow$
$a^{2p-2} \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow a(a^{2p-2}) \equiv a \pmod{p} \Rightarrow a^{2p-1} - a \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow p \mid a^{2p-1} - a$.

Como a^{2p-1} e a tem a mesma paridade, $a^{2p-1} - a$ é par, e como p é ímpar $\Rightarrow$ $2p \mid a^{2p-1} - a$.
Se mdc (a, p) $\neq 1$ $\Rightarrow$ mdc (a, p) = p, pois p é primo.
Assim, temos diretamente que $2p \mid a^{2p-1} - a$.
Deste modo, fazendo n = 2p (p um primo ímpar) temos sempre que $n \mid a^{n-1} - a$, para todo inteiro a.

8) Sejam p e q primos distintos. Demonstrar: $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$.
Solução:
Pelo Teorema de Fermat: $p^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$ e $q^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$
Assim: $q \mid p^{q-1} - 1$ e $p \mid q^{p-1} - 1$ $\Rightarrow$ $pq \mid (p^{q-1} - 1)(q^{p-1} - 1)$ $\Rightarrow$ $pq \mid p^{q-1}q^{p-1} - (p^{q-1} + q^{p-1}) + 1$
Como $pq \mid p^{q-1}q^{p-1}$ $\Rightarrow$ $pq \mid (p^{q-1} + q^{p-1}) - 1$ $\Rightarrow$ $p^{q-1} + q^{p-1} \equiv 1 \pmod{pq}$

9) (Berkeley Math Circles-99) Prove que existem infinitos termos na progressão aritmética 8, 21, 34, 47, ... que são formados somente pelo dígito 9, ou seja, da forma 999...99.
Solução:
Inicialmente, verificamos que progressão aritmética dada é $a_m = 8 + 13m$, m = 0, 1, 2, ...
Sabemos, também, que todo número formado somente por n dígitos 9 pode ser escrito da forma $10^n - 1$.
Portanto, devemos provar que a equação $8 + 13m = 10^n - 1$ possui infinitas soluções para os inteiros positivos n e m.
Assim: $13m = 10^n - 9$ $\Rightarrow$ $10^n \equiv 9 \pmod{13}$
Note que n = 2 é uma solução, uma vez que $10^2 \equiv 9 \pmod{13}$ (1)
Pelo Teorema de Fermat: $10^{12} \equiv 1 \pmod{13}$ $\Rightarrow$ $10^{12k} \equiv 1 \pmod{13}$ (2)
Multiplicando as congruências (1) e (2) $\Rightarrow$ $10^{12k+2} \equiv 9 \pmod{13}$, k = 1, 2, 3, ...
Deste modo, para todo inteiro positivo k, temos que todos os números formados por 12k + 2 dígitos 9's fazem parte da progressão aritmética $a_m = 8 + 13m$, m = 0, 1, 2, ...

10) (Olimpíada do Canadá-83) Prove que para todo número primo p, existem infinitos inteiros positivos n tais que p divide $2^n - n$.
Solução:
Sendo p um primo ímpar, pelo Teorema de Fermat: $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow$ $2^{k(p-1)} \equiv 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow$
$2^{k(p-1)} - k(p-1) \equiv 1 - k(p-1) \pmod{p}$ $\Rightarrow$ $2^{k(p-1)} - k(p-1) \equiv k + 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow$
$2^{k(p-1)} - k(p-1) - (k+1) \equiv 0 \pmod{p}$
Fazendo $n = k(p-1)$ temos que $2^n - n = 2^{k(p-1)} - k(p-1)$
Como $p \mid [2^{k(p-1)} - k(p-1) - (k+1)]$, para que $p \mid 2^{k(p-1)} - k(p-1)$ $\Rightarrow$ $p \mid k + 1$
Ou seja, basta fazer $k + 1 = x.p$ $\Rightarrow$ $k = xp - 1$
Em outras palavras, para cada número primo p, p divide $2^n - n$ se $n = k(p-1)$ e $k = xp - 1$, $x \in N$.

11) (Seletiva da Romênia para IMO) Prove que não existe um inteiro n > 1 tal que n divida $3^n - 2^n$.
Solução:
Suponha o contrário, isto é, que para algum inteiro n > 1 tenhamos $3^n - 2^n \equiv 0 \pmod{n}$. Obviamente 2 e 3 não dividem n.
Seja agora p o menor fator primo de n e n = pm (aqui é que usamos ser n > 1, para garantir que n tem fator primo).
Nossa hipótese, juntamente com o pequeno teorema de Fermat, nos dão:
$3^n \equiv 2^n \pmod{n}$ $\Rightarrow$ $3^{mp} \equiv 2^{mp} \pmod{p}$ $\Rightarrow$ $3^m \equiv 2^m \pmod{p}$ (*)
Se d = mdc(m, p − 1), temos em particular que d divide n. Portanto, o fato de ser p o menor divisor primo de n implica que d = 1. Tome então inteiros positivos x e y satisfazendo $mx = (p-1)y + 1$.
O pequeno teorema de Fermat de novo, juntamente com (*), nos dão
$3 \equiv 3^{(p-1)y+1} = 3^{mx} \equiv 2^{mx} = 2^{(p-1)y+1} \equiv 2 \pmod{p}$, o que é um absurdo.

APÊNDICE 4: TEOREMA DE WILSON

Teorema de Wilson: "Se p é um primo, então $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$."
Demonstração:
Consideremos a congruência linear: $ax \equiv 1 \pmod{p}$ onde a é qualquer dos $p-1$ inteiros positivos da seqüência
$1, 2, 3, \ldots, p-1 \qquad (1)$
Então, o mdc $(a, p) = 1$ e é sabido que esta congruência admite uma única solução módulo p, isto é, existe um único inteiro a_1, com $1 \le a_1 \le p-1$, tal que $aa_1 \equiv 1 \pmod{p}$
Se p é primo, temos que $a = a_1$ se e somente se $a = 1$ ou $a = p-1$.
De fato, a congruência quadrática $a^2 \equiv 1 \pmod{p}$ é equivalente à seguinte
$(a-1)(a+1) \equiv 0 \pmod{p}$ de modo que $p \mid (a-1)$ ou $p \mid (a+1)$, o que implica que:
$a - 1 \equiv 0 \pmod{p}$ e $a = 1$ ou $a + 1 \equiv 0 \pmod{p}$ e $a = p-1$
Então para cada a distinto da seqüência (1) existe somente um a_1 correspondente na seqüência (1) que satisfaz a congruência $aa_1 \equiv 1 \pmod{p}$. Omitindo os pares 1 e $p-1$, com os $p-3$ inteiros restantes: 2, 3, ..., $p-3$, podemos formar $(p-3)/2$ pares a, a_1, com $a \neq a_1$, e tais que $aa_1 \equiv 1 \pmod{p}$.
Multiplicando todas essas $(p-3)/2$ congruências, obtemos:
$2.3.4\ldots(p-3)(p-2) \equiv 1 \pmod{p} \Rightarrow (p-2)! \equiv 1 \pmod{p}$
Multiplicando por $p-1$: $(p-1)! \equiv p-1 \pmod{p} \Rightarrow (p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$

Teorema: "Uma condição necessária e suficiente para que um número natural $p > 1$ seja primo é que o número $(p-1)! + 1$ seja divisível por p."
Demonstração:
Suponhamos que p não seja primo. Então existe um divisor q de p tal que $1 < q < p$.
O número $(p-1)! + 1$ sendo divisível por p, também deve ser divisível por q.
Desde que $q < p$, então $q \le p-1$, implicando que q divide algum inteiro positivo entre 2 e $p-1$.
Assim q divide $(p-1)!$. Como q divide $(p-1)! + 1$ então q também divide 1, que é uma contradição, pois $1 < q < p$.

Teorema: "Se p é primo e a um inteiro, então $p \mid a^p + (p-1)!a$."
Demonstração:
Pelo Teorema de Wilson temos que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$
Somando esta expressão o valor a^{p-1}: $a^{p-1} + (p-1)! \equiv a^{p-1} - 1 \pmod{p}$
Multiplicando agora por a: $a^p - (p-1)!a \equiv a^p - a \pmod{p}$
Pelo Teorema de Fermat temos que $a^p \equiv a \pmod{p} \Rightarrow a^p - (p-1)!a \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow$
$p \mid a^p - (p-1)!a$

Exemplos:

1) Verificar o Teorema de Wilson para p = 7.
Solução:
Temos: $(7-1)! + 1 = 6! + 1 = 720 + 1 = 721 = 7.103$
Portanto: $(7-1)! + 1 \equiv 0 \pmod{7} \Rightarrow (7-1)! \equiv -1 \pmod{7}$

2) Prove que se p é número primo, então $2(p-3)! \equiv -1 \pmod{p}$.
Solução:
Se p é um número primo, pela Teorema de Wilson temos que $(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$
$\therefore (p-1)(p-2)[(p-3)!] \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow (p^2 - 3p - 2)[(p-3)!] \equiv -1 \pmod{p} \Rightarrow$
$p(p-3)[(p-3)!] + 2[(p-3)!] \equiv -1 \pmod{p}$ e como $p(p-3)[(p-3)!]$ é divisível por p $\Rightarrow$
$2[(p-3)!] \equiv -1 \pmod{p}$

3) Se p é um primo da forma 4k + 1 (onde k é um número natural), então $p \left| \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 1\right.$.

Demonstração:

Desde que $\frac{p-1}{2} = 2k$, temos a seguinte igualdade:

$$1.2.3...\frac{(p-1)}{2} = (-1)(-2)(-3)...\left(-\frac{p-1}{2}\right) \Rightarrow 1.2.3...\frac{p-1}{2} \equiv (p-1)(p-2)(p-3)...\left(\frac{p+1}{2}\right) \text{ (mod. p)}$$

Assim, multiplicando esta congruência por $1.2.3...\frac{(p-1)}{2}$:

$$\left[1.2.3...\frac{(p-1)}{2}\right]^2 \equiv 1.2.3...\frac{(p-1)}{2}.\frac{(p+1)}{2}...(p-2)(p-1) \text{ (mod. p)} \Rightarrow \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv (p-1)! \text{ (mod. p)}$$

Pelo Teorema de Wilson: $\left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 \equiv -1 \text{ (mod. p)} \Rightarrow p \left| \left[\left(\frac{p-1}{2}\right)!\right]^2 + 1\right.$.

4) (Olimpíada da Áustria-2000) Mostre que existem infinitos pares de números naturais distintos n e k tais que mdc (n! + 1, k! + 1) > 1.

Solução:

Seja k um inteiro positivo tal que k + 1 não é primo e seja p um número primo tal que $p \mid k! + 1$ e que $p \geq k + 2$.

Seja n = p – 1, ou seja, n > k.

Pelo Teorema de Wilson: $p \mid n! + 1 \Rightarrow$ mdc (n! + 1, k! + 1) ≥ p > 1.

5) Mostre que existem infinitos pares de números naturais distintos n e k tais que mdc (n! – 1, k! – 1) > 1.

Solução:

Note de início que se p é primo então pelo Teorema de Wilson temos: $(p-1)! \equiv -1 \text{ (mod. p)}$

Portanto: $(p-1)(p-2)! \equiv -1 \text{ (mod. p)} \Rightarrow p(p-2)! - (p-2)! \equiv -1 \text{ (mod. p)} \Rightarrow (p-2)! \equiv 1 \text{ (mod. p)}$

Seja k > 3 um inteiro par, ou seja, k! – 1 > 1 e k + 2 não é primo (pois é par).

Seja p um divisor de k! – 1. Então temos que $k \neq p - 2$.

Assim, fazendo n = p – 2 temos que $p \mid n! - 1$ e $p \mid k! - 1$, implicando que mdc (n! – 1, k! – 1) ≥ p > 1.

6) (Olimpíada da Irlanda-96) Para cada inteiro positivo n, seja f(n) o máximo divisor comum de n! + 1 e (n + 1)! (onde n! denota n fatorial). Determine, com prova, uma fórmula para f(n) para cada n.

Solução:

Vamos mostrar que f(n) = n + 1 se n + 1 for primo e f(n) = 1 caso contrário.

Por conveniência, denotemos f(n) por d. Desde que $d \mid n! + 1$ e $d \mid (n+1)! \Rightarrow d \mid (n+1)(n!+1) - (n+1)! \Rightarrow d \mid n + 1$.

Caso n + 1 seja primo, pelo Teorema de Wilson temos que $n + 1 \mid n! + 1$.

Como $n + 1 \mid (n+1)! \Rightarrow n + 1 \mid d$. Desde que $d \mid n + 1 \Rightarrow d = n + 1$.

Se n + 1 for composto então n + 1 = a.b para alguns inteiros a e b tais que $1 < a \leq b < n$.

Se d = n – 1 então ab = d $\Rightarrow$ $a \mid d$.

Desde que $d \mid n! + 1$ temos $a \mid n! + 1$.

Por outro lado, como a < n então necessariamente $a \mid n!$, e como $a \mid n! + 1 \Rightarrow a \mid 1$, que é uma contradição.

Assim, d ≤ n, implicando que $d \mid n!$. Como $d \mid n! + 1 \Rightarrow d \mid 1 \Rightarrow d = 1$.

7) (Olimpíada da Áustria-Polônia-99) Mostre que não existem inteiros não-negativos k e m tais que $k! - 48 = 48(k + 1)^m$.

Solução:

Suponhamos que existem os inteiros não-negativos k e m satisfazendo a equação dada.
Assim diretamente segue que $48 \mid k!$.
Desde que $48 = 2^4.3$, necessariamente $k \geq 6$. Se $k = 6$ ou $k = 7$, a equação torna-se $16 = 7^m$ ou $106 = 8^m$, respectivamente, que obviamente não possuem soluções inteiras. Por isso $k \geq 8$, e a equação pode ser reescrita da forma:
$3 \times 5 \times 7 \times 8 \times \ldots \times (k-1) \times k + 1 = (k+1)^m$. (1)
Suponha que $k + 1$ é composto. Então ele possui um divisor primo q. Desde que $q \leq k$, temos que $q \mid k!$, implicando que $q \mid 48$.
Como $k \geq 8$, o lado esquerdo da igualdade 1 é ímpar e assim q deve ser ímpar. Deste modo, sendo q ímpar e $q \mid 2^4 3$, então $q = 3$. Entretanto $q = 3$ é um caso impossível, pois como $3 \mid (k+1)^m$ e $3 \mid 3 \times 5 \times 7 \times 8 \times \ldots \times (k-1) \times k \Rightarrow 3 \mid 1$ que é falso.
Concluímos portanto que $k + 1 = p$ é primo.
Pelo Teorema de Wilson sabemos que:
$(p-1)! \equiv -1 \pmod{p}$, e como $p - 1 = k \Rightarrow k! \equiv -1 \pmod{p}$.
Reescrevendo a equação como $k! + 1 + 47 = 48p^m$ e dividindo esta equação por p concluímos que $p \mid 47 \Rightarrow p = 47$.
Assim: $46! + 48 = 48.47^m \Rightarrow 46! = 48(47^m - 1)$.
Evidentemente entre os divisores de 46! estão 5, 7 e 11, que também devem dividir $47^m - 1$.
Pelo Teorema de Fermat: $47^4 \equiv 1 \pmod{5}$ $47^6 \equiv 1 \pmod{7}$ $47^{10} \equiv 1 \pmod{11}$
Contudo, existe um número x menor que 10 tal que:
$47^x \equiv 1 \pmod{11}$, que é $x = 5 \Rightarrow 47^5 \equiv 1 \pmod{11}$.
Desta forma, como $5, 7, 11 \mid (47^m - 1) \Rightarrow$ m deve ser múltiplo do mmc $(4, 6, 5) = 60 \Rightarrow m \geq 60$.
Porém, para $m \geq 60$ concluímos que $48(47^m - 1) > 46!$, implicando que não existe m solução da equação.

APÊNDICE 5: EQUAÇÕES DIOFANTINAS NÃO LINEARES

Equações Diofantinas Não Lineares

Uma equação diofantina é dita não linear se pelo menos um de seus termos é um termo não linear, ou seja, não possui dependência diretamente proporcional com a incógnita. São exemplos de equações não lineares:

$x^2 + y^2 = z^2$, $x^3 + y^3 + z^3 = 2$, $xy = 81$, $x^2 + x + y^2 + y = 60$, $1/x + 1/y = 1/z$, $(\text{sen } x).(\cos y) = 1/2$

Soluções de Equações Diofantinas Não Lineares

Ao contrário das equações diofantinas lineares, as equações diofantinas não lineares não possuem um método universal para averiguar se a equação possui soluções inteiras, e tão pouco quais são estas soluções inteiras. As três maiores preocupações, quando da análise de uma equação diofantina linear, são, em ordem crescente de dificuldade:

1. Analisar se esta equação possui pelo menos uma solução inteira;
2. Analisar se o número de soluções inteiras é finito ou infinito;
3. Determinar todas as soluções inteiras.

Existem equações para as quais nenhum dos itens acima pode ser determinado. Por exemplo, não é sabido se a equação diofantina $x^3 + y^3 + z^3 = 30$ possui soluções inteiras. Por outro lado, são conhecidas quatro soluções inteiras para a equação $x^3 + y^3 + z^3 = 3$, que são $(x, y, z) = \{(1, 1, 1), (4, 4, -5), (4, -5, 4), (-5, 4, 4)\}$, entretanto não é sabido se existem outras soluções inteiras. Sabe-se que a equação $x^3 + y^3 - z^3 = 2$ possui infinitas soluções inteiras, pois $(x, y, z) = (1 + 6n^3, 1 - 6n^3, -6n^2)$ satisfaz a equação, onde n é um número natural qualquer. Contudo, não é possível afirmar que não existam outras soluções inteiras.

Por outro lado, pode-se provar que a equação $x^3 + y^3 + z^3 = 4$ não possui soluções inteiras. De fato, os únicos valores possíveis para os restos da divisão de um cubo de um inteiro por 9 são 0, 1 e 8. Assim, os únicos valores possíveis para os restos da divisão da soma dos cubos de dois inteiros por 9 são 0, 1, 2, 7 e 8, e similarmente, dividindo a soma dos cubos de três inteiros por 9, os restos possíveis são 0, 1, 2, 3, 6, 7 e 9, mas nunca 4 ou 5. Desta forma, não somente a equação $x^3 + y^3 + z^3 = 4$, mas também a equação $x^3 + y^3 + z^3 = 5$ não possui soluções inteiras x, y, z (mais geralmente, a equação $x^3 + y^3 + z^3 = k$, onde k dividido por 9 deixa resto 4 ou 5, não possui soluções inteiras).

Exemplos:

1) Prove que $x^4 + y^4 = 5z^2$ não possui soluções naturais x, y, z com mdc $(x, y, z) = 1$.

Solução:

∴ Se x for divisível por 5 ($x = 5m$), então y também é divisível por 5, pois $y^4 = 5(z^2 - 5^3m^4)$

Assim mdc $(x, y, z) \geq 5$, contrariando o enunciado.

Então x e y são da forma $5k \pm 1$ ou $5k \pm 2$

$\therefore (5k \pm 1)^2 = 5(5k^2 \pm 2k) + 1$ e $(5k \pm 2)^2 = 5(5k^2 \pm 4k + 1) - 1$

Ou seja, o quadrado de x e y é da forma $5k \pm 1$

Elevando ao quadrado mais uma vez tiramos que a quarta potência de x e y também é da forma $5k \pm 1$

∴ Dividindo x^4 e y^4 por 5 obtemos resto 1, o que implica que o resto de $x^4 + y^4$ por 5 é 2

Como $5z^2$ é divisível por 5, temos que $x^4 + y^4 = 5z^2$ não possui soluções naturais.

2) Determine todas as soluções inteiras da equação $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z}$.

Solução:

Como $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{z} \Rightarrow (x + y)z = xy \Rightarrow x + y \mid xy$

Seja $d = \text{mdc}(x, y) \Rightarrow x = dm$ e $y = dn$ onde mdc $(m, n) = 1$

Como $x + y = d(m + n)$ e $xy = d^2mn$, para que $x + y \mid xy \Rightarrow d(m + n) \mid d^2mn \Rightarrow m + n \mid dmn$
Desde que $mdc(m, n) = 1 \Rightarrow mdc(m + n, mn) = 1 \Rightarrow m + n \mid d \Rightarrow d = k(m + n)$
$\therefore$ Como $x = dm \Rightarrow x = km(m + n)$
$\therefore$ Como $y = dn \Rightarrow y = kn(m + n)$
$\therefore$ Como $z = xy/(x + y) \Rightarrow z = kmn$

3) Os inteiros positivos a, b, c possuem as seguintes propriedades:
1. a é ímpar;
2. o máximo divisor comum de a, b, c é 1;
3. eles satisfazem a equação Diofantina $\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c}$.

Prove que abc é um quadrado perfeito.

Solução:

A equação pode ser desenvolvida:

$\frac{2}{a} + \frac{1}{b} = \frac{1}{c} \Rightarrow 2bc = a(b - c) \Rightarrow 4bc = 2ab - 2ac \Rightarrow 2bc = 2ab - 2ac - 2bc \Rightarrow$
$2bc + a^2 + b^2 + c^2 = 2ab - 2ac - 2bc + a^2 + b^2 + c^2 \Rightarrow a^2 + (b + c)^2 = (a + b - c)^2$.
Pela condição 3 temos que $b > c$, ou seja, $a + b - c$ é um inteiro positivo.
Desta forma $(a,\ b + c,\ a + b - c)$ é uma solução da equação pitagórica.
Vamos mostrar agora que esta solução é primitiva, ou seja, que a, $b + c$ e $a + b - c$ são primos relativos.
Seja $d = mdc(a,\ b + c,\ a + b - c) \Rightarrow d \mid a \quad d \mid (b + c) \quad d \mid (a + b - c)$.
Assim, $d \mid [(a) + (b + c) - (a + b - c)] \Rightarrow d \mid 2c$
Também: $d \mid [(a) - (b + c) - (a + b - c)] \Rightarrow d \mid 2b$
Como a é ímpar então d também é ímpar. Assim temos que $d \mid c$ e $d \mid b$ (lembre-se que $d \mid a$).
Como $mdc(a, b, c) = 1 \Rightarrow d = 1 \Rightarrow mdc(a,\ b + c,\ a + b - c) = 1$.
Desde que $(a,\ b + c,\ a + b - c)$ é uma solução primitiva da equação pitagórica então:
$a = m^2 - n^2 \quad b + c = 2mn \quad a + b - c = m^2 + n^2$.
Resolvendo este sistema linear obtemos: $a = m^2 - n^2 \quad b = n(m + n) \quad c = n(m - n)$
Portanto: $abc = (m^2 - n^2)n(m + n)n(m - n) \Rightarrow abc = [n(m^2 - n^2)]^2$

4) Determine todas as soluções inteiras e positivas da equação: $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Solução:

Notemos inicialmente que um dos inteiros x, y, z deve ser menor do que 4, pois se tivéssemos todos os três maiores do que 4 o maior valor possível de $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$ seria $\frac{1}{4} + \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{3}{4} < 1$.

Assumindo que $x \le y \le z$, nós temos duas possibilidades:

i) $x = 2 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2} \Rightarrow yz - 2y - 2z = 0 \Rightarrow yz - 2y - 2z + 4 = 4 \Rightarrow (y - 2)(z - 2) = 4$

Desde que y e z não excedem 1, então $y - 2$ e $z - 2$ não podem ser negativos, e os únicos casos possíveis são:
I) $y - 2 = 2$ e $z - 2 = 2 \Rightarrow y = 4$ e $z = 4$
II) $y - 2 = 1$ e $z - 2 = 4 \Rightarrow y = 3$ e $z = 6$

ii) $x = 3 \Rightarrow \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3} \Rightarrow 2yz - 3y - 3z = 0 \Rightarrow 4yz - 6y - 6z = 9 \Rightarrow (2y - 3)(2z - 3) = 9$

Desde que $y \ge x = 3$, $2y - 3 \ge 3$, e $2z - 3 \ge 3$, existe somente uma possibilidade:
$2y - 3 = 3$ e $2z - 3 = 3 \Rightarrow y = 3$ e $z = 3$
Deste modo, todas as soluções do problema são dadas pela equação:

$\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}=1$; $\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{6}=1$; $\frac{1}{3}+\frac{1}{3}+\frac{1}{3}=1$.

5) (Olimpíada da Polônia-97) Determine todos os ternos de números racionais positivos (x, y, z) tais que $x + y + z$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}$ e xyz são números inteiros.

Solução:

Sejam $x + y + z = n_1$, $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=n_2$ e $xyz = n_3$, onde n_1, n_2 e n_3 são inteiros. Então $yz + zx + xy = n_2n_3$ e x, y, z são raízes da equação de terceiro grau $t^3 - n_1t^2 + n_2n_3t - n_3 = 0$.

Sabemos que se uma equação de terceiro possui uma solução racional, então esta solução é igual a p/q, onde p é um fator do coeficiente de t^0 (que é $-n_3$) e q é um fator do coeficiente de t^3 (que é 1). Como os únicos fatores de 1 são 1 e -1, então $q = 1$ ou $q = -1$, implicando que todas as soluções de $t^3 - n_1t^2 + n_2n_3t - n_3 = 0$ são fatores de n_3, ou seja, as soluções são todas inteiras. Como as soluções de $t^3 - n_1t^2 + n_2n_3t - n_3 = 0$ são x, y e z, então x, y e z são inteiros positivos.

Como $\frac{1}{x}+\frac{1}{y}+\frac{1}{z}=n_2 \Rightarrow \frac{1}{x.n_2}+\frac{1}{y.n_2}+\frac{1}{z.n_2}=1 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Sabemos que as únicas soluções inteiras positivas de $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$ são (a, b, c) = [(3, 3, 3), (2, 4, 4), (2, 3, 6)].

Analisando cada solução:

i) $x.n_2 = 3$ $y.n_2 = 3$ $z.n_2 = 3$:

Podemos ter duas possibilidades: $n_2 = 1$ ou $n_2 = 3$.

Se $n_2 = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (3, 3, 3)$

Se $n_2 = 3 \Rightarrow (x, y, z) = (1, 1, 1)$

ii) $x.n_2 = 2$ $y.n_2 = 4$ $z.n_2 = 4$:

Temos novamente duas possibilidades: $n_2 = 1$ ou $n_2 = 2$.

Se $n_2 = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (2, 4, 4)$

Se $n_2 = 2 \Rightarrow (x, y, z) = (1, 2, 2)$

iii) $x.n_2 = 2$ $y.n_2 = 3$ $z.n_2 = 6$

Temos somente uma possibilidade: $n_2 = 1 \Rightarrow (x, y, z) = (2, 3, 6)$.

6) Prove que a equação $x^2 + 12 = y^3$ não possui soluções inteiras.

Solução:

Suponhamos que existam inteiros x, y satisfazendo a equação $x^2 + 12 = y^3$.

Se o número x é par ($x = 2x_1$) então o número y é par ($y = 2y_1$) $\Rightarrow x_1^2 + 3 = 2y_1^3 \Rightarrow x_1$ é ímpar

$x_1 = 2t + 1 \Rightarrow x_1^2 = 4t(t + 1) + 1 \Rightarrow x_1^2 = 8k + 1$

Como $2y_1^3 = x_1^2 + 3 \Rightarrow 2y_1^3 = 8k + 4 \Rightarrow y_1^3 = 4k + 2$

Entretanto não existe cubo desta forma, pois o cubo de um número par é da forma 8k.

Assim concluímos que x e y devem ser ímpares

$\therefore x^2 + 4 = y^3 - 8 = (y - 2)(y^2 + 2y + 4) = (y - 2)((y + 1)^2 + 3)$

Como y é ímpar $\Rightarrow x^2 + 4 = 4t + 3 \Rightarrow x^2 = 4t - 1 \Rightarrow x^2 = 4(t - 1) + 3 \Rightarrow x^2 = 4k - 3$

Entretanto isto é impossível, pois como x é ímpar $\Rightarrow x = 2q + 1 \Rightarrow x^2 = 4q(q + 1) + 1 \Rightarrow x^2 = 4k + 1$

Portanto $x^2 + 12 = y^3$ não possui soluções inteiras

7) Resolva a equação $x^y = y^x$ nos números inteiros x e y, com $x \neq y$.

Solução:

Suponhamos que $y > x$, então $r = x/(y - x)$ é um número racional positivo $\Rightarrow y = (1 + 1/r)x$

$\therefore x^y = x^{(1 + 1/r)x}$ e como $x^y = y^x \Rightarrow x^{(1 + 1/r)x} = y^x \Rightarrow x^{1 + 1/r} = y = (1 + 1/r)x$

Então $x^{1/r} = 1 + 1/r \Rightarrow x = (1 + 1/r)^r$ e $y = (1 + 1/r)^{r + 1}$

Seja $r = n/m$, onde mdc $(m, n) = 1$, e $x = t/s$, onde mdc $(t, s) = 1$.
Desde que $x = (1 + 1/r)^r$ temos que $[(m + n)/n]^{n/m} = t/s \Rightarrow (m + n)^n/n^n = t^m/s^m$
Cada lado da última igualdade é irredutível e mdc $(m, n) = 1$, temos que mdc $(m + n, n) = 1 \Rightarrow$ mdc $((m + n)^n, n^n) = 1$ e como mdc $(t, s) = 1 \Rightarrow$ mdc $(t^m, s^m) = 1$
Deste modo $(m + n)^n = t^m$ e $n^n = s^m$
Usando o seguinte teorema: "Se os números naturais a, b, c, d satisfazem as condições mdc $(c, d) = 1$ e $a^c = b^d$, então existe um número natural n tal que $a = n^d$ e $b = n^c$."
Temos que $m + n = k^m$ e $t = k^n$, e também $n = l^m$ e $s = l^m$
$\therefore m + l^m = k^m \Rightarrow k \geq l + 1$
Se $m > 1 \Rightarrow k^m > (l + 1)m \geq l^m + ml^{m-1} + 1 > l^m + m = k^m$, que é impossível
Assim $m = 1 \Rightarrow r = n/m = n$, que nos leva a concluir que: $x = (1 + 1/n)^n$ e $y = (1 + 1/n)^{n+1}$

8) (Olimpíada do Canadá-69) Mostre que não existem números inteiros a, b, c tais que $a^2 + b^2 - 8c = 6$.
Solução:
$\therefore a^2 + b^2 = 8c + 6 \Rightarrow$ a e b são ambos pares ou ambos ímpares
i) a e b ambos pares $\Rightarrow a = 2a_1$ e $b = 2b_1 \Rightarrow a^2 = 4a_1^2$ e $b^2 = 4a_2^2$
Então $a^2 + b^2$ deve ser divisível por 4.
Entretanto $8c + 6 = 4(2c + 1) + 2 = 4k + 2$ não é divisível por 4, pois deixa 2 quando divisível por 4
Assim, para a e b pares, $a^2 + b^2 = 8c + 6$ não possui inteiros que satisfazem.
ii) a e b ímpares $\Rightarrow a = 2n + 1$ e $b = 2m + 1 \Rightarrow a^2 = 4n(n + 1) + 1$ e $b^2 = 4m(m + 1) + 1 \Rightarrow$ $a^2 = 8k_1 + 1$ e $b^2 = 8k_2 + 1$
Portanto $a^2 + b^2$ deixa resto 2 quando dividido por 8. Porém $8c + 6$ deixa resto 6 quando dividido por 8
Assim, para a e b ímpares, $a^2 + b^2 = 8c + 6$ não possui inteiros que satisfazem.

9) (Irlanda-2001) Determine todas as soluções da equação $2^n = a! + b! + c!$ nos inteiros positivos a, b, c, n.
Solução:
Inicialmente notemos a, b, c não podem todos serem simultaneamente maiores ou iguais que 3, pois assim a soma $a! + b! + c!$ vai ser divisível por 3, que é impossível.
Assim, pelo menos um dos valores a, b ou c (digamos a) seja igual a 1 ou 2.
Inicialmente façamos $a = 1$:
Assim: $1 + b! + c! = 2^n$.
Para que $1 + b! + c!$ seja par temos que impor $b = 1 \Rightarrow 2 + c! = 2^n \Rightarrow c! = 2^n - 2 \Rightarrow c! = 2(2^{n-1} - 1)$
Deste modo a maior potência de 2 que divide c! é 2, implicando que temos dois casos possíveis: $c = 2$ e $c = 3$.
Aplicando $c = 2$ temos que $1! + 1! + 2! = 4 = 2^2$ e aplicando $c = 3$ temos que $1! + 1! + 3! = 8 = 2^3$, ou seja, temos as soluções:
$(a, b, c, n) = \{(1, 1, 2, 2), (1, 2, 1, 2), (2, 1, 1, 2), (1, 1, 3, 3), (1, 3, 1, 3), (3, 1, 1, 3)\}$
Considere agora $a = 2$:
Portanto: $2 + b! + c! = 2^n \Rightarrow b! + c! = 2(2^{n-1} - 1)$, ou seja, a maior potência de 2 que divide $b! + c!$ é 2, fazendo com que um dos valores b e/ou c seja igual a 2 ou 3.
Façamos $b = 2 \Rightarrow c! = 2^n - 4 \Rightarrow c! = 2^2(2^{n-2} - 1)$, implicando que a maior potência de 2 que divide c! é 2^2.
Entretanto não existe nenhum fatorial que seja divisível exatamente por 4.
Façamos $b = 3 \Rightarrow c! = 2^n - 8 \Rightarrow c! = 2^3(2^{n-3} - 1)$, implicando que a maior potência de 2 que divide c! é 2^3.
Desta forma temos duas possibilidades, $c = 4$ e $c = 5$:
i) $c = 4 \Rightarrow a! + b! + c! = 2 + 6 + 24 = 32 = 2^5$
ii) $c = 5 \Rightarrow a! + b! + c! = 2 + 6 + 120 = 128 = 2^7$
Temos agora as soluções:

(a, b, c, n) = {(2, 3, 4, 5), (2, 4, 3, 5), (3, 2, 4, 5), (3, 4, 2, 5), (4, 2, 3, 5), (4, 3, 2, 5), (2, 3, 5, 7), (2, 5, 3, 7), (3, 2, 5, 7), (3, 5, 2, 7), (5, 2, 3, 7), (5, 3, 2, 7)}

10) (Brasil Preparação Cone Sul-99) Prove que não existem racionais positivos x, y tais que $x^2 + xy + y^2 = 2$.

Solução:

Multiplicando a equação por 4: $4x^2 + 4xy + 4y^2 = 8 \Rightarrow (2x + y)^2 + 3y^2 = 8 \Rightarrow z^2 + 3y^2 = 8$

Se z e y são racionais positivos então existem os inteiros positivos p, q, m, n tais que $z = p/q$ e $y = m/n$.

Podemos supor também que estas fração que definem y e z estão na forma mais fatorada possível, ou seja, temos simultaneamente que mdc (p, q) = 1 e mdc (m, n) = 1.

$$\therefore \frac{3p^2}{q^2} + \frac{m^2}{n^2} = 8 \Rightarrow 3p^2n^2 + m^2q^2 = 8q^2n^2 \Rightarrow 3a^2 + b^2 = 8c^2$$

(1) a e b ímpares $\Rightarrow a^2 = 8k_1 + 1$ e $b^2 = 8k_2 + 1 \Rightarrow 3a^2 + b^2 = 8k + 4$, ou seja, se a e b forem ímpares então $3a^2 + b^2$ não é divisível por 8, que é uma contradição. Assim, para a e b ímpares não temos solução.

(2) a par e b ímpar $\Rightarrow 3a^2 + b^2$ é ímpar, ou seja, não temos solução.

(3) a ímpar e b par $\Rightarrow 3a^2 + b^2$ é ímpar, ou seja, novamente não temos solução.

(4) a par e b par $\Rightarrow a^2 = 4a_1^2$ $b^2 = 4b_1^2 \Rightarrow 4(3a_1^2 + b_1^2) = 8c^2 \Rightarrow 3a_1^2 + b_1^2 = 2a^2 \Rightarrow a_1$ e b_2 possuem a mesma paridade.

i) a_1 e b_1 pares $\Rightarrow a_1^2 = 4a_2^2$ $b_1^2 = 4b_2^2 \Rightarrow 4(3a_2^2 + b_2^2) = 2c^2 \Rightarrow 2(3a_2^2 + b_2^2) = c^2 \Rightarrow$ c é par

Entretanto, se a, b e c forem pares então não teremos mdc (p, q) = 1 e mdc (m, n) = 1, que é uma contradição.

ii) a_1 e b_1 ímpares $\Rightarrow a_1^2 = 8k_1 + 1$ $b_1^2 = 8k_2 + 1 \Rightarrow 4(6k_1 + 2k_2) + 4 = 2c^2 \Rightarrow 2(6a_2^2 + 2b_2^2 + 1) = c^2 \Rightarrow$ c é par, que é a mesma contradição do item anterior.

Desta forma, não existem racionais x, y, z tais que $x^2 + xy + y^2 = 2$.

11) Determine todas as soluções da equação $x^2 - xy + y = 3$ em inteiros x, y.

Solução:

Resolvendo esta equação de segundo grau em x:

$x = [y \pm (y^2 - 4(y - 3))^{1/2}]/2 \Rightarrow y^2 - 4(y - 3) = y^2 - 4y + 12 = (y - 2)^2 + 8 = z^2 \Rightarrow z^2 - (y - 2)^2 = 8$

$\Rightarrow$

$(z - y + 2)(z + y - 2) = 2^3$

i) $z - y + 2 = 2$ e $z + y - 2 = 4 \Rightarrow y = 3$ e $z = 3$

ii) $z - y + 2 = -2$ e $z - y - 2 = -4 \Rightarrow y = 1$ e $z = -3$

iii) $z - y + 2 = 4$ e $z + y - 2 = 2 \Rightarrow y = 1$ e $z = 3$

iv) $z - y + 2 = -4$ e $z + y - 2 = -2 \Rightarrow y = 3$ e $z = -3$

Assim, $y = 1$ e $y = 3$ são os únicos valores possíveis

$\therefore y = 1 \Rightarrow x^2 - x - 2 = 0 \Rightarrow (x - 2)(x + 1) = 0 \Rightarrow x = -1$ e $x = 2$

$\therefore y = 3 \Rightarrow x^2 - 3x = 0 \Rightarrow x(x - 3) = 0 \Rightarrow x = 0$ e $x = 3$

Deste modo, temos os seguintes pares: (– 1, 1), (2, – 1), (0, 3), (3, 3)

12) Determine todas as soluções de $1 + x + x^2 + x^3 = 2^y$ em inteiros x, y.

Solução:

$\therefore (x + 1)(x^2 + 1) = 2^y \Rightarrow x + 1 = 2^t$ e $x^2 + 1 = 2^s$

$\therefore$ Analisemos agora a equação $x^2 + 1 = 2^s$:

i) $s = 0 \Rightarrow x^2 + 1 = 1 \Rightarrow x = 0$

ii) $s = 1 \Rightarrow x^2 + 1 = 2 \Rightarrow x = 1$

iii) $s = 2 \Rightarrow x^2 + 1 = 4 \Rightarrow$ não existe x inteiro que satisfaça

iv) $s = 3 \Rightarrow x^2 + 1 = 8 \Rightarrow$ não existe x inteiro que satisfaça

v) $s \geq 4 \Rightarrow x^2 + 1 = 2^s \Rightarrow x^2 = 2^3.2^{s-3} - 1 \Rightarrow x^2 = 8(2^{s-3} - 1) + 7 \Rightarrow x^2 = 8k + 7$

Notemos que:

$\therefore x \equiv 0 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 8$
$\therefore x \equiv \pm 1 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 8$
$\therefore x \equiv \pm 2 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 8$
$\therefore x \equiv \pm 3 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 8$
$\therefore x \equiv 4 \pmod 8 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 8$
Assim, a equação $x^2 = 8k + 7$ não possui soluções inteiras
Deste modo, as únicas soluções para $x^2 + 1 = 2s$ são $x = 0$ e $x = 1$
$\therefore x = 0 \Rightarrow 2^y = 1 \Rightarrow y = 0$
$\therefore x = 1 \Rightarrow 2^y = 4 \Rightarrow y = 2$
Soluções: (0, 0) e (1, 2)

13) (Olimpíada da Itália-95) Determine todos os pares de inteiros positivos x, y tais que $x^2 - 615 = 2^y$.
Solução:
Inicialmente notemos que:
I) $2^4 \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k} \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k+1} \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k+2} \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow 2^{4k+1} \equiv 3 \pmod 5$
II) se $x \equiv 0 \pmod 5 \Rightarrow x^2 \equiv 0 \pmod 5$
se $x \equiv 1 \pmod 5 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 5$
se $x \equiv 2 \pmod 5 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 5$
se $x \equiv 3 \pmod 5 \Rightarrow x^2 \equiv 4 \pmod 5$
se $x \equiv 4 \pmod 5 \Rightarrow x^2 \equiv 1 \pmod 5$

Como na equação dada tanto x^2 quanto 2^y deixam o mesmo resto na divisão por 5, então necessariamente y deve ser par (4k ou 4k + 2), enquanto que x não deve ser divisível por 5.
Fazendo $y = 2z \Rightarrow x^2 + 615 = 2^{2z} \Rightarrow 2^{2z} - x^2 = 615 \Rightarrow (2^z - x)(2^z + x) = 3.5.41$.
Levando em consideração que se x e z são positivos então $2^z + x > 2^z - x$, temos 4 possibilidades:
i) $2^z + x = 615$ e $2^z - x = 1$;
ii) $2^z + x = 205$ e $2^z - x = 3$;
iii) $2^z + x = 123$ e $2^z - x = 5$;
iv) $2^z + x = 41$ e $2^z - x = 15$.
Claramente os casos i), ii) e iv) não possuem soluções inteiras.
No caso iii) temos que $2^{z+1} = 128 \Rightarrow z = 6 \Rightarrow y = 12$ e $x = 59$.

14) (USAMO-79) Determine todas as soluções em inteiros não-negativos, se existirem, da equação Diofantina:
$n_1^4 + n_2^4 + ... + n_{14}^4 = 1599$.
Duas soluções em que $n_1, n_2, ..., n_{14}$ diferem somente pela permutação são consideradas as mesmas.
Solução:
Analisemos os restos de todas as quartas potências dos inteiros:
$n \equiv 0 \pmod{16} \Rightarrow n^4 \equiv 0 \pmod{16}$
$n \equiv \pm 1 \pmod{16} \Rightarrow n^4 \equiv 1 \pmod{16}$
$n \equiv \pm 2 \pmod{16} \Rightarrow n^4 \equiv 0 \pmod{16}$
$n \equiv \pm 3 \pmod{16} \Rightarrow n^4 \equiv 1 \pmod{16}$
$n \equiv \pm 4 \pmod{16} \Rightarrow n^4 \equiv 0 \pmod{16}$
$n \equiv \pm 5 \pmod{16} \Rightarrow n^4 \equiv 1 \pmod{16}$
$n \equiv \pm 6 \pmod{16} \Rightarrow n^4 \equiv 0 \pmod{16}$
$n \equiv \pm 7 \pmod{16} \Rightarrow n^4 \equiv 1 \pmod{16}$
$n \equiv 8 \pmod{16} \Rightarrow n^4 \equiv 0 \pmod{16}$
Como $1599 \equiv 15 \pmod{16}$ e temos somente 14 números para somar, com o resto por 16 podendo valer 0 ou 1, então nunca conseguiremos alcançar resto 15.

15) (Olimpíada da Inglaterra-69) Determine todos os pares (a, b) de inteiros satisfazendo $a^2 - 3ab - a + b = 0$.

Solução:

Notemos que a equação pode ser interpretada como uma equação de 2º grau em a:

$\therefore a^2 - 3ab - a + b = 0 \Rightarrow a^2 - (3b + 1)a + b = 0$

Para que esta equação possua solução inteira seus discriminante deve ser um quadrado perfeito:

$\therefore \Delta = (3b + 1)^2 - 4b = k^2 \Rightarrow (3b + 1)^2 - k^2 = 4b \Rightarrow (3b + 1 + k)(3b + 1 - k) = 4b = 2.2.b$

Como temos um produto de termos de mesma paridade, então os dois termos são pares.

Notemos que $3b + 1 - k \geq 2$, e como $2.(3b + 1 + k) \geq 6b \geq 4b$, teremos que $b = 0$:

$a^2 - a = 0 \Rightarrow a = 0$ $a = 1$, ou seja, temos os pares $(0, 0), (1, 0)$

16) (International Mathematical Talent Search) Prove que existem infinitos ternos de inteiros positivos (x, y, z) tais que $x^3 + y^5 = z^7$.

Solução:

Seja $3^2 + 4^2 = 5^2$ uma solução da equação pitagórica.

Multiplicando por $3.k^3$ os termos desta equação obtemos:

$(3k)^3 + 3.4^2k^3 = 3.5^2.k^3$

Multiplicando por $3^9.4^3.k^{12}$ os termos desta equação obtemos:

$(3^1.4.k^5)^3 + (3^2.4.k^3)^5 = (3^{10}.4^3.5^2.k^{15})$

Multiplicando por $3^{60}.4^{60}.5^{75}.k^{120}$ os termos desta equação obtemos:

$(3^{24}.4^{21}.5^{25}.k^{65})^3 + (3^{14}.4^{13}.5^{18}.k^{27})^5 = (3^{10}.4^9.5^{11}.k^{35})^7$

Assim, existe, infinitos ternos (x, y, z) de inteiros positivos que satisfazem $x^3 + y^5 = z^7$.

17) Prove que a equação $x^2 + y^2 = z^{1998}$ possui infinitas soluções inteiras positivas x, y e z.

Solução:

Seja $3^2 + 4^2 = 5^2$ uma solução da equação pitagórica.

Multiplicando por $5^{1998}.k^{1998}$ os termos desta equação obtemos:

$(3.5^{998}.k^{999})^2 + (4.5^{998}.k^{999})^2 = (5k)^{1998}$

Portanto $(x, y, z) = (3.5^{998}.k^{999},\ 4.5^{998}.k^{999},\ 5k)$ é uma família de soluções para a equação dada.

18) (Olimpíada Balcânica Jr.-2001) Determine todos os números naturais a, b, c tais que $a^3 + b^3 + c^3 = 2001$.

Solução:

Como a, b, c são naturais e $13^3 > 2001$, então temos que $1 \leq a, b, c \leq 12$.

Suponhamos, sem perda de generalidades que $a \geq b \geq c$, uma vez que a equação é simétrica.

Assim: $2001 = a^3 + b^3 + c^3 \leq 3a^3 \Rightarrow a \geq 9 \Rightarrow 9 \leq a \leq 12$.

Desta forma temos 4 casos a considerar:

i) $a = 9 \Rightarrow b^3 + c^3 = 1272$

Como $9 \leq b \leq 8$ então não temos soluções neste caso.

ii) $a = 10 \Rightarrow b^3 + c^3 = 1001$

Desde que $10 \leq b \leq 8$ temos somente uma solução, que é $b = 10$, $c = 1$.

iii) $a = 11 \Rightarrow b^3 + c^3 = 670$

Como $8 \leq b \leq 7$ novamente não temos solução para este caso.

iv) $a = 12 \Rightarrow b^3 + c^3 = 273$

Como $6 \leq b \leq 5$ então não temos solução para este caso.

Desta forma, as únicas soluções são (a, b, c) = {(10, 10, 1), (10, 1, 10), (1, 10, 10)}

19) (Olimpíada do Cone Sul-94) Determinar infinitos ternos x, y, z de inteiros positivos que sejam soluções da equação $x^2 + y^2 = 2z^2$, tais que o máximo divisor comum de x, y, z seja 1.

Solução:

Para que a soma $x^2 + y^2$ seja par, então x e y são ambos pares ou ambos ímpares

Portanto $x + y$ e $x - y$ são ambos pares $\Rightarrow x + y = 2a$ e $x - y = 2b$

Então $x = a + b$ e $y = a - b$ e consequentemente:
$2z^2 = x^2 + y^2 = (a + b)^2 + (a - b)^2 = 2a^2 + 2b^2 \Rightarrow a^2 + b^2 = z^2$
A solução desta equação pitagórica é: $a = m^2 - n^2 \quad b = 2mn \quad z = m^2 + n^2$
Então: $x = m^2 - n^2 + 2mn \quad y = m^2 - n^2 - 2mn \quad z = m^2 + n^2$

20) (Olimpíada da Romênia-79) Determine todos os inteiros $3^x + 4^y = 5^z$.
Solução:
Analisemos os restos módulo 4 dos termos da equação diofantina:
i) $3 \equiv -1 \pmod 4 \Rightarrow 3^x \equiv (-1)^x \pmod 4$ (1)
ii) $4 \equiv 0 \pmod 4 \Rightarrow 4^y \equiv 0 \pmod 4$ (2)
iii) $5 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow 5^z \equiv 1 \pmod 4$ (3)
Deste modo, $3^x + 4^y \equiv 5^z \pmod 4 \Rightarrow (-1)^x + 0 \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow (-1)^x \equiv 1 \pmod 4 \Rightarrow$ x é par $(x = 2x_1)$
Analisemos agora os restos módulo 3: $3^x + 4^y \equiv 5^z \pmod 3 \Rightarrow 0 + 1 \equiv (-1)^z \pmod 3 \Rightarrow$ z é par $(z = 2z_1)$
Assim: $4^y = 5^{2z_1} - 3^{2x_1} \Rightarrow 2^{2y} = (5^{z_1} + 3^{x_1})(5^{z_1} - 3^{x_1})$.
Então: $5^{z_1} + 3^{x_1} = 2^s$ e $5^{z_1} - 3^{x_1} = 2^t$, com $s > t$ e $s + t = 2y$.
Resolvendo o sistema anterior: $5^{z_1} = 2^{t-1}(2^{s-t} + 1)$ e $3^{x_1} = 2^{t-1}(2^{s-t} - 1)$.
Desde que ambos os lados das igualdades são ímpares, devemos ter $t = 1$.
Denotemos $s - t = u \Rightarrow 3^{x_1} = 2^u - 1$.
Como $2 \equiv -1 \pmod 3 \Rightarrow 2^u \equiv (-1)^u \pmod 3 \Rightarrow$ u é par $(u = 2u_1)$.
Repetindo o procedimento anterior obtemos: $2^{u_1} + 1 = 3^\alpha$ e $2^{u_1} - 1 = 3^\beta$, $\alpha + \beta = x_1$.
Assim: $3^\alpha - 3^\beta = 2 \Rightarrow \alpha = 1$ e $\beta = 0$.
Consequentemente, $u_1 = 1$, $u = 2$, e a única solução é $x = y = z = 2$.

21) (Olimpíada da Romênia-83) Determine todos os inteiros não negativos soluções da equação $3^x - y^3 = 1$.
Solução:
Notemos inicialmente que $x = y = 0$ é uma solução.
Para todo x e y inteiros, podemos reescrever a equação da forma: $3^x = y^3 + 1 \Rightarrow 3^x = (y + 1)(y^2 - y + 1)$.
Assim: $y + 1 = 3^\alpha$ e $y^2 - y + 1 = 3^\beta$.
Elevando a primeira equação ao quadrado: $y^2 + 2y + 1 = 3^{2\alpha} \Rightarrow 3^{2\alpha} - 3^\beta = 3y \Rightarrow 3y = 3^\beta(3^{2\alpha - \beta} - 1)$.
Notemos que da equação inicial $(3^x = y^3 + 1)$ concluímos que y não é divisível por 3 $\Rightarrow \beta = 1$.
$\therefore y^2 - y + 1 = 3^\beta \Rightarrow y^2 - y + 1 = 3 \Rightarrow y^2 - y - 2 = 0 \Rightarrow (y - 2)(y + 1) = 0 \Rightarrow y = 2$.
Assim, temos as soluções $x = y = 0$ e $x = y = 2$.

22) (Olimpíada da Bielorússia-2000) Determine todos os pares de números inteiros (x, y) que satisfazem a equação: $y(x^2 + 36) + x(y^2 - 36) + y^2(y - 12) = 0$
Solução:
Podemos escrever esta equação como sendo uma equação de 2º grau em x:
$yx^2 + x(y^2 - 36) + y^3 - 12y^2 + 36y = 0 \Rightarrow yx^2 + x(y - 6)(y + 6) + y(y - 6)^2 = 0$ (1)
Para que esta equação possua soluções inteiras x, é necessário que o seu discriminante seja um quadrado perfeito:
$\Delta = (y - 6)^2(y + 6)^2 - 4y^2(y - 6)^2 = k^2 \Rightarrow (y - 6)^2[(y + 6)^2 - 4y^2] = k^2 \Rightarrow$
$(y - 6)^2(y^2 + 12y + 36 - 4y^2) = k^2 \Rightarrow (y - 6)^2(-3y^2 + 12y + 36) = k^2 \Rightarrow$
$-3(y - 6)^2(y^2 - 4y - 12) = k^2 \Rightarrow -3(y - 6)^2(y - 6)(y + 2) = k^2$
Desde que $(y - 6)^2$ é um quadrado perfeito: $-3(y - 6)(y + 2) = k_1^2$
Como $k_1^2 \geq 0 \Rightarrow -3(y - 6)(y + 2) \geq 0 \Rightarrow (y - 6)(y + 2) \leq 0 \Rightarrow -2 \leq y \leq 6$

Aplicando em y os inteiros desde – 2 até 6, observamos que $-3(y-6)(y+2)$ é um quadrado perfeito somente quando $y=-2$, $y=0$, $y=4$ ou $y=6$.
Vamos testar cada caso e analisar se a equação (1) possui soluções inteiras para estes valores de y:
i) $y=-2 \Rightarrow -2x^2-32x-128=0 \Rightarrow x^2+16x+64=0 \Rightarrow (x+8)^2=0 \Rightarrow x=-8$
ii) $y=0 \Rightarrow -36x=0 \Rightarrow x=0$
iii) $y=4 \Rightarrow 4x^2-20x+16=0 \Rightarrow x^2-5x+4=0 \Rightarrow (x-1)(x-4)=0 \Rightarrow x=1$ ou $x=4$
iv) $y=6 \Rightarrow 6x^2=0 \Rightarrow x=0$
Portanto, todas as soluções são:
$(x, y) = \{(-8,-2), (0, 0), (1, 4), (4, 4), (0, 6)\}$

23) (Olimpíada do Irã-95) Determine todas soluções inteiras de $\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn^2}=\frac{3}{4}$.

Solução:
Note que $m, n \neq 0$. Deixando m em função de n temos que:
$\frac{1}{m}+\frac{1}{n}-\frac{1}{mn^2}=\frac{3}{4} \Rightarrow m=\frac{4(n+1)(n-1)}{n(3n-4)} \Rightarrow n \mid 4(n+1)(n-1)$
Como $mdc(n, n+1) = mdc(n, n-1) = 1 \Rightarrow n \mid 4 \Rightarrow n = \pm 1, \pm 2, \pm 4$.
i) $n=\pm 1 \Rightarrow m=0$, que é impossível.
ii) $n=-2 \Rightarrow m=3/5$, que não é inteiro.
iii) $n=2 \Rightarrow m=3$.
iv) $n=-4 \Rightarrow m=15/16$, que não é inteiro.
v) $n=4 \Rightarrow m=15/8$, que não é inteiro.
Portanto, a única solução é $(n, m) = (2, 3)$.

4) (Olimpíada da Grécia-97) Determine todas as soluções inteiras positivas de $\frac{13}{x^2}+\frac{1996}{y^2}=\frac{z}{1997}$.

olução:
Seja $d = mdc(x, y)$, ou seja $x = dx_1$ e $y = dy_1$.
A equação é equivalente a: $1997(13)y_1^2 + 1997(1996)x_1^2 = d^2zx_1^2y_1^2$.
Desde que x_1 e y_1 são primos entre si e $1996 = 2^2.499 \Rightarrow x_1^2 \mid 1997.13$ e $y_1^2 \mid 1997.2^2.499$
Como 1997, 13, 2 e 499 são todos números primos e $mdc(x_1, y_1) = 1$, então temos duas possibilidades: $(x_1, y_1) = (1, 1)$ ou $(1, 2)$.
Analisemos inicialmente $(x_1, y_1) = (1, 1)$:
$\therefore d^2z = 1997(13) + 1997(1996) \Rightarrow d^2z = 1997.7^2.41$
Como 1997 é primo relativo a 7 e 41 então temos duas possibilidades, d = 1 ou d = 7, que dão as soluções:
$(x, y, z) = \{(1, 1, 4011973), (7, 7, 81877)\}$
Seja agora $(x_1, y_1) = (1, 2)$:
$\therefore d^2z = 1997(13) + 1997(1996)(2^2) \Rightarrow d^2z = 1997.2^9$
Assim temos as possibilidades d = 1, 2, 4, 8, 16, que dão as soluções:
$(x, y, z) = \{(1, 2, 1022464), (2, 4, 255616), (4, 8, 63904), (8, 16, 15976), (16, 32, 3994)\}$

APÊNDICE 6: REPRESENTAÇÕES DE NÚMEROS NATURAIS COMO SOMA DE POTÊNCIAS INTEIRAS

SOMA DE DOIS QUADRADOS

Teorema: Um número natural n é a soma de dois quadrados de inteiros se e somente se a fatoração de n em fatores primos não contem algum primo da forma $4k + 3$ que possui expoente ímpar.

Lema: Se um primo ímpar p divide a soma dos quadrados de primos relativos, então ele é da forma $4k + 1$.

Demonstração do Lema:

Sejam a e b dois primos relativos e p um primo ímpar tal que $p \mid a^2 + b^2$. Então $a^2 \equiv -b^2 \pmod{p}$.

Elevando os dois lados da congruência a $(p-1)/2$ temos: $a^{p-1} \equiv (-1)^{(p-1)/2} b^{p-1} \pmod{p}$.

Desde que mdc (a, b) = 1, os números a e b não são divisíveis por p, portanto, pelo Teorema de Fermat: $a^{p-1} \equiv b^{p-1} \pmod{p}$.

Deste modo, a congruência $a^{p-1} \equiv (-1)^{(p-1)/2} b^{p-1} \pmod{p}$ se transforma em $(-1)^{(p-1)/2} \equiv 1 \pmod{p}$ $\Rightarrow$ $(p-1)/2 = 2k$ $\Rightarrow$ $p = 4k + 1$.

Demonstração do Teorema:

Suponha que o número n pode ser representado como a soma dos quadrados de 2 inteiros, $n = a^2 + b^2$.

Seja $n = p_1^{q1} p_2^{q2} \ldots p_r^{qr}$ a fatoração de n em fatores primos. Seja p um divisor primo da forma $4k + 3$ do número n.

Sendo d = mdc (a, b), temos que $a = da_1$, $b = db_1$, onde mdc $(a_1, b_1) = 1$.

Como $n = a^2 + b^2$, então $d^2 \mid n$ $\Rightarrow$ $n = d^2 n_1$, onde n_1 é um número natural.

Suponhamos que o expoente de p na fatoração de n seja ímpar. Então, desde que $n = d^2 n_1$ $\Rightarrow$ $p \mid n_1 = a_1^2 + b_1^2$, que contradiz o lema. Assim, provamos que a condição do teorema é necessária.

Seja m o maior número natural cujo quadrado divide n. Então $n = m^2 k$, onde k é igual a 1 ou igual a um produto de diferentes números primos entre os quais nenhum deles é da forma $4k + 3$. Assim, cada um destes primos é igual a soma dos quadrados de dois números naturais. A identidade $(a^2 + b^2)(c^2 + d^2) = (ab + cd)^2 + (ad - bc)^2$ representa a produto de dois números naturais, cada um deles sendo igual a soma dos quadrados de dois inteiros, como a soma dos quadrados de dois inteiros. Consequentemente, k é igual a soma dos quadrados de dois inteiros. Então $k = u^2 + v^2$, implicando que $n = m^2 k = (mu)^2 + (mv)^2$.

Isto prova que a condição do teorema é suficiente.

SOMA DE TRÊS QUADRADOS

Teorema 13.5: Um número natural n pode ser a soma de três quadrados somente se ele não é da forma $4^l(8k + 7)$, onde k e l são inteiros maiores ou iguais a 0.

Demonstração:

Suponhamos que existem números naturais da forma $4^l(8k + 7)$, onde k e l são inteiros ≥ 0 que são iguais a somas de quadrados de 3 inteiros. Seja n o menor deles. Assim nós temos $n = 4^l(8k + 7) = a2 + b2 + c2$, onde a, b e c são inteiros.

Se entre os números a, b, c existe precisamente um número ímpar, então a soma dos 3 quadrados é da forma $4t + 1$, ou seja, diferente da forma de n. Se dois dos inteiros a, b, c são ímpares, então $a^2 + b^2 + c^2$ é da forma $4t + 2$, diferente de n. Se todos os inteiros são ímpares, então $a^2 + b^2 + c^2$ é da forma $8t + 3$, novamente diferente de n. Consequentemente a, b, c devem ser pares. Assim, $a = 2a_1$, $b = 2b_1$, $c = 2c_1$, onde a_1, b_1 e c_1 são inteiros. Assim, $4^{l-1}(8k + 7) = a_1^2 + b_1^2 + c_1^2$, contrário ao fato de que n é o menor natural que pode ser expresso como a soma de 3 quadrados. Assim, nenhum inteiro da forma $4^l(8k + 7)$ pode ser expresso como a soma dos quadrados de 3 inteiro.

Exemplo:

1) (Olimpíada da Lituânia-95) Qual é o menor número de inteiros positivos tais que a soma dos seus quadrados seja igual a 1995?

Solução:

Inicialmente notemos que $1995 = 3.5.7.19$.

Lembremos agora alguns teoremas sobre a representação de um número como soma de quadrados:

1. Um número natural n é a soma de dois quadrados de inteiros se e somente se a fatoração de n em fatores primos não contem algum primo da forma $4k + 3$ que possui expoente ímpar.

2. Um número natural n pode ser a soma de três quadrados somente se ele não é da forma $4^l(8k + 7)$, onde k e l são inteiros maiores ou iguais a 0.

3. Cada número natural ímpar é a soma dos quadrados de 4 inteiros, dois dos quais são números consecutivos.

Em vista dos teoremas acima explanados, o número mínimo é 3 e a representação é dada por $1995 = 1^2 + 25^2 + 37^2$.

Como curiosidade, uma expressão para representar 1995 como soma dos quadrados de 4 inteiros é $1995 = 13^2 + 24^2 + 25^2 + 25^2$.

DIFERENÇA DE DOIS QUADRADOS

Teorema: Um inteiro k é representável como a diferença de dois quadrados se e somente se k não é da forma $4t + 2$, onde t é um inteiro.

Demonstração:

Se a e b são dois números pares, então $a^2 - b^2$ é divisível por 4; se ambos a e b são ímpares então $a^2 - b^2$ é divisível por 8; se finalmente um dos números a, b é par e o outro ímpar, então $a^2 - b^2$ é ímpar.

Assim, provamos que a condição do teorema é necessária.

Suponhamos que um inteiro k não é da forma $4t + 2$. Consequentemente k é divisível por 4 ou é ímpar.

Se k é ímpar, então $(k - 1)/2$ e $(k + 1)/2$ são inteiros. Assim: $k = \left(\frac{k+1}{2}\right)^2 - \left(\frac{k-1}{2}\right)^2$.

Se k é divisível por 4 temos: $k = \left(\frac{k}{4} + 1\right)^2 - \left(\frac{k}{4} - 1\right)^2$.

Desta forma vemos que a condição do teorema é suficiente.

SOMA DE DOIS OU TRÊS CUBOS

Teorema: Todos os inteiros das formas $9k + 4$ e $9k + 5$ não podem ser expressos como a soma de dois ou três cubos.

Demonstração:

Inicialmente notemos que o cubo de todo inteiro é congruente a 0, 1 ou 8 módulo 9. Assim, para a soma de dois cubos somente podemos ter como resultado inteiros que sejam congruentes a 0, 1, 2, 7 ou 8 módulo 9. Para a soma de três cubos temos somente como resultado inteiros que seja congruentes a 0, 1, 2, 3, 6, 7 ou 8 módulo 9. Desta forma, nunca teremos inteiros que seja soma de 2 ou 3 cubos e que deixem 4 ou 5 como resto na divisão por 9.

Pode-se provar também que um inteiro $\neq 0$ possui um número finito de representações como soma de dois cubos. Claramente é suficiente provar para os números naturais.

Suponhamos que $n = x^3 + y^3$, onde x e y são números inteiro, $x > 0$, $y < 0$.

Assim, temos que $x^3 + y^3 = (x + y)(x^2 - xy + y^2)$, onde $-xy > 0$.

Desde que $x + y > 0$, então $x + y \geq 1$, onde temos que $x^2 - xy + y^2 \leq n$, que em virtude do fato de que $-xy > 0$, prova que $x < \sqrt{n}$ e $0 < -y < \sqrt{n}$. Deste modo, o número de pares x, y é finito.

Pode-se provar também que 2 é o único primo que pode ser expresso como a soma de dois cubos de números naturais.

De fato, se $p = x^3 + y^3$, onde x e y são números naturais, então $p = (x + y)((x - y)^2 + xy)$, então, desde que $x + y \geq 2$, nós devemos ter $p = x + y$ e $(x - y)^2 + xy = 1$, que implica que $x = y$ e $xy = 1$, e então $x = y = 1$ e $p = 2$.

Exemplo:

1) (Olimpíada da Alemanha-94) Prove que todo múltiplo de 6 pode ser escrito como a soma de 4 potências cúbicas de inteiros.

Solução:

Para todo $k \in Z$ temos: $6k = (k + 1)^3 + (k - 1)^3 + (-k)^3 + (-k)^3$.

2) Mostre que qualquer número inteiro é a soma de 5 cubos.

Solução:

Observa-se que $(k + 1)^3 - 2k^3 + (k - 1)^3 = (k + 1)^3 + (-k^3) + (-k^3) + (k - 1)^3 = 6k$.

Desta forma, todo inteiro múltiplo de 6 pode ser escrito como soma de 4 cubos.

Pode-se escrever também todo inteiro n das seguintes formas:

i) $n = 6q = 6x + 0^3$

ii) $n = 6q + 1 = 6x + 1^3$

iii) $n = 6q + 2 = 6(x + 1) + 2 = 6x + 8 = 6x + 2^3$

iv) $n = 6q + 3 = 6(x + 4) + 3 = 6x + 27 = 6x + 3^3$

v) $n = 6q + 4 = 6(x - 2) + 4 = 6x - 8 = 6x + (-2)^3$

vi) $n = 6q + 5 = 6(x - 1) + 5 = 6x - 1 = 6x + (-1)^3$

Assim, podemos escrever que todo inteiro n é da forma: $n = 6x + j^3$, onde $j = -2$ ou -1 ou 0 ou 1 ou 2 ou 3.

Sendo $6x = n - j^3 \Rightarrow (k + 1)^3 + (-k^3) + (-k^3) + (k - 1)^3 = n - j^3 \Rightarrow$

$n = (k + 1)^3 + (-k^3) + (-k^3) + (k - 1)^3 + j^3$

GABARITOS

Capítulo 1: Conjuntos

1) c
2) a
3) b
4) a
5) d
6) b
7) 930
8) c
9) b
10) c
11) d
12) b
13) b
14)
15) b
16) a
17) b
18) a
19) e
20) a
21) b
22) a
23) d
24) d
25) a
26) d
27) c
28) V F V F V
29) $]-3,-1[\cup [2,4]$
30) V V F F V
31) e
32) 740
33) d
34)
35) e
36)
37) c
38) b
39) a
40) a
41) e
42) c
43)
44) b
45) d
46) b
47) d
48) d
49) b
50) d
51) a
52) b
53) A = {p, q, r, s, t,u}, B = {r, s, x, z}, C = {s, t, v, x}
54) E = $\{x \in \mathbb{N} / 1 \leq x \leq 10\}$, A = {1, 2, 9, 10}, B = {1, 2, 7}, C= {3, 5, 7, 8}
55) c
56) d
57) a
58) c
59) c
60) d
61) d
62) e
63) d
64) b
65) a
66) b
67) b
68) inconsistente
69) c
70) d
71) c
72) e
73) a
74) d
75) 370; 120
76) c
77) d
78) a) 80; b) 1420
79) b
80) C C E C
81) a
82) b
83) c
84) c
85) b
86) d
87) d
88) c
89) a
90) c
91) e
92) e
93) a
94) e
95) d
96) b
98) c
99) a) 2^m; b) 3
100) c
101) d
102) 10%
103) 10%
104) b
106) Não, Sim, Não
113) F F V V V V F V
114) a
115) c
116) d
118) e
119) c
120) a
121) 22
122) c
123) e
124) d
125) e
126) d
127) c
128) a
129) c
130) e
131) c
132) b
133) e
134) c
135) b
136) a
137) d
138) e
139) e
141) a
142) d
143) c
144) c
145) b
146) a) $\sqrt{2}$
147) c) a = 4; b = - 1
153) a) 2; b) os números devem ser iguais a 1.
154) Todas devem medir 10 m
155) a) 25; b) 10000 m^2
157) 30 m comprimento e 10 m de profundidade.

Capítulo 2: Funções

1) e
2) 4,5
3) 5
4) 1/4
5) 1 e 3
6) 0 e 4
7) 0, 2, 3, e 4
8) 1 e 3
9) 0, 1 e 3
10) 0, 2, 3 e 4
11) 14
12) 1, 2, 3, e 4
13) F F F F V
14) 4
15) 0, 1, 2, 3 e 4
16) 3
17) V F F F F
18) V V V F F
19) V V F V V
20) a e c
22) c
25) b
26) a
27) b
28) d
29) F V V F F
30) 15
31) 20
32) V F V V V
33) e
34) 64
35) 3
36) 9
37) 35
38) 8
39) V F F F V
40) c
41) d
42) d
43) b
44) c
45) c
46) a
47) a
48) a
49) c
50) c
51) c
52) a
53) b
54) d
55) a
56) b
57) c
58) c
59) c
60) c
61) c
62) b
63) d
64) b
65) b
66) a
67) $\{x \in \mathbb{R} / x > 1/2 \text{ e } x \neq 1\}$
68) c
69) a) $[1; 3[\cup]4; +\infty[$; b) $[2/7; 1[$
70) b
71) a) R$ 15.00; b) R$ 24.00
72) b
73) b
74) e
75) d
76) a
77) c
78) a) $d(p) = -10p + 280$; b) $l(p) = -10p^2 + 300p - 1250$; c) R$ 15.00;
79) a) $m \leq 2$ ou $m \geq 4$; b) $m = 2$ ou $m = 4$
80) c
81) e
82) $]-4, 1] \cup [10, +\infty)$
83) 20 m x 40 m
84) a) $x^2 + 1$; b) $D = [1, +\infty)$, $Im = [0, +\infty)$, $y = \sqrt{x-1}$
85) R$ 6.00
86) c
87) d
88) a
89) e
90) a
91) c
92) a
93) e
94) c
95) d
96) e
97) d
98) d
99) b
100) c
101) a
102) d
103) a
104) d
105) a
106) a
107) d
108) c
109) a
110) a
111) b
112) c
113) b
114) $(-\infty, -2] \cup [0, 3]$
115) a) $5 < n < 13$; b) $n = 9$
116) entre 9 h e 12 h
117) a) 0 e $\sqrt[3]{3}$; b) 8
118) e
119) e
120) a
121) $-7 \leq x \leq 11$
122) F V F V F
123) $[-8, 5]$
124) F V F V F V
125) F V V V V V F
126) F V F F V V
127) V V F V F
128) F V V V F
129) V F V V F F
130) $p = 2$ e $q = 1$
131) e
132) b
133) b
134) a
135) e
136) b
137) a) -2; b) $m \neq -1/2$
139) d
140) b
141) a
142) e
143) a
144) d
145) 27/4
146) b
147) $-1 < m < 1$
148) b
149) a
150) c
151) 6 m
152) a

153) a) g(f(x)) = 2, f(g(x)) = 5; b) $x \in \mathbb{R} - \{-4, 2\}$
154) a) a = 1 b = 24; b) 31, x 31,5 155) c 156) a
157) a) c = 4; b) $x \leq -4$ ou $x \geq -1/2$ 158) c
159) d 160) a 161) d
162) 2,76 m 163) a 164) c
165) b 166) a 167) a = 1 b = 0
168) b 169) c 170) d
171) V V V F V 172) V V F F F 173) V F F V V
174) F V V V V 175) F F F V V 176) F V F F V
177) F V V F 178) F V V F 179) 5
180) V F V 182) a 183) e
184) e 185) d 186) b
187) c 188) e 189) b
190) a 191) d 192) c
193) c 194) b 195) e
196) 7 197) 1/4 198) c
199) c 200) a 201) x = 50 e x = 250
202) a = 2, b = – 6, c = – 8 203) 15 204) c
205) e 206) $f(n) = (3n^2 - 3n)/2$
207) fof(x) = x, (fofofo...f)(x) = (ax + b)/(cx – a) 208) a
209) b) $[-1, +\infty)$ 210) b 211) c
212) d 213) c 214) b
215) d 216) a 217) b
218) c 219) a 220) d
221) b 222) c 223) b
224) d 225) c 226) b
227) c 228) e 229) a
230) d 231) b 232) b
233) b 234) c 235) d
236) d 237) b 238) a
239) c 240) b 241) c
242) b 243) c 244) d
245) b 246) c 247) b
248) d 249) c 250) a
251) b 252) d 253) c
254) d 255) b 256) b
257) b 258) d 259) a
260) b 261) d 262) b
263) d 264) a 265) a
266) c 268) a 269) a
270) d 271) a 272) c
275) c 276) e 277) e
278) d 279) c 280) b
283) m = – 8 ou m = 4 284) d 285) e
286) b 287) c 288) a
289) c 290) b 291) c
292) e 293) c 294) e
295) a 296) a 297) b
298) e 299) a 300) b
301) c 302) c 303) a
304) d 305) e 306) d
307) e 308) e 309) a

311) d
313) b
314) a = 5/4 ou a = 3/4 ou a = 1
315)
317) a) a = 1, b = – 4, c = – 5; b) – 5; c) mínimo; d) (2, – 9)
318) periódica de período 2a
319) $aa' \neq 0$, $b^2 > 4ac$, $b'^2 > 4a'c'$, $2(ca' + ac') = bb'$
320) $f(x) = (x + 3)^2$
322) q(5) = 2, r(5) = 0
323) d
326) 6
327) $(x^2 + 3)/2$
328) $x^2 + 3x + 3$
332) c
333) b
334) d
335) 0
336) 66
337) a
338) b
339) c
340) b
342) b
343) b
344) c
345) a
346) e
347) a
348) c
349) c
350) a
351) a
352) b
353) c
354) a
355) d
357) 1/1998
360) 11
361) 1/7
362) 24
363) 1994
365) 1/500
369) a
370) 0
371) 222111

Capítulo 3: Representação Decimal

1) 12, 24, 36, 48
2) ímpares;
3) 4 dígitos (1, 2, 7, 8)
4) 29, 38, 47, 56, 65, 74, 83, 92
5) 41
6) 62
7) 125
8) 252
9) 1650220
10) $\underbrace{333...334}_{m-1}$
12) 234
13) 27
14) 21164
15) 23569
16) a
17) c
18) Não
20) d
21) d
22) d
23) 818
24) a
25) a
26) d
27) c
28) 7463
29) a
30) a) 1991 e 2002; b) 40
31) d
32) b
33) e
34) b
35) d
36) 1237 e 893
37) 7744
39) 898
40) A = 5 B = 6 C = 2
41) 474
42) a
43) 288
44) a
45) 2 números (28 e 39)
46) 264 e 396
49) 1967, 1970, 1973
50) c
51) c
52) 30, 41, 52, 63, 74, 85 e 96
53) 198
55) 19971961
56) 216, 315, 513, 612, 810, 917, 719
57) 989, 878, 767, 656, 545, 434, 323, 212, 101
58) Não
59) a
60) 1 número (27)
61) c
62) e
63) 17910
64) 1999 e 2017
65) 64
66) {5, 7, 8, 9}
67) 50 e 51
68) a) 1, 4, 9, 49, 64, 81; b) 1, 4, 9, 49, 64, 81.
69) (2, 3, 6, 9) (1, 2, 4, 8) (3, 4, 6, 8) (1, 2, 3, 6) (2, 3, 4, 6)
70) 8833
71) 25
72) 20
73) 4505, 4615, 4725, 4835 e 4945
74) 874 e 793
75) (7, 2, 2) e (6, 9, 3)
77) A = 1 B = 0 C = 8 D = 9
78) 287 x 23 = 6601
80) 159, 249, 168, 258, 348, 267, 357, 456
81) 370, 481, 407, 518, 592, 629, 638
82) 343, 444, 363, 383
83) 370 e 371
84) 167 e 334
85) 342
87) 87
88) $n = \underbrace{1333...335}_{5968}$
90) 153846
91) 35961
92) 6984
93) 9

94) Não 95) 1997

Capítulo 4: Critérios de Divisibilidade

1) a) 6710, 6765; b) 5160, 5460, 5760, 5064, 5364, 5664, 5964, 5268, 5568, 5868; c) 564210; d) 3466584; e) 23130, 23175; f) 51480, 51408.

2) a) 300, 600, 900, 204, 504, 804, 108, 408, 708; b) 5220, 5520, 5820, 5025, 5325, 5625, 5925; c) 285753, 281754, 288750, 284757; d) 123408, 123480; e) 326232, 326268; f) 713625.

3) 1032, 1332, 1632, 1932, 1236, 1536, 1836. 7) 392436, 432432

8) 3346497 10) c 11) b

12) a 13) d

14) Não há alternativa correta. O correto é 1156650 15) e

16) d 17) 541638

18) 1170, 1470, 1770, 1275, 1575, 1875. 19) d

20) b 21) 784913526 22) 7

23) a = 2, 5 ou 8 24) 6374214 25) b

26) 592 27) c

28) 45 divide $10(a_n + a_{n-1} + ... + a_2 + a_1) + a_0$ 29) d

30) d 31) 36792 33) c

34) a = 3 b = 6 35) 20 36) Não

38) 381654729 39) 324561 40) 189

41) 7776776 43) a) No lugar do 8 aparece 2; b) 927654321

45) 9 46) Não

Capítulo 5: Propriedades da Divisibilidade

7) 18, 38, 60, 84 8) 40, 80, 120 9) 322, 19

12) 241 13) 1946

16) 10n ($\forall n \in \mathbb{N}^*$), 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 22, 24, 26, 28, 33, 36, 39, 44, 48, 55, 66, 77, 88, 99

17) 25.10^{n-2} 21) – 145, – 31, – 19, – 13, – 11, – 5, 7, 121

24) a 25) b 26) d

27) 588 28) e 29) b

30) c 31) a 32) d

33)c 34) e 35) c

36) c 37) b 38) 41 e 31

40) a) 222 e 11; b) 3791 41) b) 5. 42) a) 8; b) 129.

43) 6311 44) b 45) b

46) c 47) a 48) b

49) c 50) d 51) a

56) Não 57) 7744 58) c

59) A = 13 B = 12 61) 30, 41, 52, 63, 74, 85, 96 62) 3333333330

63) c 64) c 65) d

66) 2000 67) c 68) d

69) d 70) 5 71) 113

72) 928125 73) 6009 75) 0, 1

76) 111, 222, 333, 444, 555, 666, 777, 888, 999, 370, 407, 481, 518, 593, 629

78) – 8, 2, 4, 14 79) $a = (2^{1+3t}3^{2+3k})m^3$ $b = (2^{1+2t}3^{1+2k})m^2$

81) b 82) c 83) d

84) e

85) Existem vários números da forma abcd onde a = {2, 4, 6, 8}, b = {0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8}, c = {0, 1, 2, 3, 4, 5} e d = {1, 3, 5, 7, 9}

86) b 90) b 91) e

92) c 93) 2 97) 11, 22, 44, 88, 352

99) 100 100) 21 101) A = 2 B = 7
103) todos os n que possuírem os últimos dois dígitos sendo 12, 38, 62 ou 88.
104) 176 105) Não 106) 144 e 1444
108) Sim. $n = 598\underbrace{999...99}_{18}$
109) 10, 12, 18, 20, 21, 24, 27, 30, 36, 40, 42, 45, 48, 50, 54, 60, 63, 70, 72, 80, 81, 84, 90
110) Não 112) 9999 113) $x = 2^n - 1$
116) Basta que n não seja divisível por 2 ou 5. 119) 6
120) a) sim; b) não 122) 39, 58, 77, 96
123) $n = (2k-1)^2$ ou $n = 2^{2m-1}(2k-1)^2$
125) (x, y) = {(1, 1), (1, 2), (2, 1), (2, 3), (3, 2)} 127) 5
131) 11 134) 2 135) 280
136) 32768 140) 2.3^{658} 141) 15
143) (4, 5), (3, 10) 147) n = 2003 146) $b = 2, \forall n \in \mathbb{N}^*$
147) m = 4 n = 2 148) (5, 8, 11)
149) (m, n) = {(588, 49), (204, 51), (76, 57)} 150) x = 4 y = 2
151) a) dois algarismos: 49, quatro algarismos: 1681; b) Sim, existem 5 números "finos" de seis algarismos: 144400, 225625, 256036, 324900 e 576081; c) O número de 20 dígitos $24999000019999800001 = (4999900001)^2$ é "fino", uma vez que $2499900001 = (49999)^2$ e $(9999800001) = (99999)^2$.

Capítulo 6: Números Primos

1) x = 250 y = 249 3) p = 2 9) a
11) p = 19 14) a 15) a
16) c 17) a 18) a
19) d 20) a 21) 19
22) – 3, – 1, 1 24) p = 5 25) b
26) b 27) d
28) Não, 11 sempre divide o número 29) p = 3
30) d 31) k = 9 32) n – 1
35) a 36) d 40) e
41) n = 1 ou n = 2 44) 17 48) $3^3 5^2$
49) a) Não; b) Não. 53) p = 2 54) 7, 37, 67, 97, 127
56) x = 5, 20, – 8, – 23. 57) 5313 58) n = 2.7.11.13 = 2002
59) $d = p^3 + p^2 \div p + 1$ 60) Não
62) $(3, 3^{23^{29}}), (23, 23^{3^{29}}), (29, 29^{3^{23}})$ 63) 2, 5, 257
66) Nenhuma 68) n é primo 71) a) Sim (n = 101); b) Não
74) 95 77) Nunca é possível
80) 7 números (11, 22, 13, 17, 19, 23, 15)
81) Sim. Os 10 números $p_1^2.p_2.p_3.p_4.p_5.p_6.p_7.p_8.p_9.p_{10}$, $p_1.p_2^2.p_3.p_4.p_5.p_6.p_7.p_8.p_9.p_{10}$, $p_1.p_2.p_3^2.p_4.p_5.p_6.p_7.p_8.p_9.p_{10}$, ..., $p_1.p_2.p_3.p_4.p_5.p_6.p_7.p_8.p_9.p_{10}^2$, onde $p_1, p_2, ..., p_{10}$ são primos, satisfazem o enunciado.

Capítulo 7: MDC e MMC

MDC

2) 96 3) (48, 336), (144, 240)
4) $n = 2^a.3.m$, $a \geq 1$ e mdc $(m, 42) = 1$. 5) 10, 50, 70, 110
6) (120, 84), (300, 312) 7) 45 8) 3
9) $2^6.19.23^3$ 10) R$ 0,30 11) 2
21) 84 22) 1, 3, 9 23) c

24) d
25) 14
26) a
27) a) $2^3.5^2$ e $2^3.3.5$; b) 40
28) d
29) d
30) c
31) c
32) 1, 2, 4, 5, 10, 20, 25, 50, 100
33) b
34) a
35) a
36) c
37) a
38) a = 3.5.7 e b = 2^3.3.7
39) 110
40) 6, 18, 54, 66, 78
41) 83
42) c
43) 7981
44) 21
45) 2, 3, 86
46) c
48) d
49) 11
50) 16
51) 3
52) 1, 3, 3^2, 3^3, 3^4
55) todo n ≥ 15
56) a
57) (8, 0, 0) → (3, 5, 0) → (3, 2, 3) → (6, 2, 0) → (6, 0, 2) → (1, 5, 2) → (1, 4, 3) → (4, 4, 0)
58) 33
59) a_0 pode ser 2, 3, 4, 7 ou 8.
61) 127
63) 480
70) Se m + n é par: mdc = 12, se m + n é ímpar: mdc = 2.
71) Sim.
73) 2, 3 ou 6
74) n = x^2, x ímpar, ou n = $2^{\alpha}.y^2$, sendo que α é ímpar e y é ímpar
75) p = 3
78) Sim

MMC

2) a
3) $2^2.3$ e $2^3.3^2.7^2.13$
4) 180
5) 105
6) 13:30 h
7) múltiplos de 20 da 1ª, múltiplos de 12 da 2ª e múltiplos de 5 da 3ª.
8) 2519
9) (6, 90), (18, 30)
10) a) (4, 60), (12, 20); b) (57, 532), (217, 372)
14) a
15) d
16) d
17) b
18) 05
19) n = $2^4.3^x.5.7^y$, onde 0 ≤ x ≤ 2 e 0 ≤ y ≤ 1.
20) c
21) e
22) a
23) c
24) d
25) d
26) d
27) b
28) e
29) b
30) b
31) (2, 7), (3, 4), (6, 9)
32) a
33) 18
34) e
35) a) 13; b) A: 6 vezes e B: 7 vezes
36) (3, 4, 5, 6)
37) 301
38) 4002
39) 1917, 1952, 1987
40) b
41) c
42) e
43) b
44) 6009
46) b
47) a) (95, 1995), (285, 665); b) (95, 285, 665), (95, 95, 1995), (285, 285, 665), (285, 665, 665), (95, 285, 1995), (95, 665, 1995), (95, 1995, 1995), (285, 665, 1995)
48) 4
49) 100
50) 16
51) b
53) A = 31 e B = 120
54) 2^6
55) 70
56) 2^{14}
58) a) [a − mdc(a,b)][b − mdc(a,b)] ≥ 2[mdc(a,b)]^2; b) a = 3.mdc(a,b) e b = 2.mdc(a,b)
59) n ≥ 41
60) 42
61) n ≠ p^m, onde p é primo e m ≥ 1
62) p = 3 e q = 5

Capítulo 8: Divisores

1) 3150
3) 12
4) 42
5) 1800
6) $2^4.3^2$ ou $2^2.3^4$
7) $3^3.5^4$
15) k ≥ 3
18) - 42, - 24, - 18, - 15, - 12, - 10, - 9, - 8, - 7, - 5, - 4, - 3, - 2, 0, 3, 6, 12, 30
19) a) 12166; b) $2a^2 + 2b^2 - ab + 2a + 2b + 1$
20) b
21) d

22) a | 23) c | 24) V F V
25) b | 26) a | 27) a
29) a) 16; b) 144 | 30) c | 31) d
32) d | 33) b | 34) b
35) c | 36) c | 37) 18
39) 7 | 41) b | 42) c
43) 4, 9, 25, 49, 121, 169, 289, 361, 529, 841, 961 | | 45) 60, 98, – 18, – 20
46) todos os números primos, 4, 6, 8 e 9
47) $2^3 3^2$, $2^2 3^3$, $2^3 5^2$, $2^2 3$, $2^5 5$, $2^5 7$, $2^5 11$ | | 49) 41040
50) c | 51) d | 52) 24
53) 16 | 54) 3^5 | 55) 31
56) 189 | 57) 192 | 58) 8, 12
59) a) 81; b) n primo | 60) $2^5 3$, $2^4 5$ | 61) 406
62) 18 | 64) 784 | 65) $2^3.3.83$
66) a) 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200; b) $2^3 5^3$ | | 67) 8
70) 1680 | 71) p = 3 | 72) n = 130
73) 8.044.086.060 | 75) 20, 21, 22, 25 |
76) a) 6 digitos: 120120 = $2^3.3.5.7.11.13$; b) 10 digitos

Capítulo 9: Congruências

1) a | 9) a) 4; b) 6 | 11) 5
19) $a_1 = 4$ | 20) b | 21) a
22) d | 23) a | 25) 143
26) 36 | 27) 43 | 28) 7
29) b) 7142 | 30) n = 9 $\Rightarrow$ $2001 = 43^2 + 11^2 + 5^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2 + 1^2$ |
31) 0 | 33) 4 | 34) Não
35) c | 36) 5 | 37) 111
38) a) n = 10k + 1; b) n = 50k + 1 | 39) 19976 | 41) Não
42) 1 | 43) d | 44) e
45) d | 46) c | 47) 1
50) 35 | 51) c | 54) 92
56) 2 | 57) 2 | 58) 9
59) Sim | 61) 101 | 62) n = 10k + 1 ou n = 10k + 6
63) 81 | 65) 2^{1996} | 66) 2
68) 16, 32, 64 | 69) somente os terminados em 0000 |
73) 0 | 78) 1376

Capítulo 10: Função Máximo Inteiro

5) 164 | 6) 89 |
10) se n ímpar: (n + 1)/2; se n par: 0 | | 11) 496
12) b) $(3+\sqrt{5})/2$ | 13) 666 | 14) 0, 1, 2
15) 40 | 16) 49 | 17) 666.167.500
18) 478 | 19) 2151 | 20) x = 1 ou x = 96/97
23) a | 24) a | 25) 135
26) 1999 | 27) d | 28) 1498
29) $762,9 < x < 763$ | 30) $2^n - 1$ | 31) c
32) e | 33) b | 34) 30
37) x = 5 | 38) 810001 | 40) n

Capítulo 11: Equações Diofantinas Lineares

1) 56 + 44 **2)** 8/13 + 13/17 **4)** 16

5) b **6)** 10 **7)** a) a = 76; b) 100 soluções

8) $x_1 = x_2 = ... = x_{10} = 1$ **9)** a **10)** d

11) e **13)** (1, 8), (6, 5), (11, 2) **14)** 972

15) 35 **16)** 34 **17)** e

18) d **19)** c

20) a) infinitos, todos da forma n = 24 + 200t; b) nenhum; c) n = 774 + 900k

21) (4, 229) **22)** $a = 1$ **23)** d

24) 145 **25)** 10 **26)** 3

27) 18 **28)** d **29)** c

30) {315m + 160, 315m + 161 e 315m + 162} **31)** e

32) 40 **33)** 30

Marcelo Rufino de Oliveira nasceu em 1976 em Manaus-AM. Ingressou em 1994 no Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), onde graduou-se em Eng. Mecânica- Aeronáutica em 1999, porém nunca exerceu a engenharia. Desde então trabalha coordenando e lecionando matemática e física em turmas preparatórias para concursos militares de níveis fundamental e médio em Belém. Em 2000 assumiu a coordenação regional da Olimpíada Brasileira de Matemática no estado do Pará, sendo também responsável pela organização da Olimpíada Paraense de Matemática. Em 2002 participou da banca corretora da Olimpíada de Matemática do Cone Sul, realizada em Fortaleza-CE.

Márcio Rodrigo da Rocha Pinheiro nasceu em 1977 em Belém-PA. Oriundo de família humilde, cursou todo o ensino médio nas Turmas Militares do Grupo Educacional Ideal. Foi aprovado nos concursos militares da Escola Preparatória de Cadetes do Exército (EsPCEx), Academia da Força Aérea (AFA), Escola Naval, Instituto Militar de Engenharia (IME) e Instituto Tecnológico de Aeronáutica (ITA), além de ter conquistado, em 1995, o 1o lugar geral na Universidade da Amazônia (Unama). Ingressou no ITA em 1995 abandonando o curso no ano seguinte. A partir de 1997 passou a lecionar matemática em turmas preparatórias para concursos militares. Em 2004 finalmente graduou-se em Licenciatura Plena em Matemática pela Universidade Federal do Pará (UFPa).

COLEÇÃO
ELEMENTOS DA MATEMÁTICA